Kísérlettervezés alapfogalmak

Rendszermodellezés

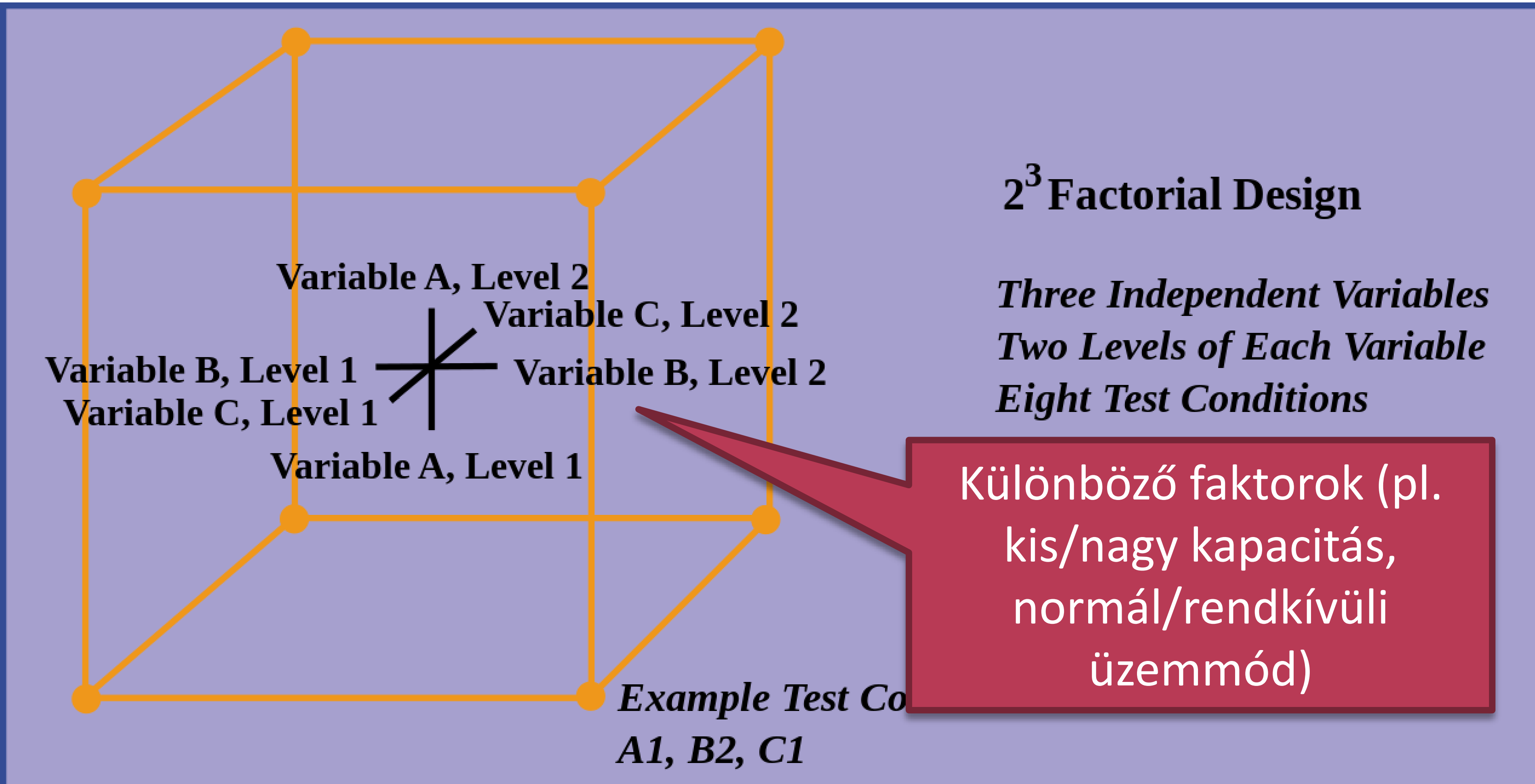
(iMSC kiegészítés)

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Kísérlettervezés

- Cél: a modell paraméterezése a valóság alapján
  - Vagy absztrakt modell a konkrét modell alapján
- Információt **kísérlet**ek révén szerzünk
  - Pontosan mit szeretnénk tudni?
  - Ehhez milyen megfigyelést, hányszor kell elvégezni?
  - A kapott eredményekből mire lehet következtetni?
- (statisztikai) **kísérlettervezés** (Design of Experiment, DOE)
  - hatékony eljárás a kísérletek tervezésére és elemzésére
  - valós és objektív konklúziók levonásához
- Kísérletterv: még a kísérlet elvégzése előtt

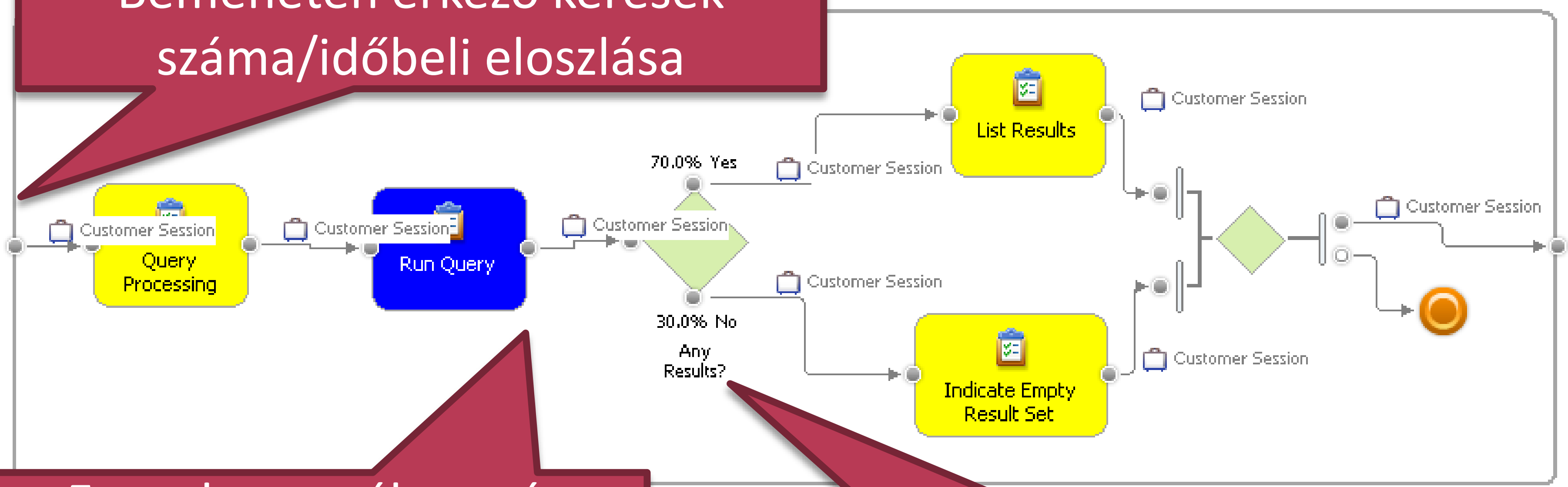
Tervezési tér



Különböző faktorok (pl. kis/nagy kapacitás, normál/rendkívüli üzemmód)

Emlékeztető: Alap kérdés

- Jól becsüljük meg a mennyiségi paramétereket?



Bemeneten érkező kérések száma/időbeli eloszlása

Egy adott tevékenység végrehajtási ideje adott erőforráson

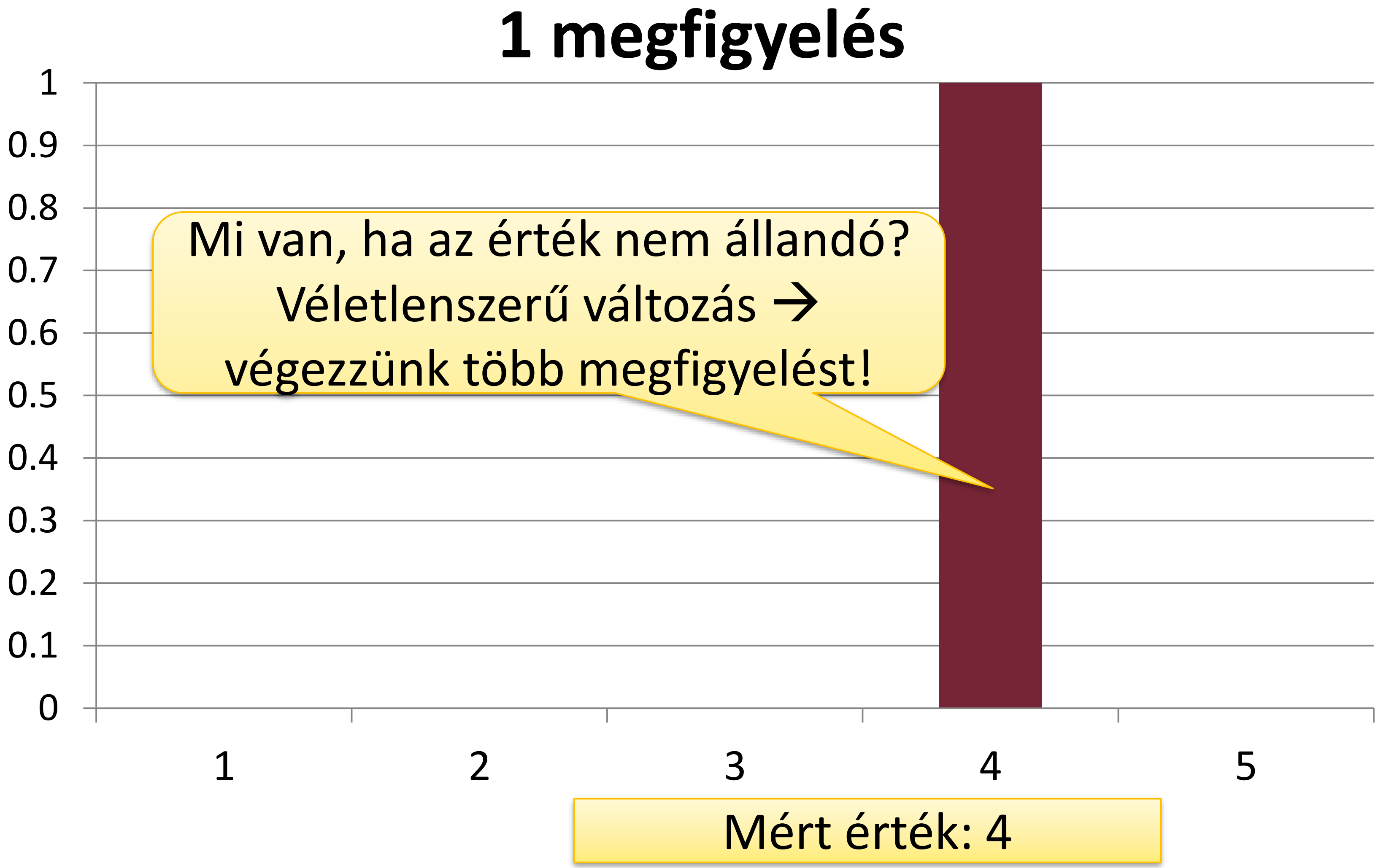
Várható értékkel közelített döntési valószínűség/gyakoriság MINDEN ÁGRA!

Kísérlettervezés

- Mire jó?
  - Alternatívák közötti választás
  - Érzékeny paraméterek, kulcsfaktorok
  - Megfelelő célérték, változékonyság csökkentése
  - Robosztussá tétel
- Fontos:
  - Világos cél, egyértelmű eredmények
  - Kis méret, alacsony költség
  - Valós viszonyok
  - A következőkben EGY változókombinációt feltételezünk

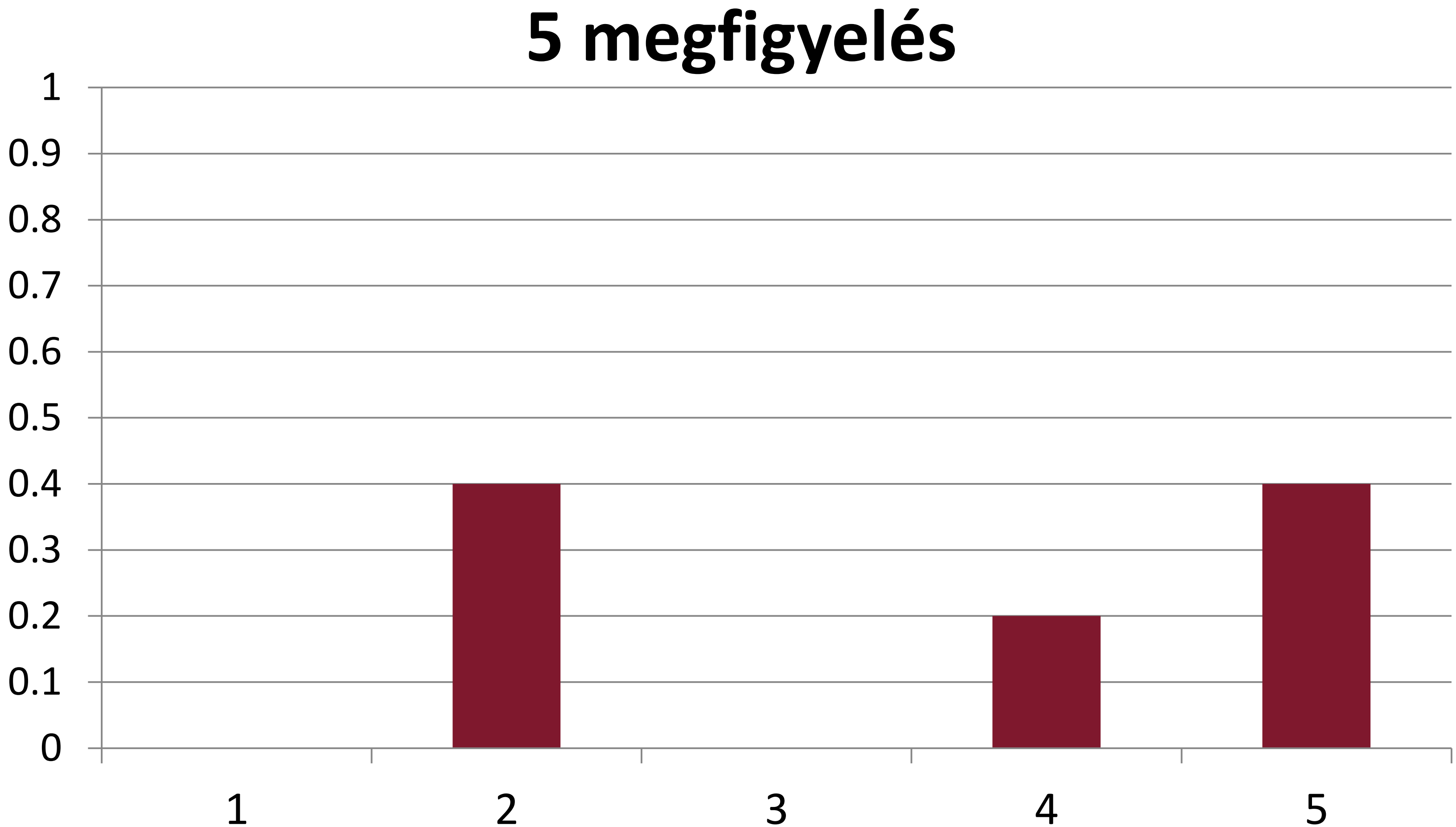
Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)



Számszerű jellemzők mérése

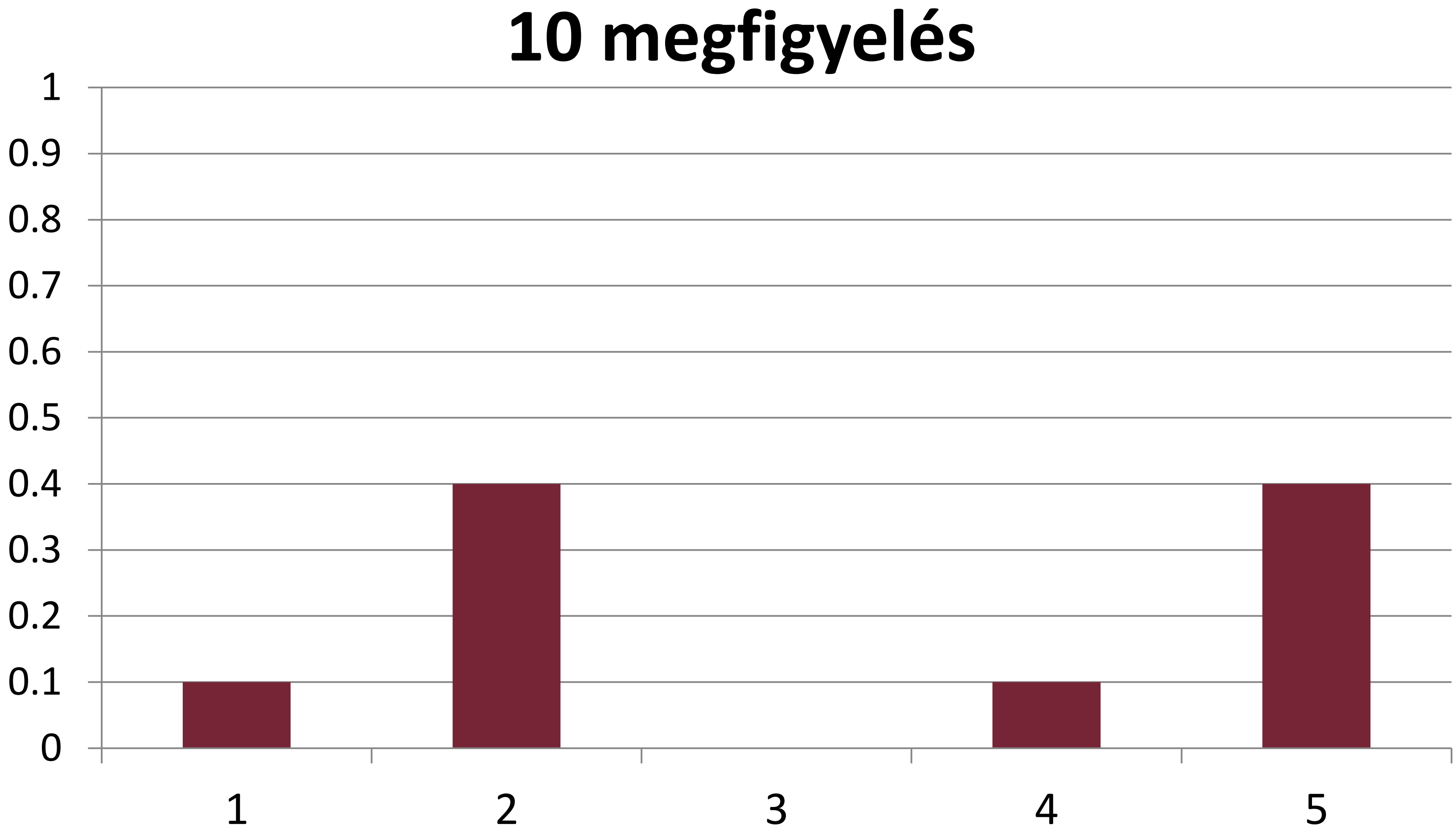
- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)



Számított átlag: 3,6

Számszerű jellemzők mérése

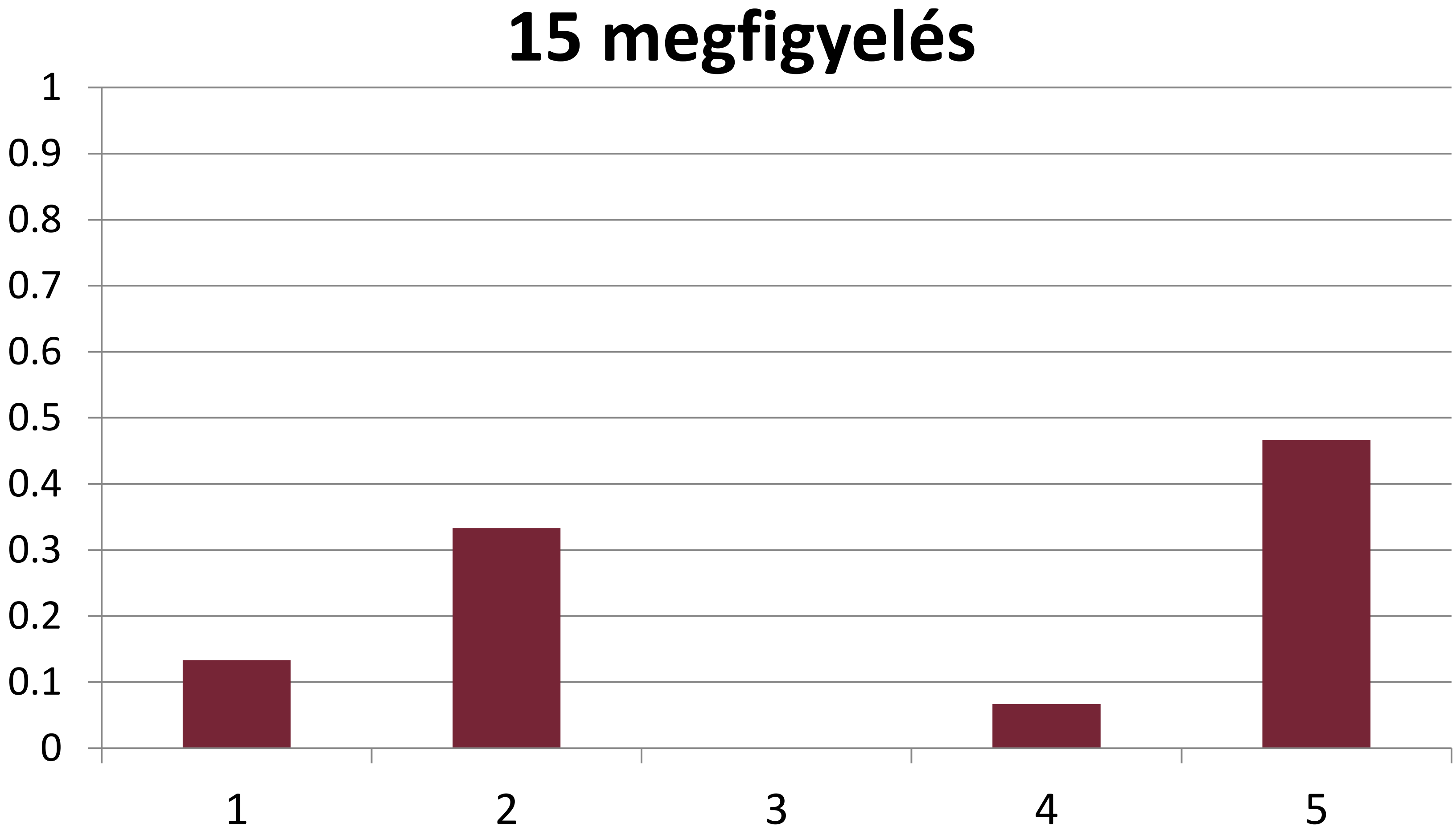
- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)



Számított átlag: 3,3

Számszerű jellemzők mérése

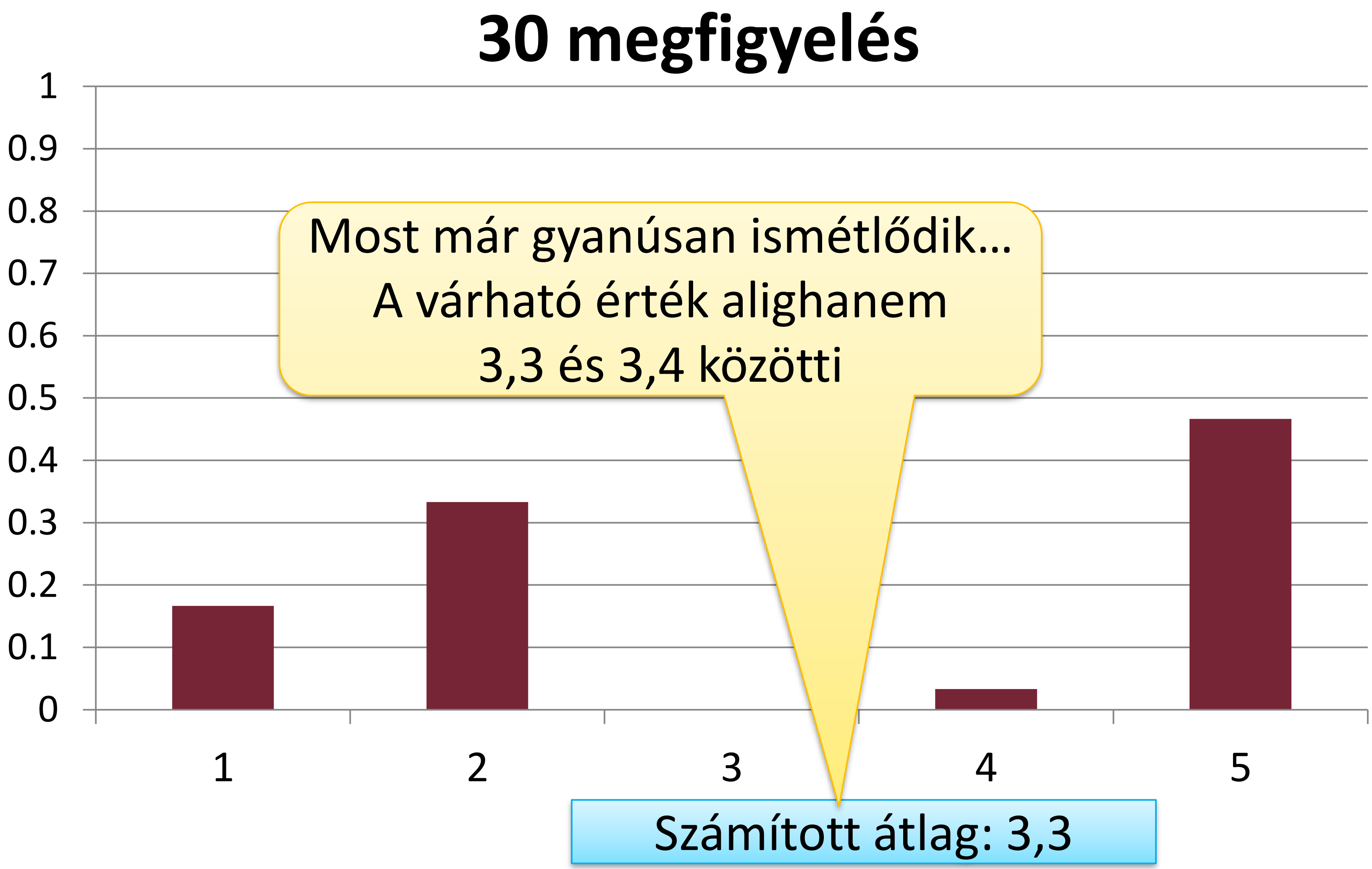
- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)



Számított átlag: 3,4

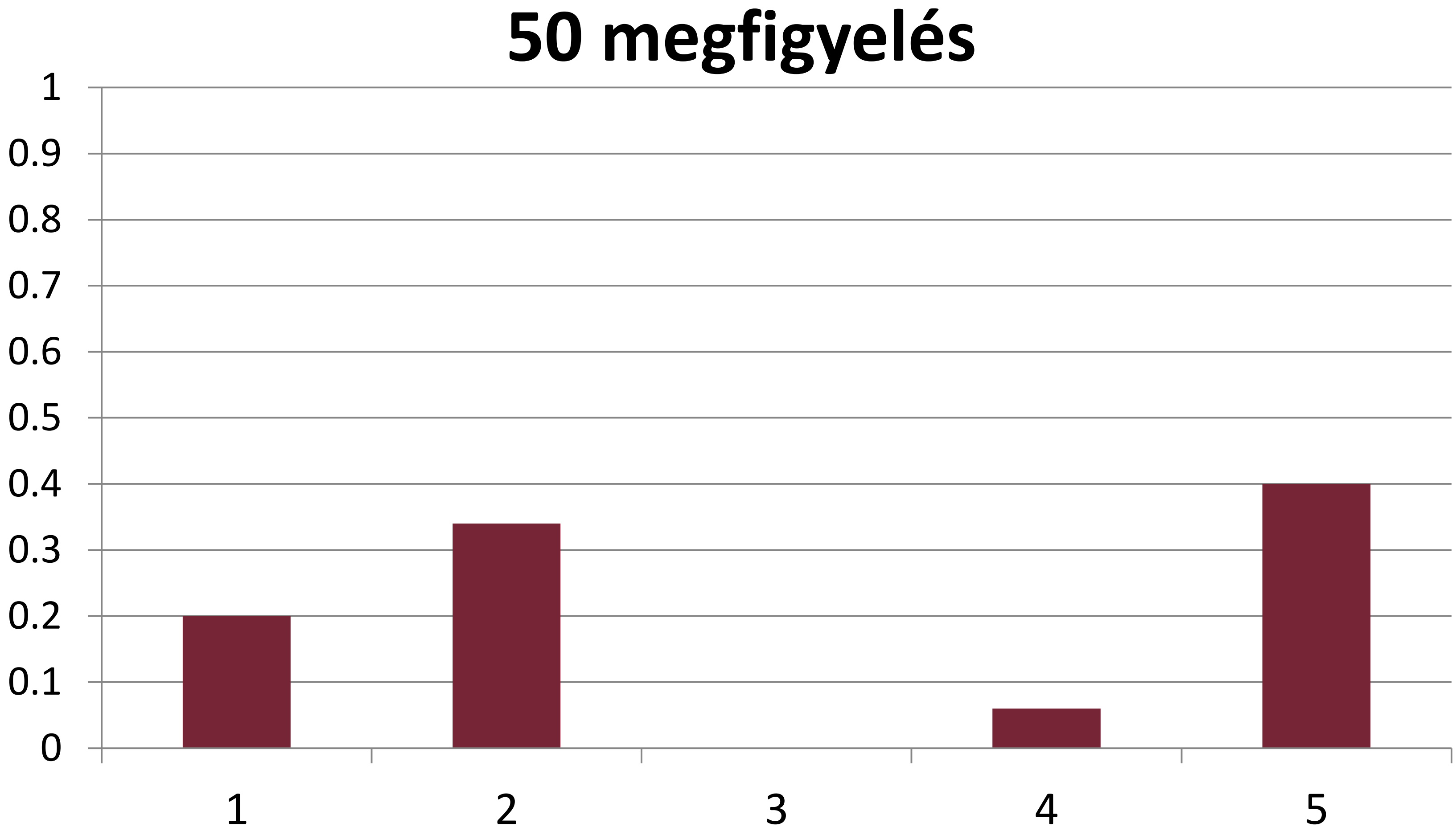
Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)



Számszerű jellemzők mérése

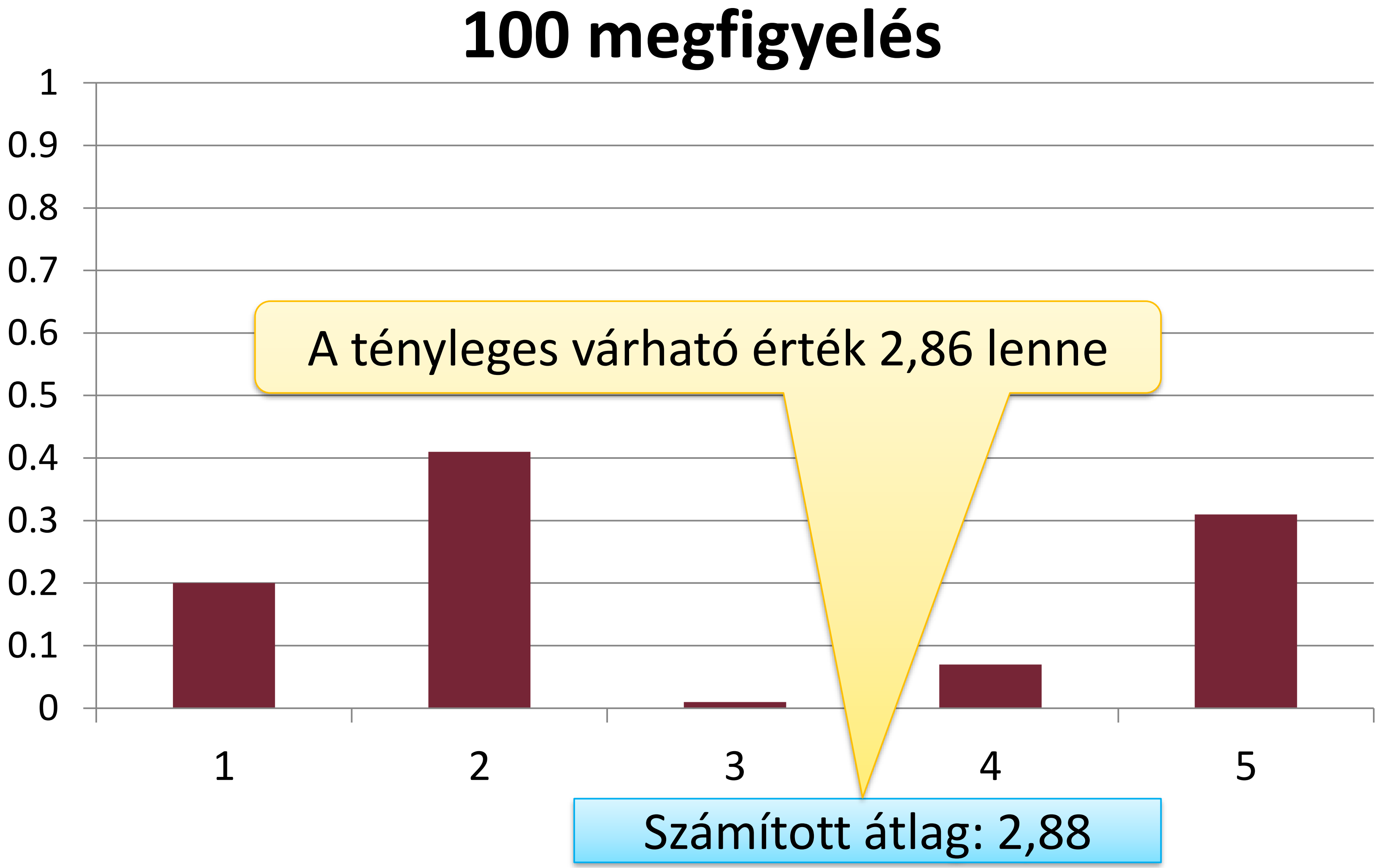
- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)



Számított átlag: 3,12

Számszerű jellemzők mérése

- Mérjük meg egy jellemző értékét! (1..5)



Ismétlés: tapasztalati átlag, szórás

- Valószínűségi változó: E (vizsgálandó jelenség)
  - Várható érték: $\mu = \mathrm{E}(X)$ átlagos viselkedés)
  - Szórás: $\sigma = \sqrt{\mathrm{E}(X-\mu)^2}$ (eltérések mértéke)
- Mintavétel: x_1, x_2, … x_t (mérések, megfigyelések)
  - Tapasztalati átlag: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_t}{t}$
  - Szórásra **nem jó**: $\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots(x_t-\bar{x})^2}{t}}$
  - Korrigált tapasztalati szórás: $\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots(x_t-\bar{x})^2}{t-1}}$

Tapasztalati átlag

- Módszer: számtani átlag képzése
  - Ismételt megfigyelések
  - Egymástól függetlenül
  - Azonos feltételek mellett
- Kérdések
  - Hány megfigyelést kell végezni?
  - A tapasztalati átlag mennyire jellemzi a valódi várható értéket?
- Először tisztázandó:
  - *A tapasztalati átlag eloszlása*

Tapasztalati átlag eloszlása

- Kísérlet = megfigyelések sorozata
- Megfigyelések sorozatának **tapasztalati átlaga**:
  - Egy jellemzőt ***t*** db független megfigyeléssel mérve,
  - majd a mért értékeket átlagolva kapott eredmény
- **Centrális határeloszlás tételé**ből következik:
  - Tetszőleges eloszlású jellemző
  - (de legyen *véges* ***m*** várható értékű és **s** szórású)
  - tapasztalati átlaga **t**→∞ esetén közelítőleg
  - **normális eloszlású**,
  - μ = ***m*** várható értékkel és $\sigma = {}^{\mathbf{s}}/_{\sqrt{t}}$ szórással

Tapasztalati átlag eloszlása

- Kísérlet = megfigyelések sorozata
- Megfigyelések sorozatának **tapasztalati átlaga**:
  - Egy jellemzőt ***t*** db független megfigyeléssel mérve,
  - …tt eredmény
- **C**… következik:
  - …
  - (de legyen *véges* ***m*** várható … ékű és **s** szórású)
  - tapasztalati átlaga **t**→∞ esetén közelítőleg
  - **normális eloszlású**,
  - μ = ***m*** várható értékkel és σ = $^{\mathbf{s}}/_{\sqrt{t}}$ szórással

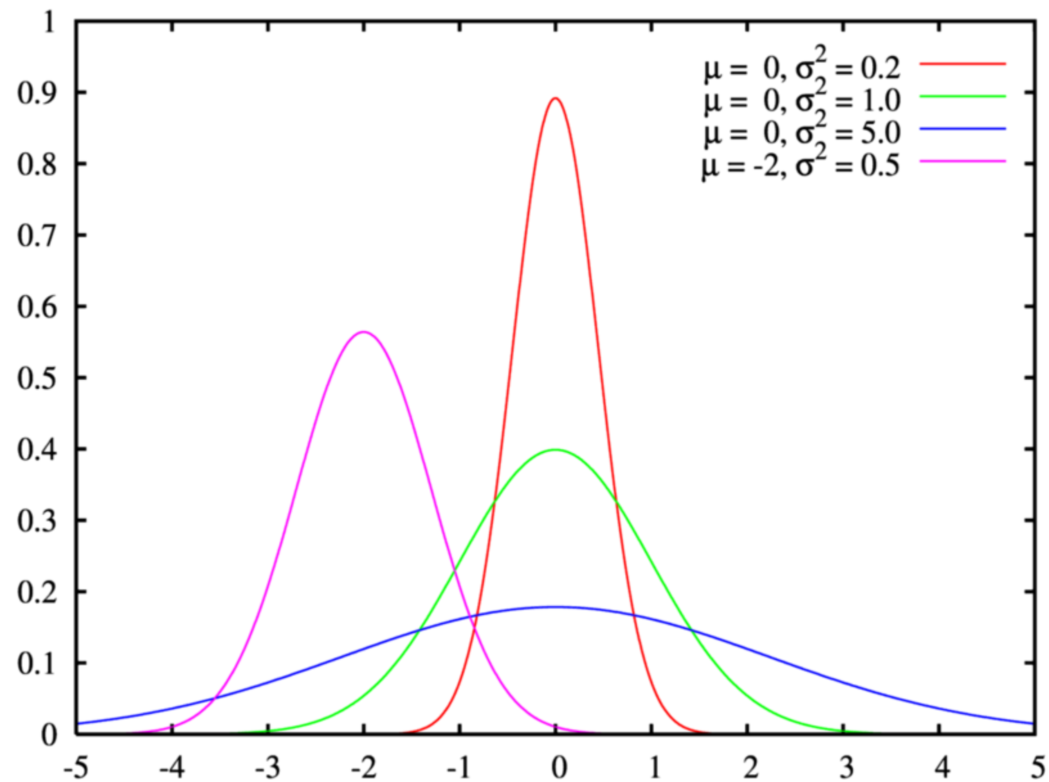
Ökölszabály:
ismert szórásnál t>30,
ismeretlen szórásnál t>100
után kezd elfogadható lenni a közelítés

A normális (Gauss) eloszlás

- Valószínűségsűrűség-függvénye: (nem kérdezzük)

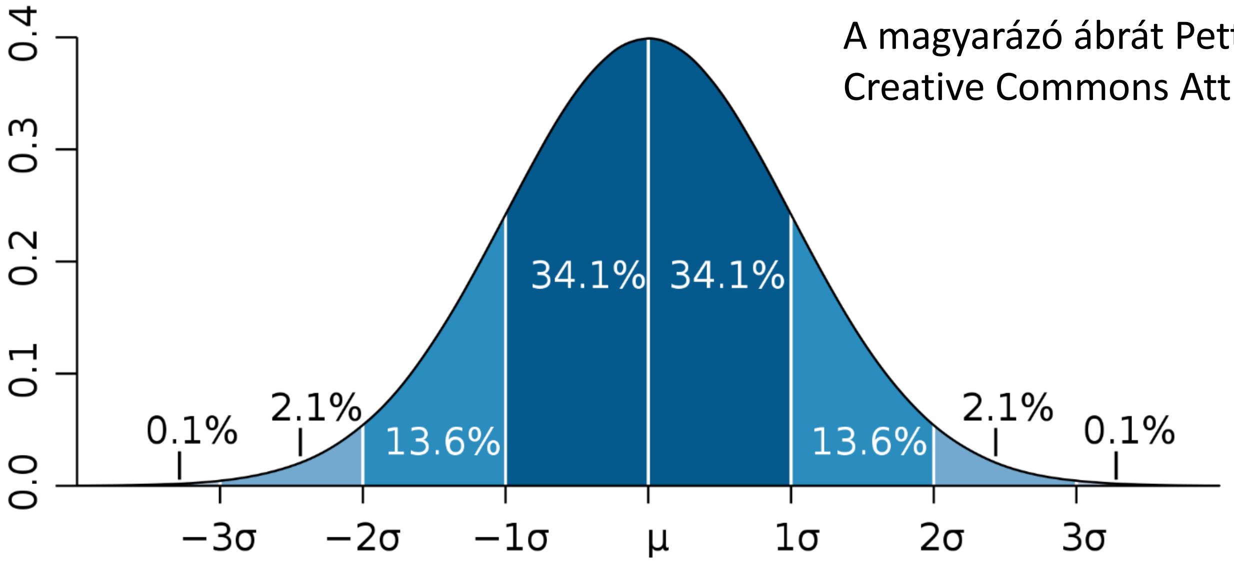
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Paraméterek
  - Várható értéke μ
    - → **m** a mi esetünkben
  - Szórása σ
    - → $\mathbf{s}/_{\sqrt{\boldsymbol{t}}}$ esetünkben



A normális (Gauss) eloszlás

- A várható érték körül koncentrálódik



A magyarázó ábrát Petter Strandmark tette közzé Creative Commons Attribution 2.5 Generic licenc alatt

- A normális eloszlású változó…
  - az esetek **68%**-ában legfeljebb **1*σ*** messze kerül μ-től
  - az esetek **95%**-ában legfeljebb **2*σ*** messze kerül μ-től
  - az esetek **99,7%**-ában legfeljebb **3*σ*** messze kerül μ-től
  - …

Centrális határeloszlás tétele

- CLT (Central Limit Theorem)
  - A minták statisztikáinak átlaga normális eloszlást követ (bizonyos feltételek mellett).
  - Bővebben (és alaposabban): **Valószínűségszámítás**
  - $\bar{x} \sim N\left(mean = \mu, \sigma = \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
    - $\bar{x}$ a mintaátlag
    - μ a populáció várható értéke
    - s a populáció (empirikus) szórása
    - n a mintaméret

Konfidenciaintervallumok

- Ha tehát a tetszőleges eloszlású, ***s*** szórású vizsgált jellemzőről ***t*** db (>30) megfigyelést végzünk
- A tapasztalati átlagáról…
  - **68%** biztonsággal kijelenthető, hogy legfeljebb $s/\sqrt{t}$ pontatlansággal becsli ***m*** értékét
  - **95%** biztonsággal $2s/\sqrt{t}$ sugarú intervallumba esik
  - **99,7%** biztonsággal $3s/\sqrt{t}$ sugarú intervallumba esik
- És ***t*** növelésével gyökösen szűkül az intervallum

Konfidenciaintervallumok

- Ha tehát a tetszőleges eloszlású, ***s*** szórású vizsgált jellemzőről ***t*** db (>30) megfigyelés[...]végzünk

Egyedi megfigyelés szórása

- A ta[...]gáról…

Konfidenciaszint

  - **68%** biztonsággal kijele[...] legfeljebb $s/\sqrt{t}$ pontatl[...]

Konfidenciaintervallum sugara (félszélessége)

  - **95%** biztonsággal $2s/\sqrt{t}$ sugarú intervallumba esik
  - **99,7%** biztonsággal $3s/\sqrt{t}$ sugarú intervallumba esik
- És ***t*** növelésével gyökösen szűkül az intervallum

Kísérlettervezés példa

- A várható értékre 30 megfigyelés
  - Tapasztalati átlag: 2,3 s (jó-e ez? kell még mérni?)
  - Tapasztalati szórás: $\boldsymbol{s}$ = 1,1 s
- Cél
  - 99,7%-os konfidenciaintervallum 0,6 s széles legyen
- Kísérlettervezés
  - Elvárt sugár (félszélesség) = 3σ = $\mathbf{3}\boldsymbol{s}/_{\sqrt{\boldsymbol{t}}}$ < 0,3 s
    - (ez a σ az átlag szórása, nem az eredeti mért jellemzőé!)
  - Ezért t = 121 megfigyelés kell legalább
- Hol a csalás?

Korrekció

- Többnyire a tényleges eloszlás paraméterei *a priori* ismeretlenek (különben minek mérnénk?)
- Így nem használható fel a tényleges ***s*** szórás
- Csak a tapasztalati szórás használható → Gauss/normális helyett Student t-eloszlás
    - (más konfidenciaintervallumok)
- $t \rightarrow \infty$ esetén Student → normális
- Ökölszabály: t>100 esetén használható a Gauss