



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Rendszermodellezés segédlet

Teljesítménymodellezés

Készítette:
Molnár Vince

2013.

1. Alapfogalmak

Teljesítménymodellezéskor egy *rendszert* vizsgálunk, amely *felhasználói kérések* kiszolgálásához illetve feldolgozásához különböző (véges) *erőforrásokat* használ. Vizsgálatunk fókuszában az egyes tranzakciók feldolgozási ideje (*válaszidő*), az egységnyi idő alatt feldolgozott tranzakciók száma (*átbocsátás*), illetve az erőforrások *kihasználtsága*, mindez a rendszer *egyensúlyi állapotában*, tehát *átlagos* értékeket mérve.

Egy rendszert sokszor alrendszerek együtteseként modellezünk (ilyen alrendszernek tekinthetők az erőforrások is), ilyenkor az egyes fogalmak több szinten is megjelenhetnek. A továbbiakban a teljes rendszer felé érkező felhasználói kéréseket *tranzakcióknak* fogjuk hívni (darabszámának mértékegysége tr), az ezek feldolgozása során a rendszer által az alrendszereknek továbbított feladatrészeket pedig *kéréseknek* (darabszámának mértékegysége k). Fontos megjegyezni, hogy valójában ugyanarról a fogalomról van szó, de *más rendszerekre nézve*.¹

Általában is fontos, hogy mindig pontosan definiáljuk az éppen vizsgált rendszert. A továbbiakban bemutatásra kerülő képletek szempontjából is fontos a *rendszer határa*. Egy rendszeren belül lehet várakozási sor, illetve feldolgozó egység, utóbbi állhat több alrendszerből is.² Ha egy rendszerben nincs átlapolódás, akkor minden pillanatban (tehát átlagosan is) legfeljebb egy tranzakció lehet a rendszerben. Ha van várakozási sor, vagy több feldolgozó egység is van, akkor definíció szerint van átlapolódás is.

2. Rendszerszintű tulajdonságok és a Little-törvény

Fogalmak:

- **Érkezési ráta** (jele: λ): A vizsgált rendszer határához egységnyi idő alatt *érkező* felhasználói kérések átlagos száma.³ Mértékegysége: db/s.
- **Átbocsátás** (jele: X , mint „throughput”): A vizsgált rendszert egységnyi idő alatt *elhagyó* feldolgozott felhasználói kérések átlagos száma. Mértékegysége: db/s.
- **Válaszidő** (jele: R , mint „Round-trip time”): A felhasználói kérések által a rendszer határain belül töltött átlagos idő. Mértékegysége: s.
- **Rendszerben lévő kérések átlagos száma** (jele: N): Nevezhetnénk az átlapolódás mértékének is. Mértékegység: db.

Azt mondjuk, hogy egy rendszer *egyensúlyi állapotban* van, ha $\lambda = X$, vagyis egységnyi idő alatt ugyanannyi új felhasználói kérés érkezik a rendszerbe, mint amennyit ezalatt az idő alatt feldolgozott. Egyensúlyi állapotban igaz a *Little-törvény*:

$$N = X \times R$$

Szavakkal, a rendszerben tartózkodó kérések átlagos száma megegyezik az átbocsátás és az átlagos rendszerben töltött idő szorzatával. A rendszert például egy futószalagként elképzelve ez azt jelenti, hogy ha a szalagon R ideig tart végighaladni, de $1/X = 1/\lambda$ időnként ráteszünk egy-egy újabb elemet, akkor R idő múlva az első elem levételének pillanatában $R/(1/X) = R \times X$ elem lesz a szalagon, vagyis a rendszer határain belül.

¹Ezért sem tesz különbséget a fogalmak között a tárgyhoz kiadott diasor.

²A rendszer részének tekinthetjük még a hálózati kapcsolatot, és bármi mást, ami késleltetést okozhat, de ettől ebben a segédletben most eltekintünk.

³A felhasználói kérés itt lehet tranzakció vagy kérés is, attól függ, honnan nézzük. Ennek megfelelően a darab, mint mértékegység is specializálандó az adott esetnek megfelelően.

3. Erőforrások tulajdonságai

A rendszer tulajdonságai elsősorban a belső szerkezetétől, az alrendszerektől és főképp az erőforrásoktól függ. A rendszerszintű teljesítményjellemzőket ezek tulajdonságaiból kell levezetni. A továbbiakban nullás index jelöli a rendszerszintű tulajdonságokat, míg az i . alrendszer (erőforrás) tulajdonságait i -vel indexeljük.

3.1. Rendszerek és alrendszereik kapcsolata

Az egyes alrendszerek és erőforrások teljesítményjellemzőit a következő mértéket felhasználva tudjuk átváltani a rendszer jellemzőire, illetve fordítva:

- **Látogatások átlagos száma** (jele: V_i , mint „visits”): Megadja, hogy egy tranzakció átlagosan hány kérést generál az i . alrendszer (erőforrás) felé. Mértékegysége: k/tr (kérés/tranzakció).

3.2. Felhasználói kérések szolgáltatásigénye

Egy tranzakció „terhelését” a rendszerre nézve a *szolgáltatásigény* fogalmával ragadjuk meg. A szolgáltatásigény az az átlagos időtartam, amíg a tranzakció feldolgozása közben a rendszer egy adott erőforrást használ (az egyes kérések során összesen), tehát minden erőforráshoz külön érték tartozik. Az alábbiakban feltételezzük, hogy az alrendszerek erőforrások.⁴

- **Szolgáltatásigény** (jele: D_i , mint „service Demand”): Megadja, hogy egy *tranzakció* átlagosan mennyi ideig használja az adott erőforrást (alrendszert). Mértékegysége: s/tr.
- **Erőforrásigény** (jele: S_i , mint „reSource demand”): Megadja, hogy egy *kérés* átlagosan mennyi ideig használja az adott erőforrást (alrendszert). Mértékegysége: s/k.

Látható, hogy a két fogalom gyakorlatilag ugyanazt takarja, de az egyik a rendszer szintjén, a másik pedig az erőforrás (alrendszer) szintjén.⁵ A két mennyiség közötti kapcsolatot a látogatások átlagos számának (V_i) segítségével a következő képlet adja meg:

$$D_i = V_i \times S_i$$

Látható, hogy itt sem történik semmi meglepő – ha egy kérés átlagosan S_i ideig foglalja az erőforrást, egy tranzakció pedig átlagosan V_i kérést generál, akkor a tranzakció átlagosan D_i ideig fogja használni az erőforrást, tehát az erőforrásra vonatkozó szolgáltatásigénye D_i .

3.3. Erőforrások kihasználtsága

Véges készletű erőforrások esetén a teljesítmény szempontjából fontos tulajdonság az erőforrások átlagos *kihasználtsága* (jele: U , mint „Utility”), ugyanis ez mutatja meg, hogy a globális teljesítménykorlátoktól nagyjából milyen távol működik a rendszer.

Vegyük észre, hogy az erőforrás, mint alrendszer önmagában is egy rendszert alkot, ezért a 2. szakaszban leírtak itt is alkalmazhatók. A felhasználói kérés ekkor a tranzakció

⁴Ez bizonyos szempontból csak formáság, annyi a jelentősége, hogy erőforrás szint alatt nem foglalkozunk a további alrendszerekkel, itt húzzuk meg vizsgálódásaink határát.

⁵Az elnevezés is csak azért különbözik, hogy külön tudjunk hivatkozni a két értékre, az „Erőforrásigény” név pedig kihasználja, hogy most csak az erőforrásokat tekintjük alrendszereknek.

által generált kérés, a kérés által a rendszerben töltött átlagos idő (R) pedig az erőforrásigénynek (S_i) felel meg. Az erőforrás, mint alrendszer átbocsátását az ún. *forced flow* törvény segítségével számíthatjuk ki a teljes rendszer átbocsátásából:⁶

$$X_i = V_i \times X_0$$

Ezzel felírva a Little-törvényt, az alábbi képletet kapjuk:

$$N_i = S_i \times X_i$$

Az N érték tehát szokás szerint megadja, hogy átlagosan hány kérés tartózkodik a rendszerben, ez esetben az erőforráson belül. Az egyes erőforrásokból több példány is rendelkezésre állhat, ezeken belül feltételezzük, hogy nincs átlapolódás. Az erőforrás tehát egyszerre legfeljebb n_i kérést képes kiszolgálni, ahol n_i az i . erőforrásból elérhető példányok száma. Ha az i . erőforrásban, mint rendszerben átlagosan N_i kérés tartózkodik, és ez kevesebb, mint a maximális n_i , akkor a rendszer nem használja ki az erőforrást. Gyakorlatilag ezzel definiáltuk is a kihasználtság fogalmát, amire a *kihasználtság törvénye* ad képletet:

$$U_i = \frac{N_i}{n_i} = \frac{S_i \times X_i}{n_i}$$

Az is látható, hogy két darabszámot osztunk el egymással, tehát az eredmény dimenzió nélküli, százalékban kifejezhető arányszám. $n = 1$ esetben N értéke közvetlenül megadja a kihasználtság értékét:

$$U_i = S_i \times X_i$$

Ilyenkor a kihasználtság úgy is értelmezhető, mint az egységnyi időnek azon hányada, amelyben átlagosan az erőforrás munkát végez. Ez az értelmezés bizonyos szempontból analóg a fizikából ismert hatásfok fogalmával, az erőforrás a vizsgált 1s időben X_i alkalommal S_i ideig hasznos munkát végzett, ez összesen $S_i \times X_i$ idő hasznos munkát jelent, ami tehát $\frac{S_i \times X_i}{1s} = U$ hatásfokot, itt *kihasználtságot* jelent. Több erőforrás példány esetén is hasonló a helyzet, de ilyenkor az egységnyi időt mindegyik példányhoz fel kell számolni.

3.4. Az átbocsátóképeség és a szűk keresztmetszet

Az imént láttuk, hogy az erőforráskészlet felső határt szab az elvégezhető munka mennyiségének, ezáltal az egységnyi idő alatt kiszolgálható kéréseknek, vagyis az átbocsátásnak. Ezt a felső határt hívjuk *átbocsátóképeségnek*.

Meghatározásához az egyes erőforrásokból kell kiindulnunk. Feltételezzük, hogy az erőforrásokat maximálisan kihasználjuk, vagyis $U_i^{max} = 1$. A kihasználtság képletéből az átlagos erőforrásigény (S_i) ismeretében kiszámolhatjuk az adott erőforrás átbocsátóképeségét:

$$X_i^{max} = n_i \times \frac{U_i^{max}}{S_i} = n_i \times \frac{1}{S_i}$$

$n_i = 1$ esetben ismét egyszerűbben:

$$X_i^{max} = \frac{U_i^{max}}{S_i} = \frac{1}{S_i}$$

⁶Figyelem! A mértékegység az alrendszerek átbocsátása esetén k/s, a teljes rendszer esetén pedig tr/s!

Következő lépésként ki kellene számolnunk a teljes rendszer átbocsátását, de míg a teljes rendszerből az erőforrásra következtetni a többi erőforrástól függetlenül is tudunk a 3.3 szakaszban, visszafelé ez most nem lesz igaz. Az egyes erőforrásokat a teljes rendszer ugyanis különböző mértékben használja, így csak az egyikük (esetleg néhányuk, nagyon ritkán mindegyik) korlátozza ténylegesen a rendszer tényleges átbocsátóképességét. Ezt az erőforrást nevezzük *szűk keresztmetszetnek*.

Ki kell tehát számolnunk az egyes erőforrások átbocsátásából a rendszer átbocsátásának elméleti maximumát, majd az így kapott értékek legkisebbikét kell kiválasztanunk, ez lesz a rendszer átbocsátóképessége, az értékhez tartozó erőforrás(ok) pedig a rendszer szűk keresztmetszete(i):

$$X_0^{max} = \min_i \left(\frac{X_i^{max}}{V_i} \right)$$

Az átbocsátóképességgel felírva a Little-törvényt megkaphatjuk N_{max} -ot, vagyis az átlapolódás maximális mértékét a rendszerben. Abban a speciális esetben, amikor tudjuk, hogy a rendszer (erőforrás) mindig rendelkezésre áll, és nincs benne átlapolódás, vagyis $N_{max} = 1tr$, az átbocsátóképesség (de nem az átbocsátás!) és a rendszer átlagos válaszideje között fordított arányosság áll fenn:⁷

$$X_0^{max} = \frac{1tr}{R}$$

3.5. A szolgáltatásigény törvénye

Az eddigiekből levezethető még egy összefüggés, ami sokszor jól használható. A *szolgáltatásigény törvénye* egy adott erőforrásra vonatkozó szolgáltatásigény meghatározását teszi lehetővé az erőforrás kihasználtsága és a rendszer átbocsátóképessége segítségével, egyetlen erőforráspéldány ($n_i = 1$) esetén:

$$D_i = \frac{U_i}{X_0}$$

A levezetés a forced flow törvény és a kihasználtság törvényének $n_i = 1$ feltétel melletti egyszerűbb alakja szerint:

$$\underbrace{D_i = V_i \times S_i}_{\text{Szolgáltatásigény def.}} = \underbrace{\frac{X_i}{X_0}}_{\text{Forced flow tv.}} \times \underbrace{\frac{U_i}{X_i}}_{\text{Kihasználtság tv.}} = \frac{U_i}{X_0}$$

A szolgáltatásigény törvénye lényegében a kihasználtság törvényének olyan átalakítása, hogy az erőforrás-szintű tulajdonságok helyett rendszerszintű tulajdonságokkal számoljon. Az alábbi levezetés ezt az elvet mutatja be, itt lényegében a V_i váltószám segítségével mindkét oldalon áttérünk az erőforrás szintjéről a rendszer szintjére:

$$U_i = \frac{S_i \times X_i}{n_i}$$

$$S_i = n_i \times \frac{U_i}{X_i}$$

$$\underbrace{V_i \times S_i}_{D_i} = n_i \times \underbrace{V_i \times \frac{1}{X_i}}_{\frac{1}{X_0}} \times U_i$$

⁷Lényegében ugyanez az összefüggés jelenik meg az erőforrás átbocsátóképességének meghatározásakor $R = S_i \times 1k$ választással.

$$D_i = n_i \times \frac{U_i}{X_0}$$

Itt is jól látható, hogy a törvény eredeti formája az $n_i = 1$ esetre érvényes, minden más esetben megjelenik egy n_i -s szorzó is. A kihasználtság törvényénél látott személtető magyarázat ismét alkalmazható: Ha egy tranzakció D_i ideig használja az adott erőforrást, és egy egységnyi idő alatt X_0 ilyen tranzakció történik, akkor az erőforrás az egységnyi idő $\frac{D_i \times X_0}{1s}$ részéig volt foglalt.

4. Átlagos mértékek számítása mérési eredményekből

A fenti értékeket jellemzően mérések vagy szimulációk eredményeképp kapjuk. Ilyen mérések során a rendszert állandósult egyensúlyi állapotban vizsgáljuk, amikor tehát $\lambda = X_0$. Ilyenkor az alábbi fogalmak jelennek meg, ezek segítségével tudjuk kiszámolni a rendszer és az erőforrások tulajdonságait:

- **Mérési idő** (jele: T , mint „Time”). Mértékegysége: s.
- **Tranzakciók száma** (jele: C_0 , mint „Count”): A mérési idő alatt elvégzett tranzakciók száma. C_i -vel jelölhetjük az egyes alrendszerekre vonatkozó értékeket, ha ez szükséges. Mértékegysége: tr (vagy alrendszerek esetén k).
- **Foglaltsági idő** (jele: B_i , mint „Busy time”): Az egyes erőforrások foglaltsági ideje a mért időtartamon belül. Mértékegysége: s.

Ezekből a fogalmakból könnyedén kiszámítható például egy egypéldányos, átlapolódás nélküli erőforrás ($n_i = 1$) átlagos kihasználtsága a mérés ideje alatt, csupán a foglaltsági idő és a mért idő arányát kell kiszámítanunk:

$$U_i = \frac{B_i}{T}$$

A mérés ideje alatt az átlagos átbocsátás (és a rendszer egyensúlya miatt az érkezési ráta is) megkapható a mérési időből és az elvégzett tranzakciók számából:⁸

$$X_0 = \frac{C_0}{T}$$

A tranzakciók átlagos szolgáltatásigénye is megkapható az egyes erőforrásokhoz, ha a foglaltsági időket leosztjuk a tranzakciók számával:

$$D_i = \frac{B_i}{C_0}$$

Érdekességképp megjegyezzük⁹, hogy a szolgáltatásigény törvénye ($n_i = 1$ esetre) akár ebből a három összefüggésből is levezethető:

$$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{B_i}{\frac{C_0}{X_0}} = \frac{B_i}{C_0} \times X_0 = D_i \times X_0$$

⁸Értelemszerűen az egyes alrendszerek vizsgálata esetén az i index használandó a 0 helyett.

⁹Mivel szerepel a tárgyhoz kiadott előadásfóliákon is, bár a $V_i = 1$ implicit feltételezéssel az erőforrásigényre felírva.