Petri hálók dinamikus tulajdonságai

dr. Bartha Tamás

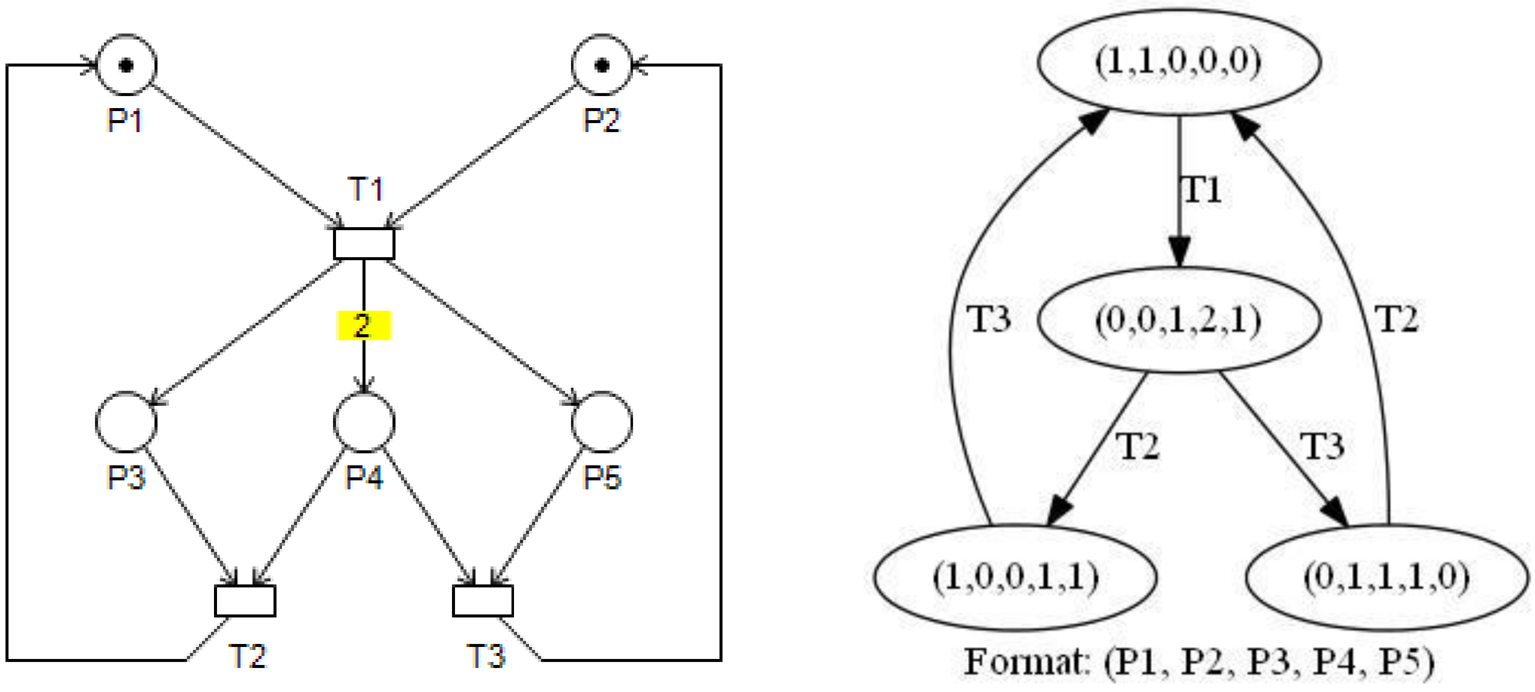
dr. Majzik István

dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Petri hálók vizsgálata:
Áttekintés a módszerekről

Ismétlés: A Petri hálók működése



Egyszerű Petri háló és a jelölések változása
(az állapotok elérhetőségi gráfja)

Vizsgálati lehetőségek

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció
  - ⇐ Egy-egy trajektória bejárása
- Állapottér teljes bejárása
  - Elérhetőségi gráf analízise: Dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
  - Modellellenőrzés
  - ⇐ Minden trajektória bejárása adott kezdőállapotból (kimerítő bejárás)
- Háló struktúrájának analízise
  - Statikus analízis: Strukturális tulajdonságok
  - Invariáns analízis
  - ⇐ Kezdőállapottól független tulajdonságok (bármely kezdőállapotra)

Dinamikus és strukturális tulajdonságok

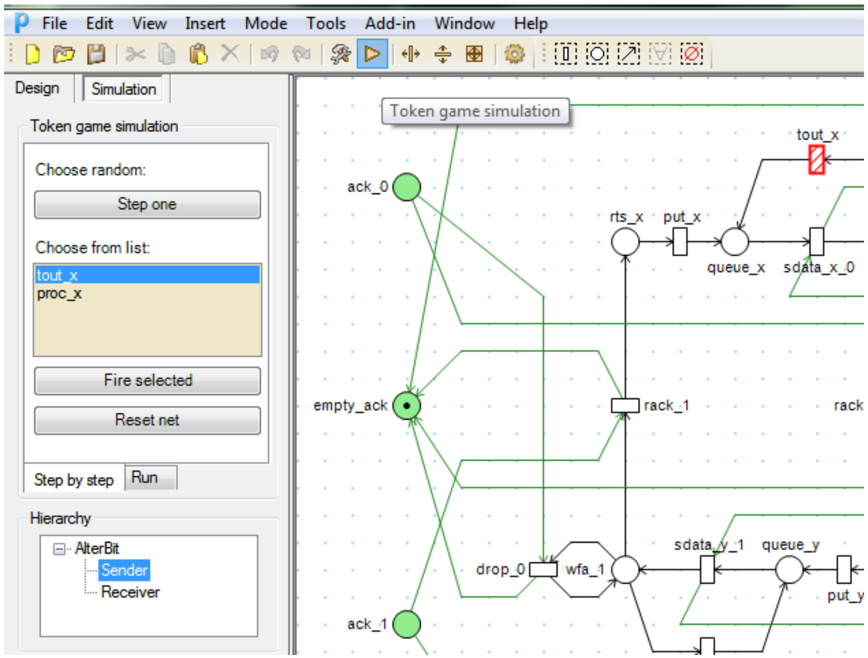
- Dinamikus tulajdonságok az elérhetőségi gráf alapján
  - Kezdőállapot függőek (nem általános érvényűek)
  - Jellegzetes tulajdonságok (ld. később): Elérhetőség, fedhetőség, élőség, holtpontmentesség, korlátosság, fairség, megfordíthatóság
  - Tulajdonságmegtartó redukciós technikák segítenek az analízisben
- Strukturális tulajdonságok a (jelöletlen) háló alapján
  - Kezdőállapottól függetlenek: minden működésre vagy lehetséges működésre vonatkozik
  - Jellegzetes tulajdonságok (ld. később): Strukturális élőség, strukturális korlátosság, vezérelhetőség, konzervativitás, ismételhetőség, konzisztencia
  - Invariánsok: T-invariánsok (tranzíciók tüzeléseire), P-invariánsok (helyekre)

Petri háló modellek szimulációja

Diszkrét rendszerek szimulációja

- Cél: a vizsgált rendszer „valósághű” modellezése
- Szimuláció folyamatmodellek esetén
  - Eseményorientált: Tevékenységek kezdete és vége
  - Csak az események időpontjait tartjuk nyilván
- Petri hálók szimulációja
  - A rendszer lehetséges trajektóriáinak vizsgálata
    - Állapot: tokeneloszlás (jelölés)
    - Állapotváltás (esemény): tranzíció tüzelése
    - Trajektóriák az állapottérben: tüzelési szekvenciák
  - Petri háló nemdeterminisztikus
    - (Ál-)véletlen generálásra van szükség a választáshoz
    - Interaktív szimuláció (token game): Felhasználói választás

Animáció (token játék, token game)



- A modell interaktív ellenőrzése
  - Engedélyezett átmenetek jelölve
  - Jelölt átmenetre kattintva tüzel
  - Előállítja az új tokeneloszlást
- Konkurens átmenetek
  - Manuális választás
  - Automatikus véletlen választás (pl. PetriDotNet)
- Befejezéskor visszaállítja a kezdeti tokeneloszlást

Egyszerű szimulációs algoritmus

```
while (true) do
    Engedélyezett tranzíciók felmérése
    if (Van engedélyezett tranzíció)
      then Tüzelő  kiválasztása (nemdeterminisztikus)
      else Szimuláció vége
    Tüzelés
end while
```

Elérhetőségi analízis

Elérhetőség

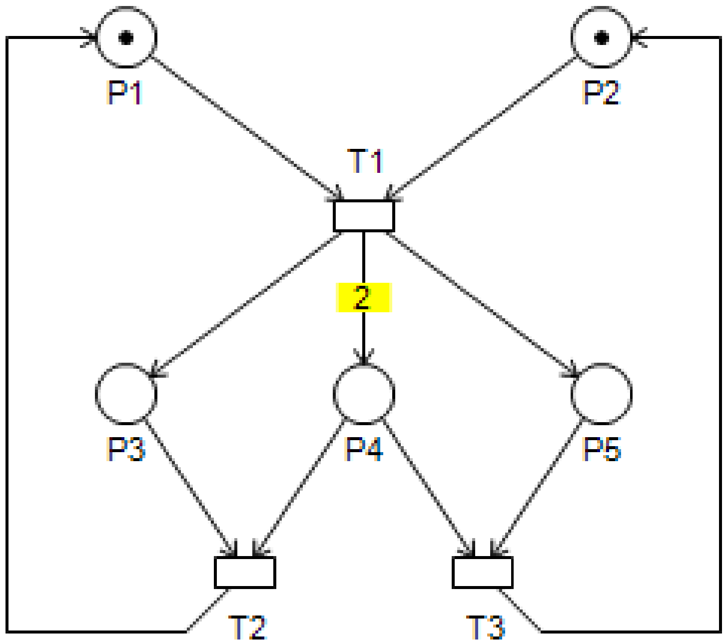
- Elérhetőségi analízis
  - Kezdőállapotfüggő dinamikus viselkedés
    - Jelölés (marking) = állapot

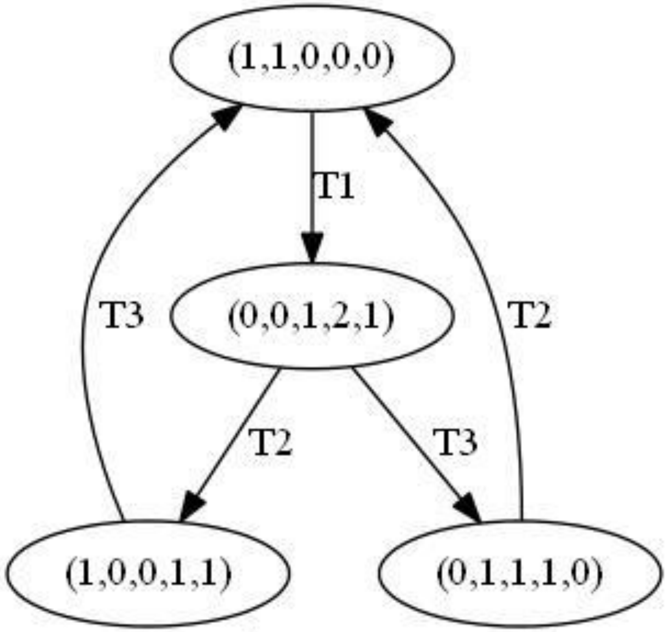
      Tokeneloszlás = állapotváltozó értéke
    - Tüzelés = állapotátmenet
    - Tüzelési sorozatok hatására M_0, M_1, …, M_n állapotsorozat
  - Állapotsorozat: trajektória az állapottérben
  - M_n állapot *elérhető* az M_0 kiinduló állapotból, ha

$$\boxed{\exists \vec{\sigma} : M_0 \left[\vec{\sigma} > M_n \right.}$$

  - Elérhetőségi gráf: állapottér grafikus képe

Példa: Elérhetőségi gráf





Egyszerű Petri-háló és elérhetőségi gráfja
(a PetriDotNet eszközből)

Elérhetőségi analízis

- Az M_0 kiinduló állapotból az N Petri hálóban
  - Elérhető állapotok

$$\boxed{R(N, M_0) = \left\{ M \mid \exists \vec{\sigma} : M_0 \left[\vec{\sigma} > M \right\} \right.}$$

Állapot alapú kérdésekre lehet ez alapján válaszolni

  - Végrehajtható tüzelési sorozatok

$$\boxed{L(N, M_0) = \left\{ \vec{\sigma} \mid \exists M : M_0 \left[\vec{\sigma} > M \right\} \right.}$$

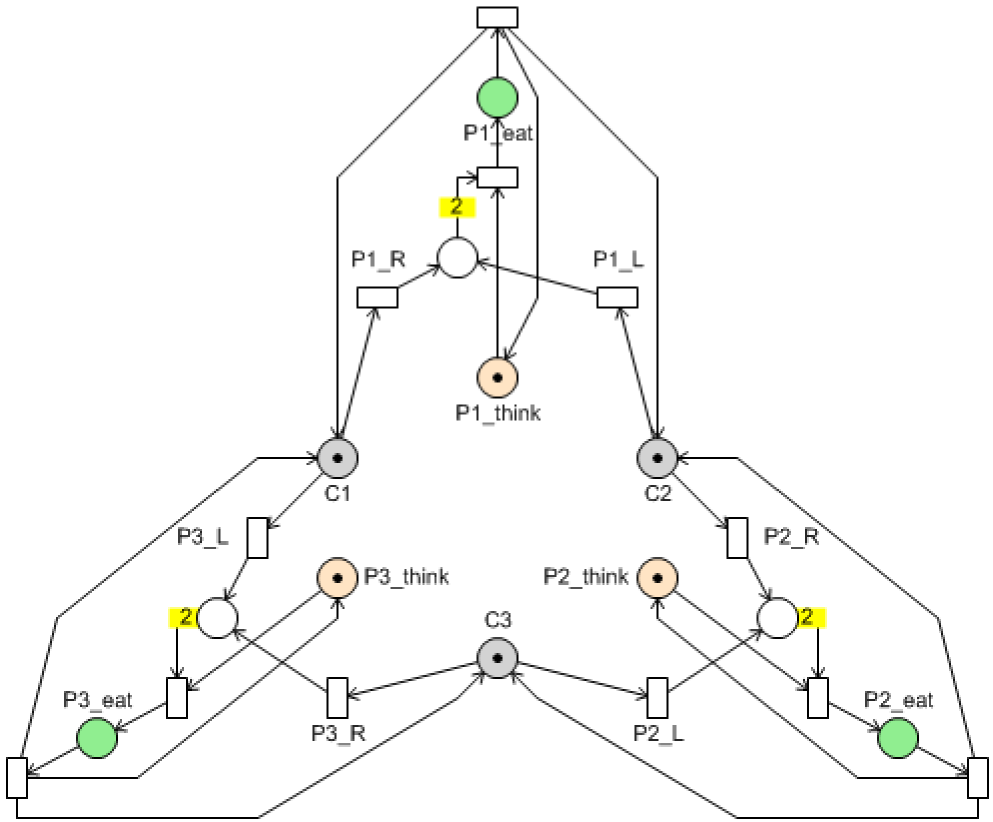
Állapotátmenet alapú kérdésekre lehet válaszolni

- Petri hálók elérhetőségi problémája:
  - M_n állapot elérhető-e valamilyen M_0 kiinduló állapotból

$$\boxed{M_n \overset{?}{\in} R(N, M_0)}$$

Modellellenőrzés Petri hálón

- Étkező filozófusok
- Egy-egy filozófusra:
  - Képes enni legalább egyszer?
  - Mindenképpen fog enni legalább egyszer?
  - Mindig biztos, hogy előbb-utóbb enni fog?
- A teljes modell
  - Holtpontmentes?



Petri hálók dinamikus (viselkedési) tulajdonságai

Dinamikus tulajdonságok

- Elérhetőséggel kapcsolatos tulajdonságok
  - Függenek a kiinduló állapottól (kezdő jelöléstől)

    (Ld.: kiinduló állapottól függetlenek a strukturális tulajdonságok!)
  - Nem csak elérhetőségi analízissel határozhatók meg
- Dinamikus tulajdonságok (áttekintés):

1. Korlátosság
2. Élőség
   - Holtpontmentesség
3. Megfordíthatóság
4. Visszatérő állapot
5. Fedhetőség
6. Perzisztencia
7. Fair tulajdonság
   - Korlátozott fairség
   - Globális fairség

1. Korlátosság

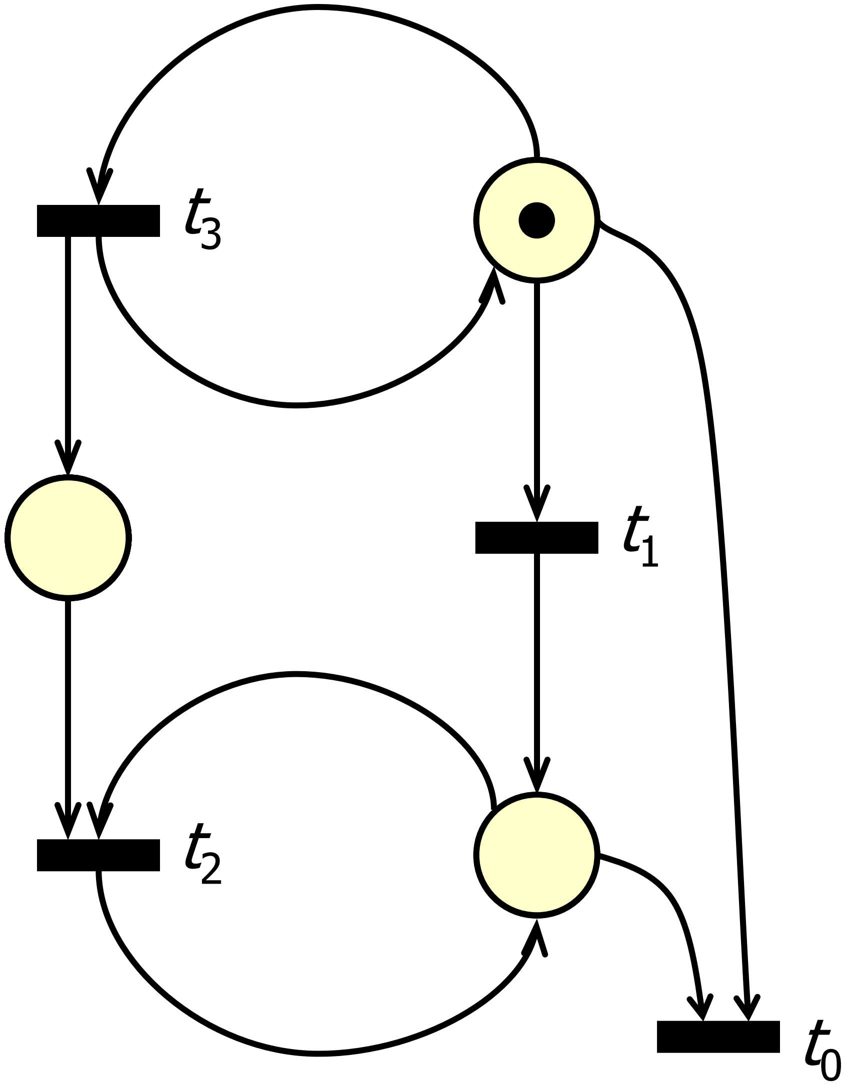
- *k*-korlátosság (korlátosság)
  - Bármely állapotban minden helyen helyenként maximum *k* token lehet (M_0 kiinduló állapot függő!)
  - Biztos Petri háló: korlátosság speciális esete ($k = 1$)
  - „Végesség” kifejezése
    - Korlátosság ⇔ véges állapottér
- Megválaszolható gyakorlati kérdések
  - A rendszerben felgyűlnek-e a feladatok?
  - Megvalósul-e az üzenetek rendszeres feldolgozása?

2. Élőség tranzíciókra

- Háló holtpont (deadlock)-mentessége
  - Minden állapotban legalább egy tranzíció tüzelhető
- Élő tulajdonság: Általánosabb ennél
  - Tranzíció egyszer/többször/végtelenszer tüzelhet-e?
  - Gyenge élő tulajdonságok egy t tranzícióra:
    - L0-élő (halott): t sohasem tüzelhető létező
    - L1-élő: t legalább egyszer tüzelhető valamely
    - L2-élő: bármely véges $k > 1$ egészre t legalább k–szor tüzelhető valamely
    - L3-élő: t végtelen sokszor tüzelhető valamely

    $\vec{\sigma} \in L(N, M_0)$ állapot-trajektóriában
  - L4-élő: t L1-élő bármely $M_n \in R(N, M_0)$ állapotból

Élő tulajdonság: példa



- t_0 tranzíció: L0-élő (halott)
- t_1 tranzíció: L1-élő
- t_2 tranzíció: L2-élő
- t_3 tranzíció: L3-élő

Az élőség Petri hálókra

- Egy (P, T, M_o) Petri háló Lx-élő
  - Ha minden $t \in T$ tranzíció Lx-élő
  - L4-től L1-ig az élő tulajdonságok tartalmazzák egymást
- Egy (P, T, M_o) Petri háló élő
  - Ha L4-élő, azaz minden $t \in T$ tranzíció L4-élő
    - L4-élő: L1-élő (azaz legalább egyszer tüzelhető valamely trajektória mentén) bármely elérhető állapotból
  - Bejárási úttól függetlenül garantáltan holtpontmentes
    - Köztes állapottól függetlenül minden tranzíció újra tüzelhető
    - Holtpontmentesség $\Leftarrow$ élőség
  - Bizonyítása költséges lehet
    - Szerencsés esetben nem (ld. majd invariánsok!)

3. Megfordíthatóság

- Megfordíthatóság
  - A kezdőállapot bármely követő állapotból elérhető

$$\boxed{\forall M \in R(N, M_0) : M_0 \in R(N, M)}$$

- Gyakorlati példák:
  - Ciklikus működésű hálózat, a kezdőállapoton keresztül
  - „Reset” jellel a kezdőállapotba vihető rendszer
  - Biztonságos kezdőállapot mindenhonnan elérhető

4. Visszatérő állapot

- Visszatérő állapot
  - Van olyan, a kezdőállapotból elérhető állapot, amely bármely őt követő állapotból elérhető

$$\boxed{\exists M_n \in R(N, M_0) : \forall M \in R(N, M_n) : M_n \in R(N, M)}$$

- Gyakorlati példák:
  - Inicializáló szekvencia után ciklikus működés
  - Inicializálás után bárhonnan elérhető biztonságos állapot

5. Fedhetőség

- Fedhetőség
  - Létrejön-e korábbi működést magában foglaló állapot?
  - M′ állapot fedi az M állapotot: $M' \in R(N, M_0) \wedge M' \geq M$
    - Fordított megfogalmazás: M állapot fedhető M' állapottal
    - $M' \geq M$ jelentése: $\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}(p)$
      - Gyenge fedhetőség esetén az azonos állapot is fed, ha elérhető
      - Erős fedhetőség: $\exists p \in P : \mathrm{m}''(p) > \mathrm{m}(p)$
- Kapcsolat az élőséggel
  - Ha μ a t tranzíciót engedélyező minimális tokeneloszlás
    - t akkor és csak akkor nem L1-élő, ha μ nem fedhető le
    - fordítva: μ lefedhetősége garantálja t L1-élő voltát (tüzelhet)

6. Perzisztencia

- Perzisztencia tranzíciókra
  - Egy tranzíció perzisztens, ha engedélyezetté válva engedélyezve is marad tüzelésig
  - Azaz nincs olyan engedélyezett tranzíció, amelynek tüzelése letiltja a tranzíció engedélyezettségét
- Perzisztencia Petri-hálókra
  - Egy (P, T, M_0) Petri háló perzisztens, ha bármely két t_1, $t_2 \in T$ tranzíciója az összes lehetséges tüzelési szekvenciában perzisztens
- Gyakorlati példák:
  - Rendszerbeli funkcionális dekompozíció megmarad-e?
  - Párhuzamos működések befolyásolják-e egymást?

7. Fair tulajdonság: korlátozott fairség

- Kétféle definíció
  - Korlátozott fairség (B-fairség)
  - Globális fairség (korlátlan fairség)

- Korlátozott fairség
  - Egy tüzelési szekvencia korlátozottan fair (B-fair)
    - ha bármely tranzíció maximum korlátos sokszor tüzelhet anélkül, hogy egy másik tranzíció tüzelne
  - Egy Petri háló korlátozottan fair (B-fair)
    - ha az összes lehetséges tüzelési szekvenciája korlátozottan fair

Fair tulajdonság: globális fairség

- Globális fairség
  - Egy tüzelési szekvencia globálisan (korlátlanul) fair, ha
    - véges, vagy
    - az összes tranzíció végtelen sokszor szerepel benne
  - Egy Petri háló globálisan (korlátlanul) fair
    - Ha a háló összes lehetséges tüzelési szekvenciája globálisan (korlátlanul) fair
- Gyakorlati példák:
  - Párhuzamos folyamatok nem tartják-e fel egymást?
  - Valamennyi folyamat végbemegy-e (előbb-utóbb)?
  - Kérés kiszolgálása előbb-utóbb megtörténik-e?

Dinamikus tulajdonságok (összefoglalás)

- Korlátosság
- Holtpontmentesség
- Élő tulajdonság
  - L0 élő (halott)
  - L1 élő (1-szer tüzelhető)
  - L2 élő (k-szor tüzelhető)
  - L3 élő (∞-szer tüzelhető)
  - L4 élő (∀ állapotban L1)
- Megfordíthatóság
- Visszatérő állapot
- Fedhetőség
  - Gyenge fedhetőség
  - Erős fedhetőség
- Perzisztencia
- Fair tulajdonság
  - Korlátozott fairség
  - Globális fairség

Állapottér reprezentációk: az elérhetőségi és fedési gráf

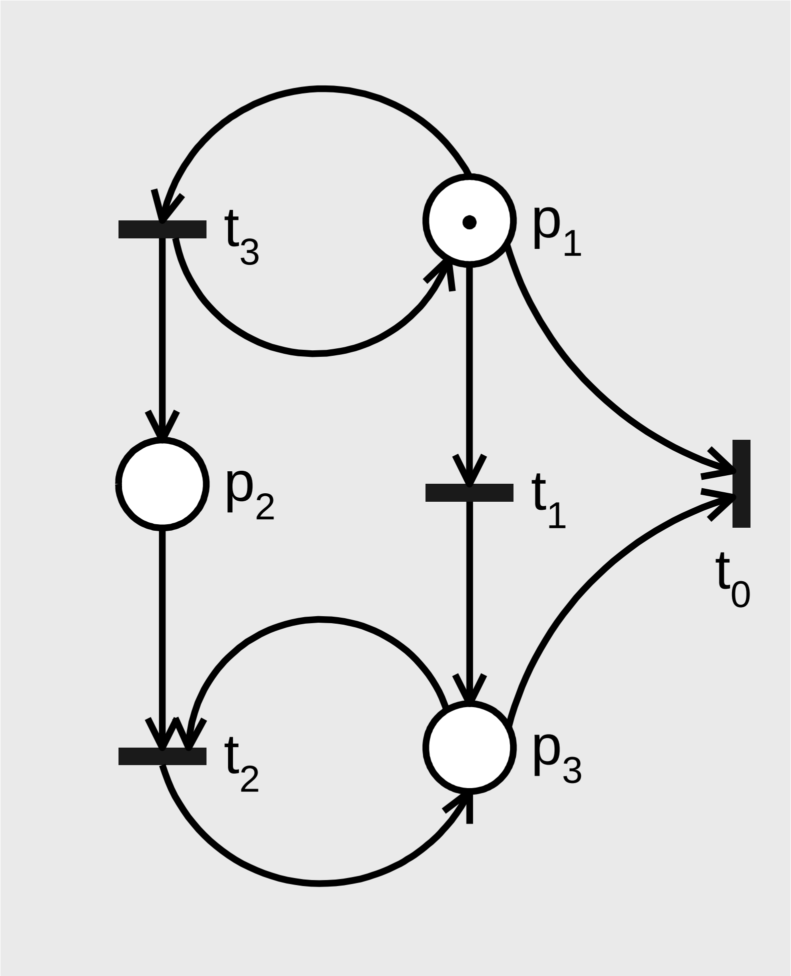
Állapottér reprezentációk: Elérhetőségi gráf

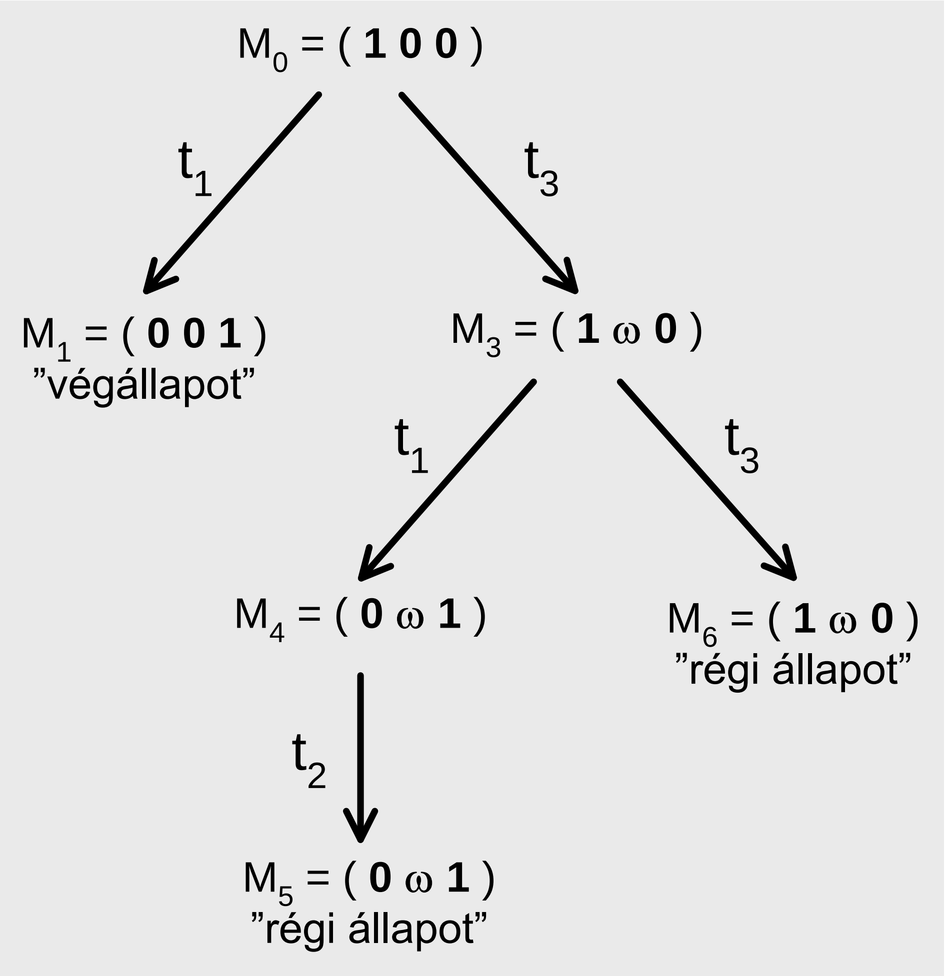
- Elérhetőségi gráf
  - M_0 kezdőállapotból induló állapotgráf
    - Csomópontok: állapotok;   címkézés: tokeneloszlások
    - Állapotátmenetek: irányított élek;   címkézés: tüzelések
    - Egy csomópont esetén legfeljebb annyi rákövetkező csomópont (kimenő él), ahány engedélyezett tranzíció
      - Kevesebb, ha prioritásos a Petri háló
    - Csomópont, amiből nem indul ki él: holtpont
  - Nem korlátos a Petri háló $\rightarrow$ végtelen sok állapot
    - Korlátosság $\Leftrightarrow$ véges állapottér
  - Vizsgálat: Szélességi típusú bejárás az állapotból a tüzelések mentén
    - Mélységi bejárás nem korlátos állapottérben rossz ötlet…

Állapottér reprezentációk: Fedési gráf

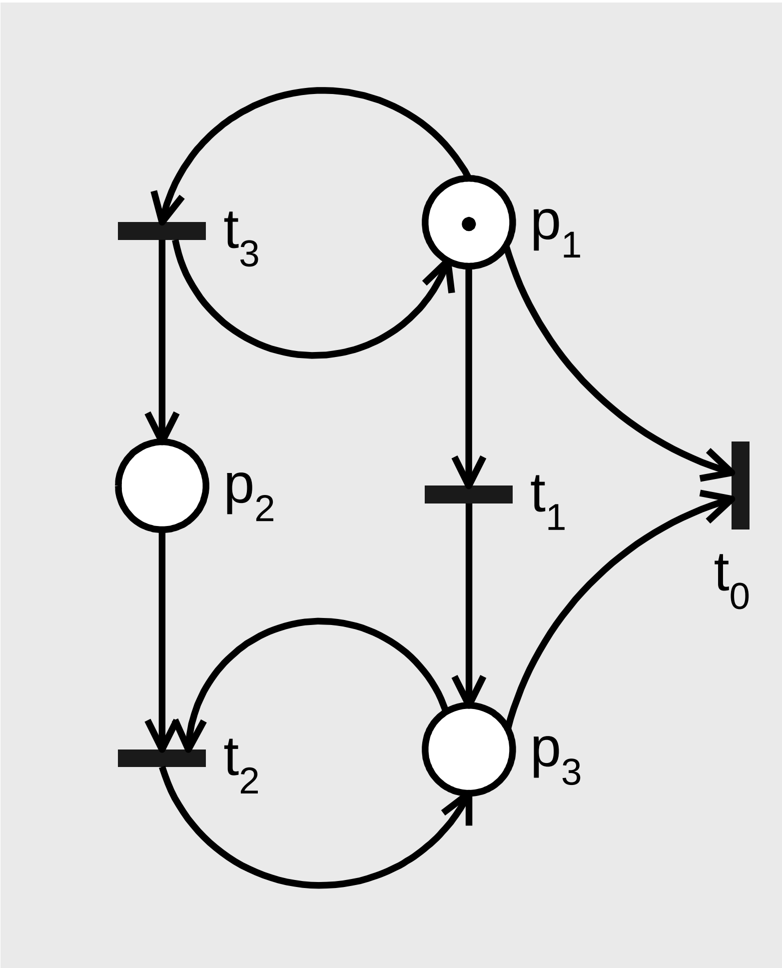
- Végtelen állapotgráf: token „túlszaporodás”
  - Hol, „milyen módon” lesz végtelen?
  - Milyen analízisre ad lehetőséget?
- Fedési gráf: végtelen állapottér esetére is
  - Hasonló felépítés: M_0 kezdőállapot, élek: tüzelések
  - Trajektória: M_0 … M''… M'
    ha itt $M'' \leq M' \rightarrow M''$ egy fedett állapot, azaz
    $\exists p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p)$ $\rightarrow$ fedett helyek (erős fedhetőség)
  - Fedett helyekre speciális szimbólum:
    ω a végtelenség kifejezője

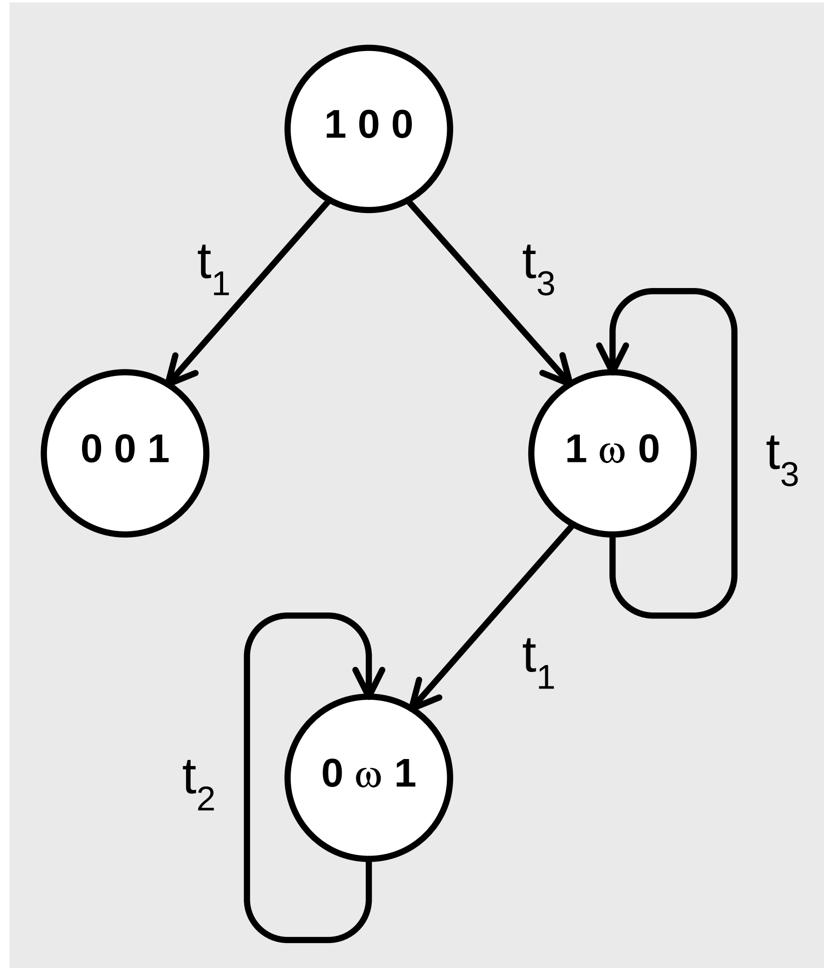
Egy példa és annak fedési fája





Egy példa és annak fedési gráfja





Petri hálók fedési fájának analízise

Közvetlenül is leolvasható tulajdonságok:

- Petri háló korlátos $\Leftrightarrow$ $R(N, M_0)$ elérhetőségi gráfja véges $\Leftrightarrow$ Fedési fában ω nem jelenik meg címkeként
- Petri háló biztonságos $\Leftrightarrow$ Csak 0 és 1 jelenik meg csomópont címkeként a fedési fában
- Petri háló egy tranzíciója halott $\Leftrightarrow$ tranzícióhoz tartozó tüzelés nem jelenik meg élcímkeként a fedési fában

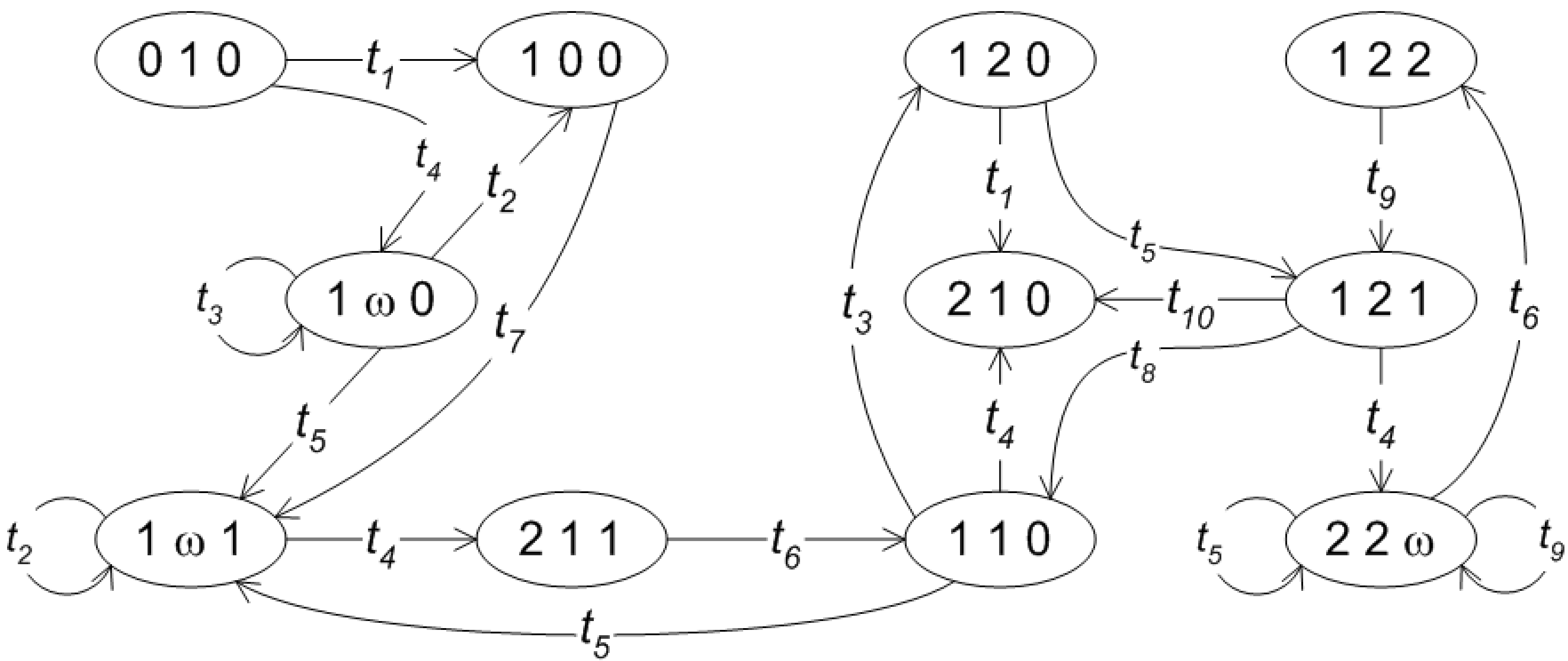
Dinamikus tulajdonságok analízis eszközökben

• Korlátosság:	Boundedness
• Élő (L4-élő) tulajdonság:	Liveness
• Holtpont:	Deadlock
• Visszatérő állapot:	Home state
• Elérhetőségi gráf:	Reachability graph
• Fedési gráf:	Coverability graph
• Tüzelési invariánsok:	T-invariants
• Hely invariánsok:	P-invariants

Dinamikus tulajdonságok vizsgálata az állapotérben

Tipikus feladat

Az ábra egy Petri háló állapotterét mutatja be fedési gráf alakban. A hálóban 10 darab tranzíció található, amelyeket t_1, ..., t_{10} címkékkel jelölünk. Az állapotokat a token eloszlás vektorral címkéztük meg, tehát 0 1 0 jelentése: $m(p_1) = 0$, $m(p_2) = 1$ és $m(p_3) = 0$.



Tipikus kérdések

1. A Petri háló élő?
2. A háló (deadlock) holtpontmentes?
3. t_6 tranzíció L_3-élő?
4. t_7 tranzíció L_2-élő?
5. A (2 2 1) állapot fedhető?
6. A (2 1 0) állapot fedhető?
7. A háló perzisztens?
8. A háló korlátos?
9. A háló megfordítható?
10. A hálóban létezik visszatérő állapot?
11. t_4 és t_6 tranzíció korlátos fair tulajdonságú?
12. t_5 és t_8 tranzíció korlátos fair tulajdonságú?
13. Létezik P-invariáns?
14. Létezik T-invariáns?

Élőség vizsgálata az állapottérben

- Ellenpéldát találni (szinte mindig) a leggyorsabb és legegyszerűbb megoldás!
- Élőség:
  - L_4-élőség
    - végig kell nézni, hogy mindig tüzelhetővé válik-e?
    - minden állapotból teljesülnie kell!
  - L_3-élőség (és a többi)
    - elég egy trajektóriát találni, ahol teljesül!
  - A háló akkor élő, ha minden tranzíciója élő!
    - ha találunk akár egy tranzíció esetében ellenpéldát $\rightarrow$ nem élő
  - Ha holtpontmentes, akkor még nem biztos, hogy élő is!

Korlátosság vizsgálata az állapottérben

- Korlátosság:
  - Lásd a fedési gráfnál tanultakat!
    - „Petri háló korlátos ⇔ $R(N, M_0)$ elérhetőségi gráfja véges ⇔ fedési fában ω nem jelenik meg állapot címkében”
  - Biztosság:
    - „Petri háló biztos ⇔ csak 0 és 1 jelenik meg állapot címkében a fedési fában”

További dinamikus tulajdonságok

- Megfordíthatóság:
  - Az elérhetőségi gráf egyetlen erősen összekötött komponens?
- Visszatérő állapot:
  - Van az elérhetőségi gráfban erősen összekötött komponens?
  - Az adott állapot része ennek?
- Fairség:
  - „Az egyik tranzíció korlátos sokszor tüzelhet, mielőtt a másik tüzelne”
  - Van-e olyan ciklus, amiben az egyik tranzíció benne van és a másik nincs?
    - →van: ellenpélda, hiszen létezik tüzelési szekvencia, amiben korlátlan sokszor tüzel
- Perzisztencia:
  - „A tranzíció mindaddig engedélyezett marad, amíg nem tüzel”
    - → ha több engedélyezett és nem ő tüzelt, akkor a következő állapotban is engedélyezett marad
    - → ha engedélyezett maradt, akkor meg is jelenik élcímkeként (prioritás?)

Dinamikus tulajdonságok analízis eszközökben

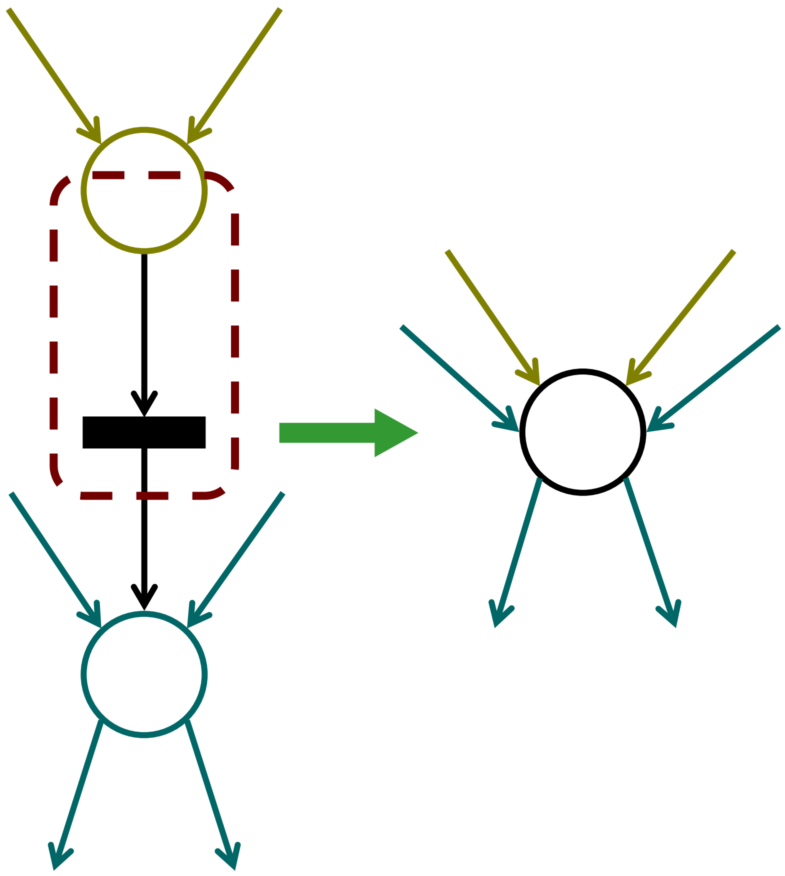
• Korlátosság:	Boundedness
• Élő (L_4-élő) tulajdonság:	Liveness
• Holtpont felderítése:	Deadlock
• Visszatérő állapotok:	Home States
• Fedési gráf:	Coverability Graph
• Hely invariánsok:	P-invariants
• Tüzelési invariánsok:	T-invariants

Petri hálók redukciós módszerei:
A struktúra redukciója

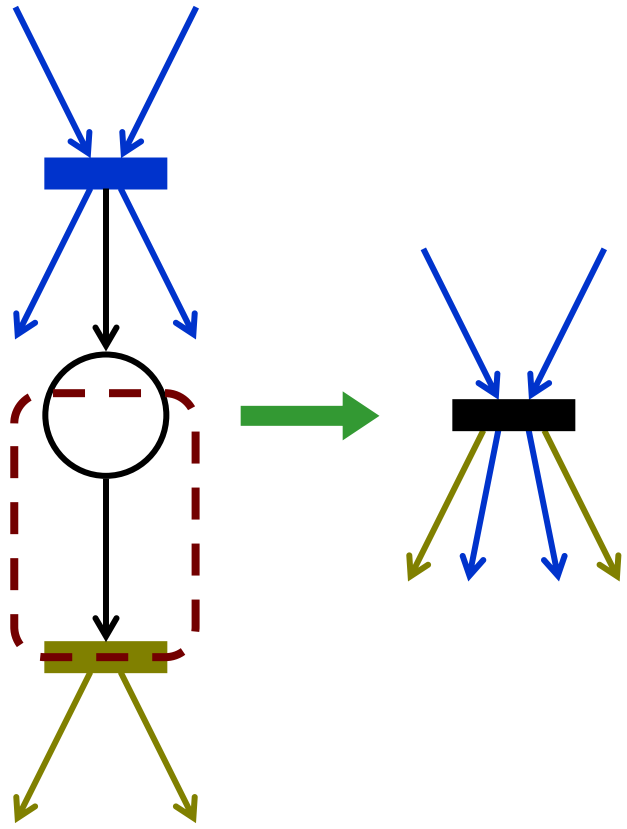
Transzformációk

- Egyszerű tulajdonságmegőrző transzformációk:
  - soros helyek összevonása
  - soros tranzíciók összevonása
  - párhuzamos helyek összevonása
  - párhuzamos tranzíciók összevonása
  - önhurkot alkotó helyek törlése
  - önhurkot alkotó tranzíciók törlése
- Megőrzik az élő, korlátos és biztos tulajdonságot

Soros összevonások

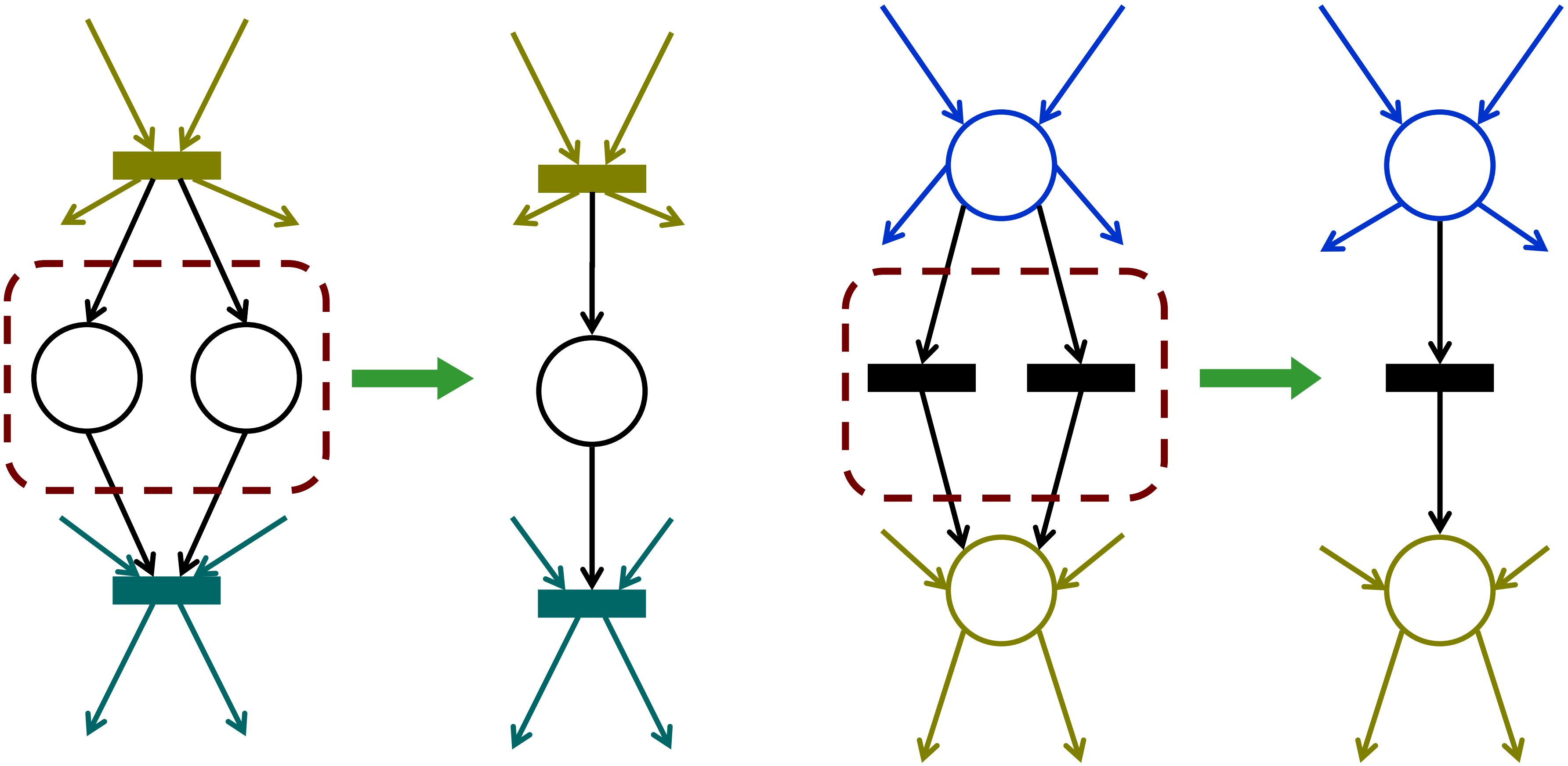


soros helyek összevonása (FSP)



soros tranzíciók összevonása (FST)

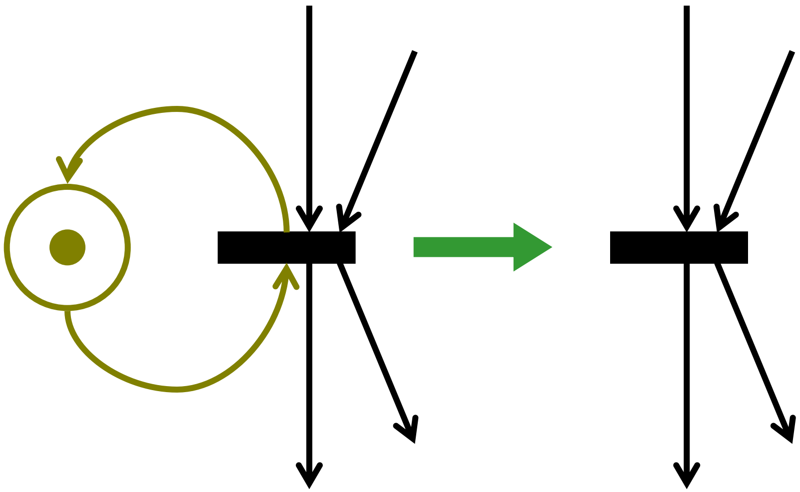
Párhuzamos összevonások



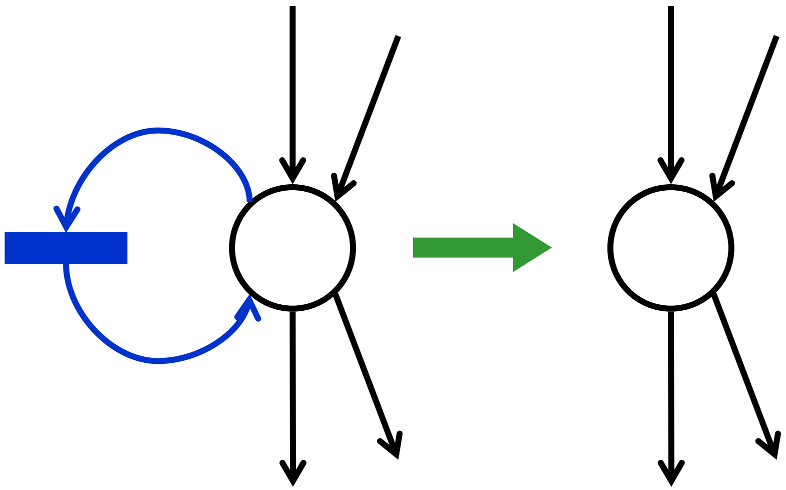
párhuzamos helyek összevonása (FPP)

párhuzamos tranzíciók összevonása (FPT)

Önhurkok törlése

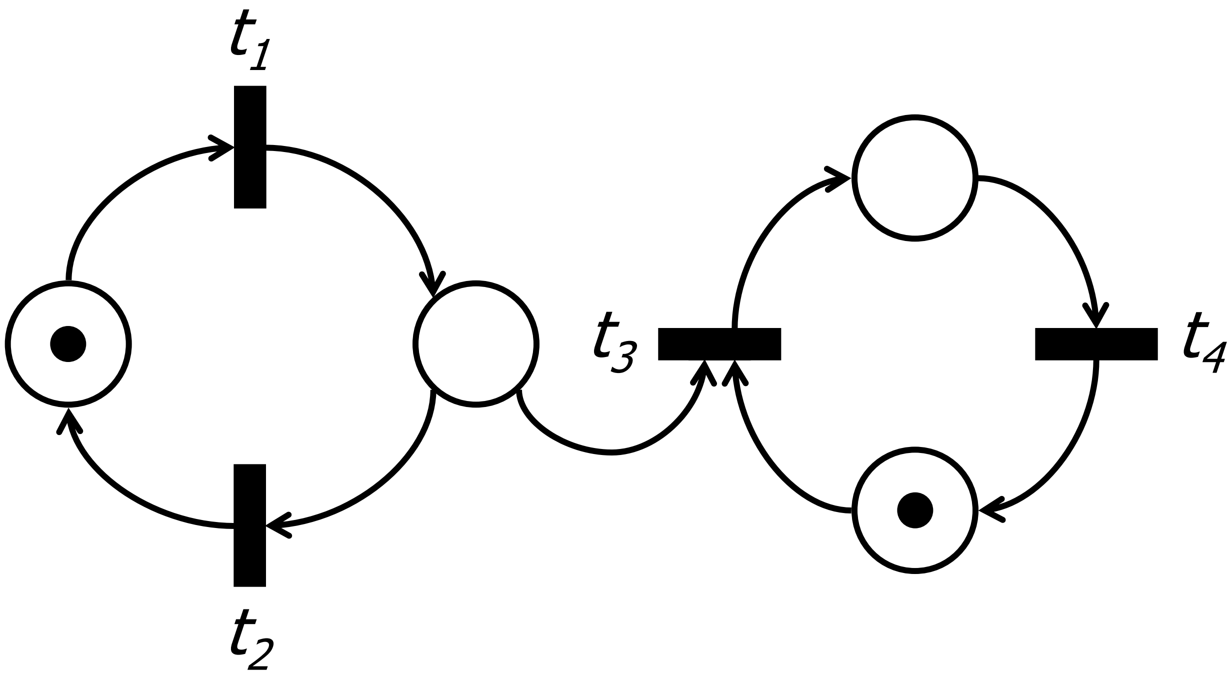


önhurkot alkotó helyek törlése (ESP)



önhurkot alkotó tranzíciók törlése (EST)

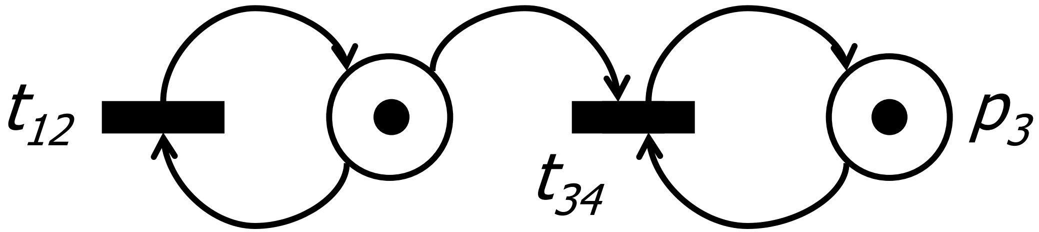
Példa: 1. lépés



t_1 tüzelése után:

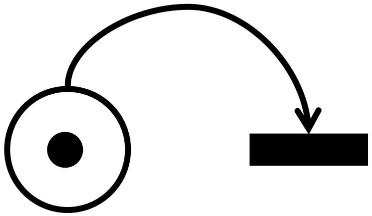
- t_1 és t_2 összevonása (soros tranzíciók) $\rightarrow$ t_{12}
- t_3 és t_4 összevonása (soros tranzíciók) $\rightarrow$ t_{34}

Példa: 2. lépés



- t_{12} törlése (önhurkot alkotó tranzíció)
- p_3 törlése (önhurkot alkotó hely)

Példa: eredmény



A példa korlátos, de nem élő (és nem megfordítható)

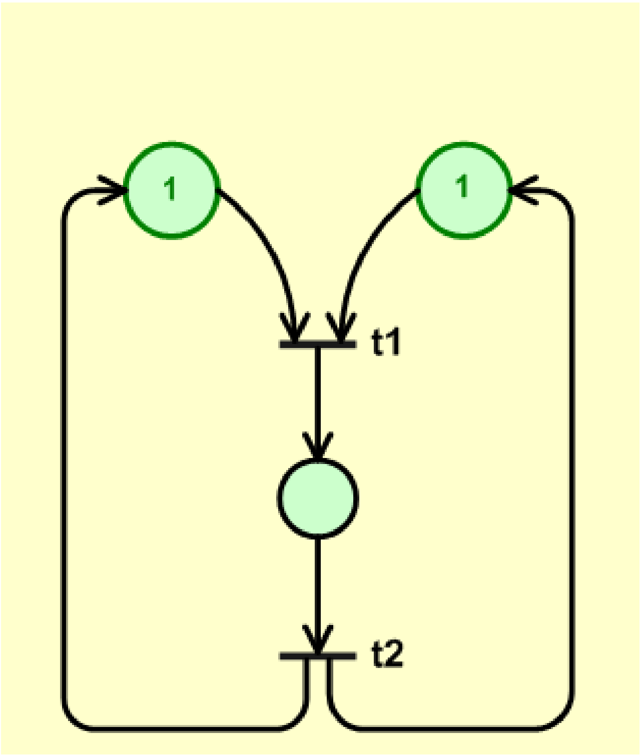
Petri-hálók strukturális tulajdonságai: Invariánsok

Tüzelési invariáns (T-invariáns)

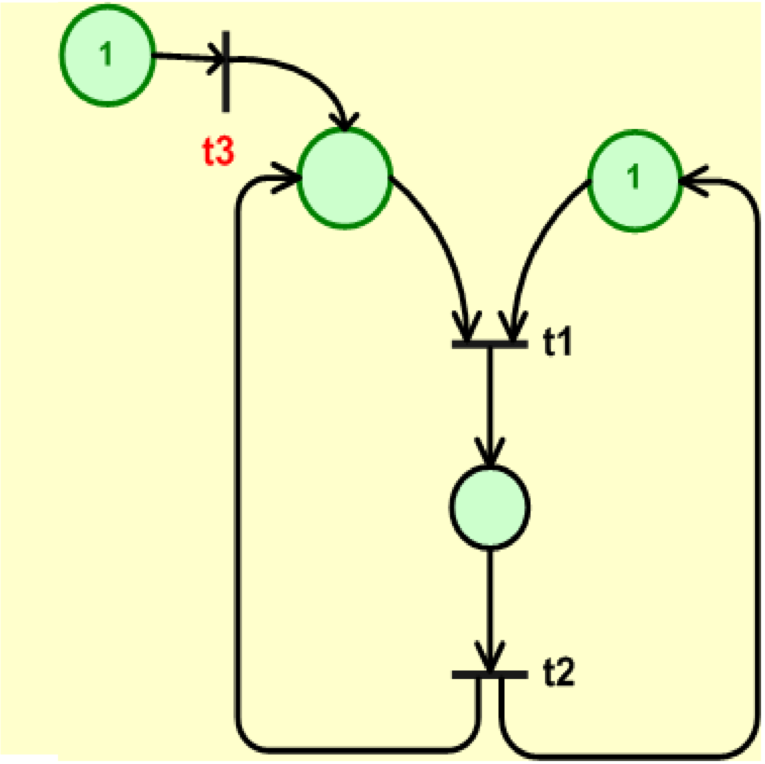
- A σ tüzelési szekvencia T-invaráns, ha végrehajtása nem változtatja meg a tokeneloszlást
  - Ciklus az állapottérben: $M_i[\vec{\sigma} > M_i$
    - ha σ szekvencia az M_i állapotból végrehajtható!
  - Megjegyzés: bármely σ tüzelési szekvenciához található olyan M_0 kezdőállapot, amelyből σ végrehajtható
    - Pl. $M_0 \geq \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}} \vec{\sigma}$ esetén induláskor annyira „teletömött”, hogy a σ tüzelési szekvencia által termelt tokenekre már nincs szükség!

Példa T-invariánsra

T-invariáns:
$t_1 - t_2$ után a tokeneloszlás ugyanez



Nem T-invariáns:
$t_3 - t_1 - t_2$ tüzelési szekvencia nem ismételhető



T-invariánsok halmaza

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0}$$

Homogén, lineáris egyenletrendszer megoldása adja a tüzelő tranzíciókat (σ_T tüzelési számokat)

- Egy megoldás többszöröse is megoldás
  - ha tüzelhető, akkor többször is befutja a ciklust
- Megoldások összege is megoldás
  - ha tüzelhető, akkor több ciklus kombinációját futja be
- Megoldások lineáris kombinációi is megoldások

Bázis kereshető

- Az összes megoldást előállító minimális halmaz

Hely invariáns (P-invariáns)

A μ_P súlyvektor által kijelölt helyeken a tokenek súlyozott összege nem változik:

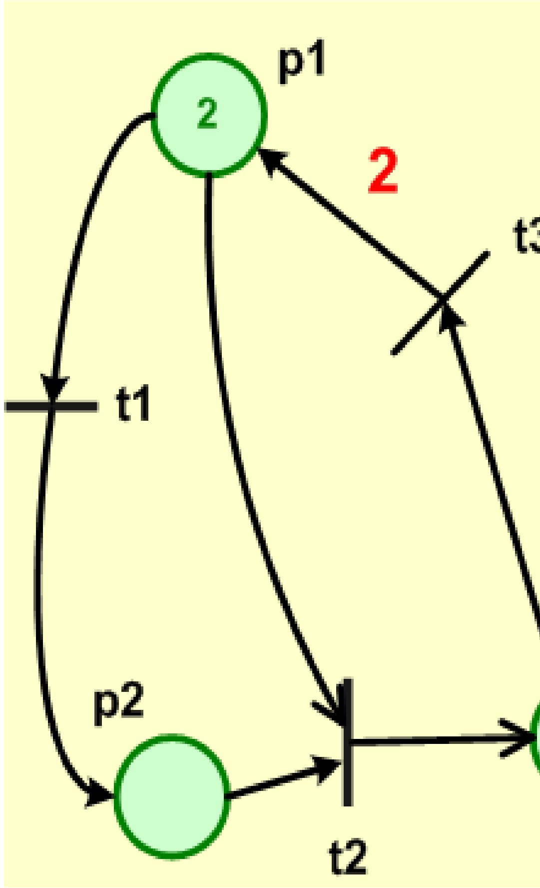
$$\boxed{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \text{állandó}}$$

– A tokenek (egy része) a helyek egy részhalmazában kering (pl. erőforrások nem fogynak, nem keletkeznek)

$$\boxed{\mathbf{W}\vec{\mu}_P = 0}$$

Példa P-invariánsra

P-invariáns p_1, p_2, p_3-ra:

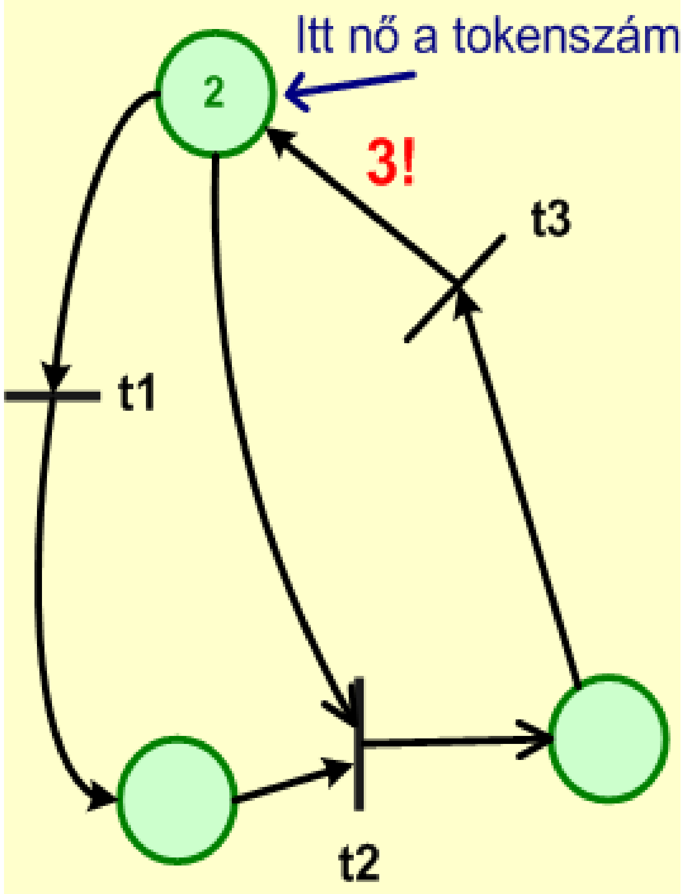


p_1	p_2	p_3
2	0	0
1	1	0
0	0	1

Súlyozva:

$p_1+p_2+2*p_3=\text{áll}$

NEM P-invariáns:



Invariánsok alkalmazásai

- T-invariánsok alkalmazásai
  - Folyamat modellje: Ciklikusság
  - Dinamikus tulajdonságok
    - Ciklikusan tüzelhető $\rightarrow$ megfordíthatóság, visszatérő állapot
    - Később is tüzelhető $\rightarrow$ élő tulajdonság, holtpontmentesség
- P-invariánsok alkalmazásai
  - Folyamatok modellje: Erőforrások használata
  - Dinamikus tulajdonságok
    - Token nem vész el $\rightarrow$ élő tulajdonság, holtpontmentesség
    - Token nem termelődik $\rightarrow$ korlátosság