

Petri hálók: Alapelemek és kiterjesztések

dr. Bartha Tamás

dr. Majzik István

dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Modellek a formális ellenőrzéshez

Mivel nyújt többet
egy magasabb szintű
formalizmus?
Hogyan használható
modellezésre
és verifikációra?

**MéRNÖKI
modellek**

**Magasabb szintű
formalizmusok
SC, PN, CPN, SPN**

**Alapszintű matematikai
formalizmusok
KS, LTS, KTS, TA**

**Modell-
transzformációk**



Petri háló: Mire használható?

Petri hálók alkalmazási köre:

- Konkurens,
 - aszinkron,
 - elosztott,
 - párhuzamos,
 - nemdeterminisztikus
- rendszerek modellezése

Vannak erre más formalizmusok is,
pl. automaták hálózata.

Miben speciálisak a Petri hálók?

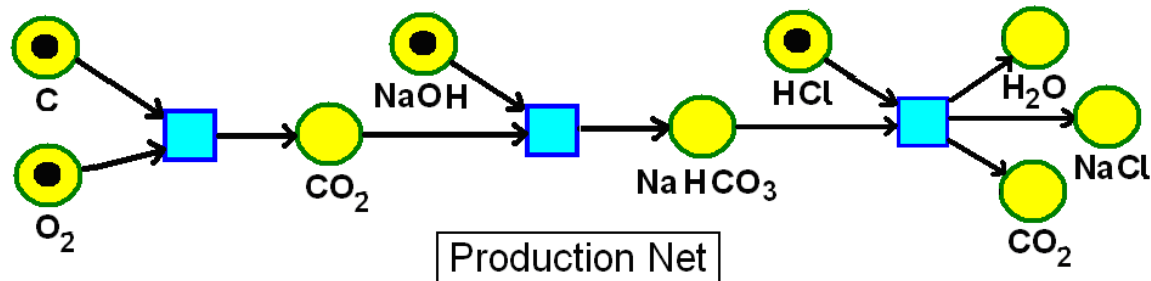
- Kompaktabb módon fejezik ki az állapotot
 - Szemléletesen fejezik ki a szinkronizációt
- ⇒ Tömörebb, átláthatóbb modellek

A Petri hálók alapvető tulajdonságai

- Egyidejűleg biztosítja:
 - Grafikus reprezentáció → Áttekinthetőség (+hierarchia)
 - Matematikai formalizmus → Precizitás, egyértelműség
- Struktúrával fejezi ki:
 - Vezérlési struktúra (függések, feltételek, konkurencia)
 - Adatstruktúra (adatelemek, ezek rendelkezésre állása)
- További előnyök:
 - Könnyen kiterjeszthető
 - Pl. időzített, sztochasztikus, színezett, hierarchikus Petri hálók
 - Más ábrázolásmódok is leképezhetők Petri hálóvá
 - Intuitív kiterjesztésekkel minden Turing gép szimulálható

Petri háló: Honnan ered?

- Carl Adam Petri: német matematikus, 1926-2010
- A jelölésrendszert 1939-ben, 13 évesen találta ki
- Eredetileg kémiai folyamatok leírására szánta



- Később a matematikai alapokat a doktori disszertációjában dolgozta ki (1962-ben)
 - C. A. Petri: Kommunikation mit Automaten. Schriften des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn Nr. 2, 1962

Petri hálók felépítése és működése

Petri hálók struktúrája

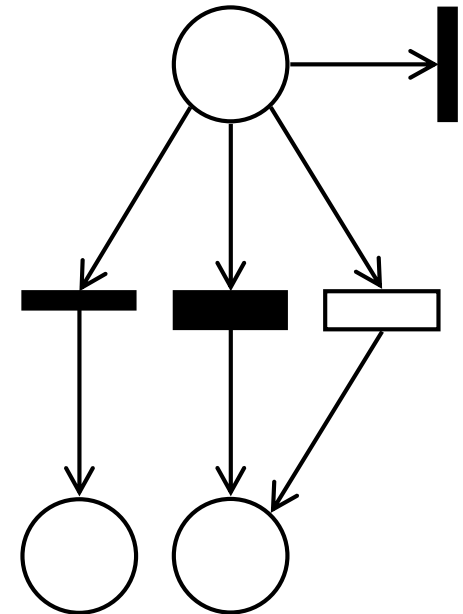
Struktúra: Irányított, súlyozott, páros gráf

- Két típusú csomópont:

- Hely: $p \in P$ Jelölése: kör
- Tranzíció: $t \in T$ Jelölése: téglalap

- Irányított élek:

- Hely $\rightarrow$ tranzíció
 - Tranzíció $\rightarrow$ hely
- } páros gráf!
- $e \in E, E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$

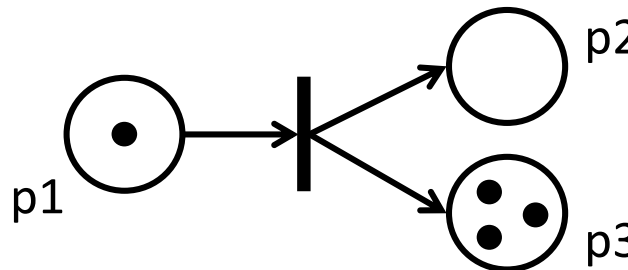


Petri háló állapota

Helyek: Lehetséges helyzetek, feltételek modellezése

Lokális helyzet, feltétel fennáll: Ha a helyet „megjelöljük”

- Állapotjelölő: token Jelölése: fekete pont
 - Pl. „Futásra kész” hely jelölése, ha egy processz futásra készen áll
- Hely „jelölése” (állapota): benne levő tokenek száma
 - Pl. „Futásra kész” helyen több token, ha több processz is készen áll
- Háló állapota: az egyes helyek jelöléseinek összessége
 - Állapotvektor: az M tokeneloszlás vektor, minden helyhez egy elem
 - M -nek egy m_i eleme: A p_i helyen található tokenek száma



$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \end{matrix}$$

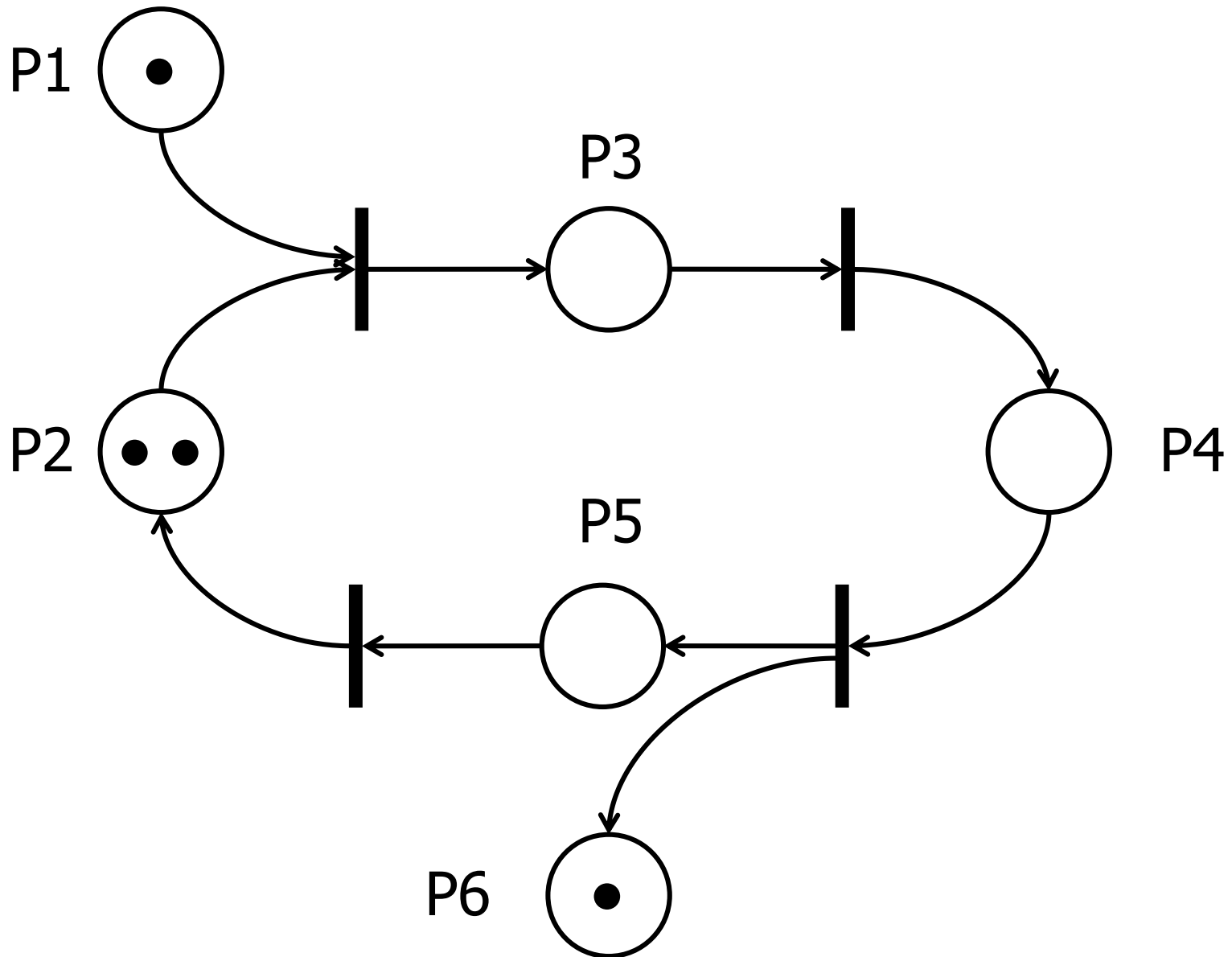
Petri háló működése (dinamika)

Tranzíciók: Lehetséges változások modellezése

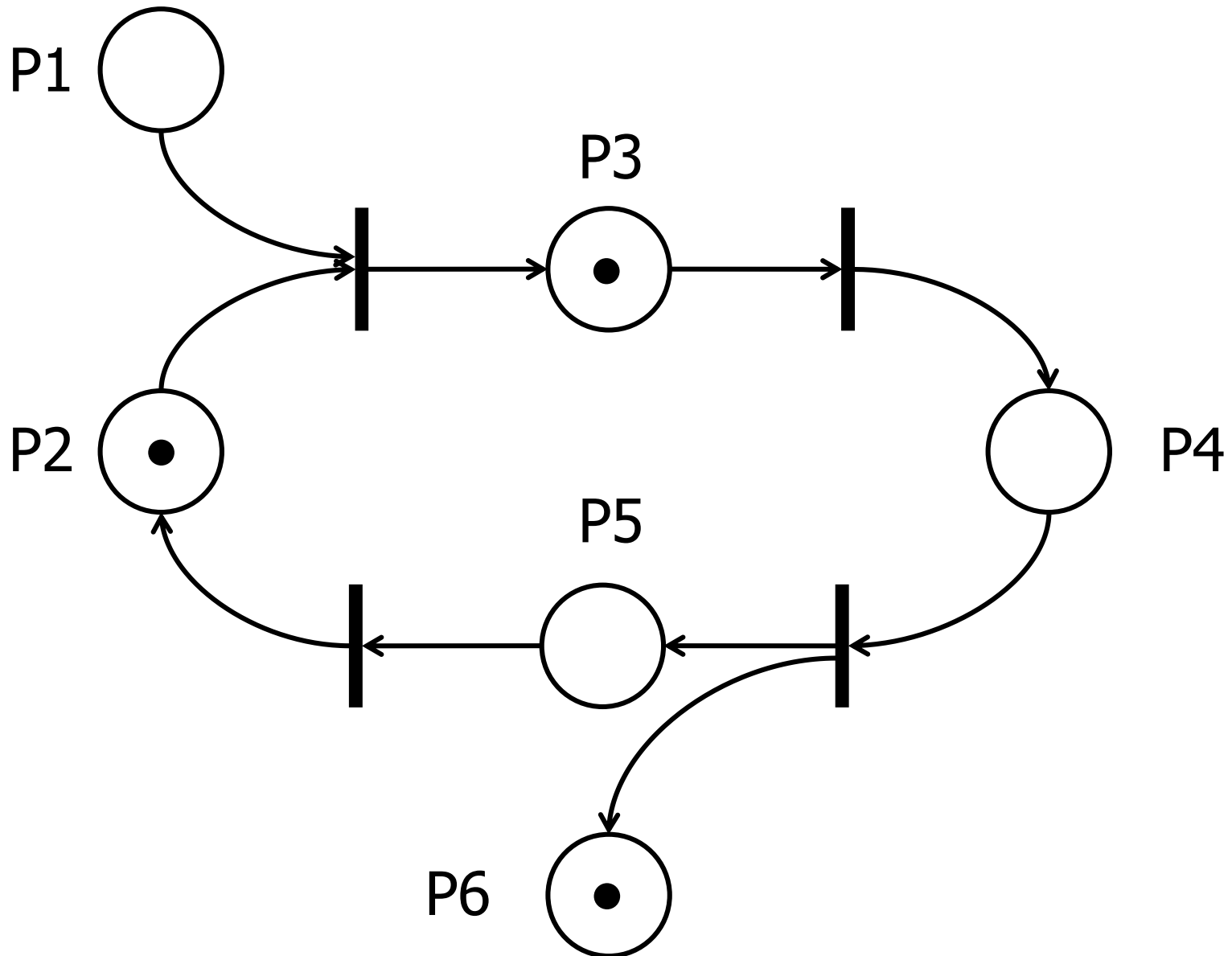
Változás bekövetkezik: Ha a tranzíció „tüzel”

- Egy tranzíció csak akkor tüzelhet, ha engedélyezett
 - A tranzíció minden bemeneti élére igaz:
Az él végén lévő helyen (bemeneti helyen) van token
- Tüzelés végrehajtása
 - Token elvétele minden bemeneti helyről
 - Token kirakása minden kimeneti helyre
- Nem a tokenek „mozgatása”, hanem elvétel és kirakás!
 - Token „elnyelése” és „generálása” is lehetséges
- Megváltozott token eloszlás vektor: új állapot

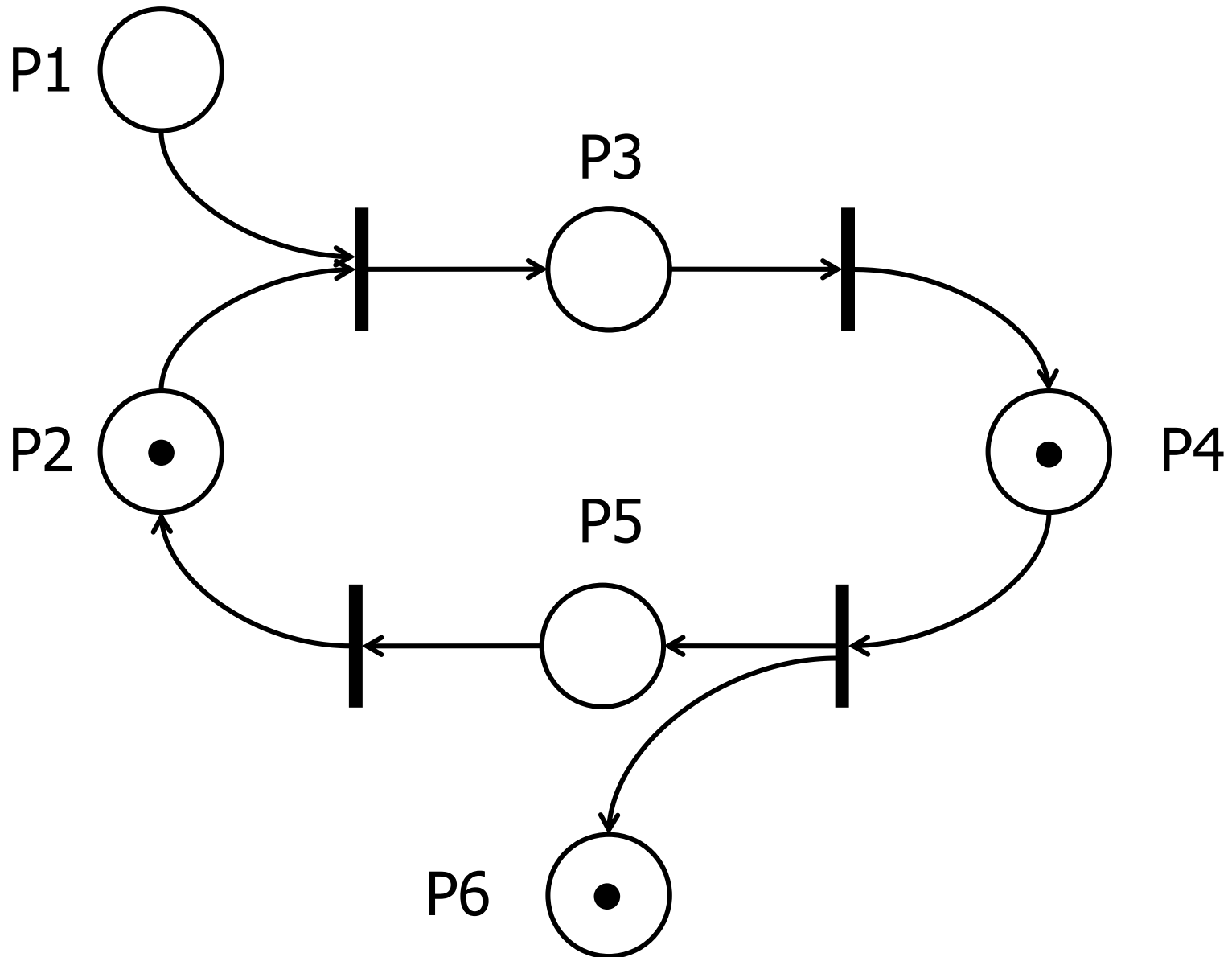
Egyszerű példa a tüzelésekre



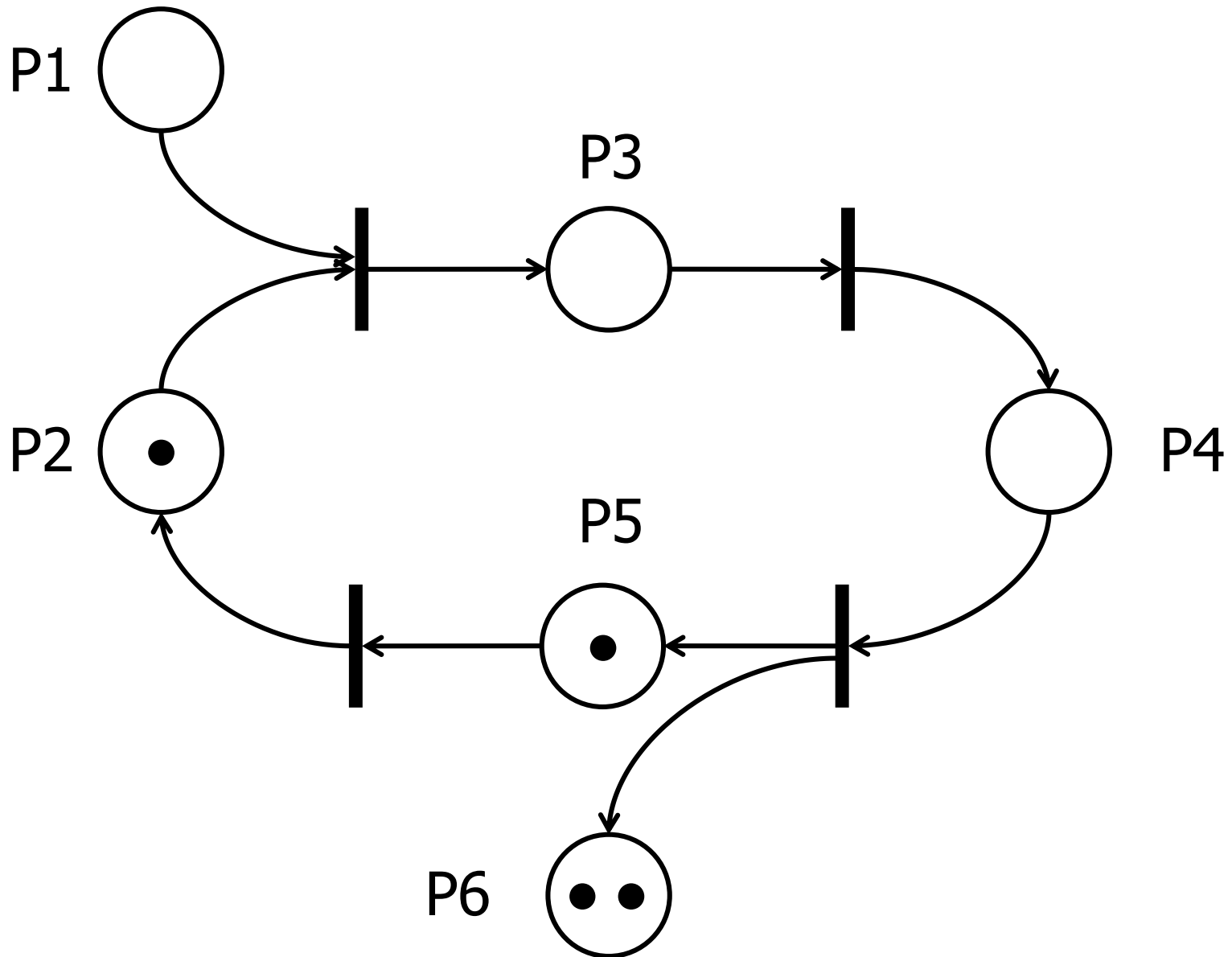
Egyszerű példa a tüzelésekre



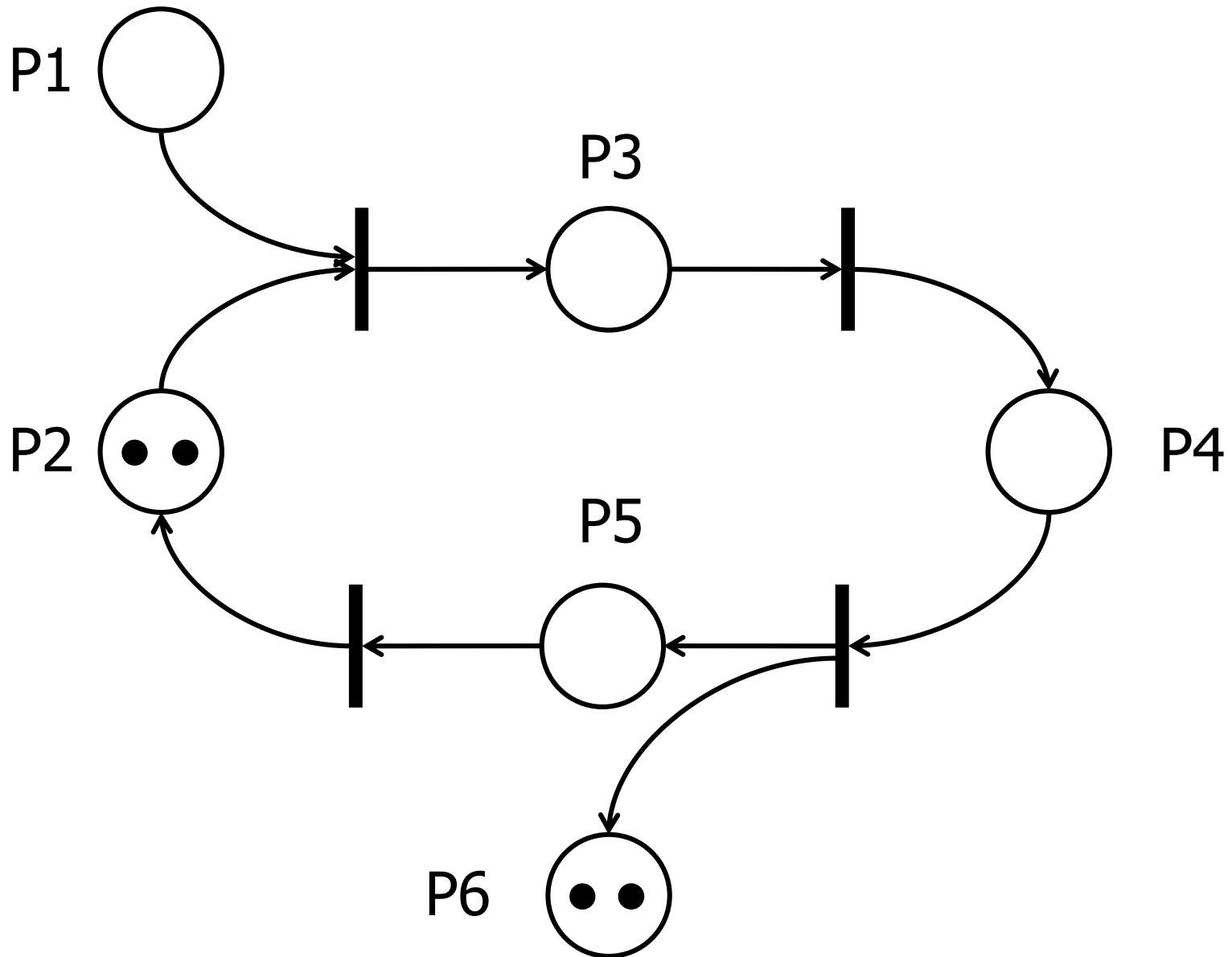
Egyszerű példa a tüzelésekre



Egyszerű példa a tüzelésekre



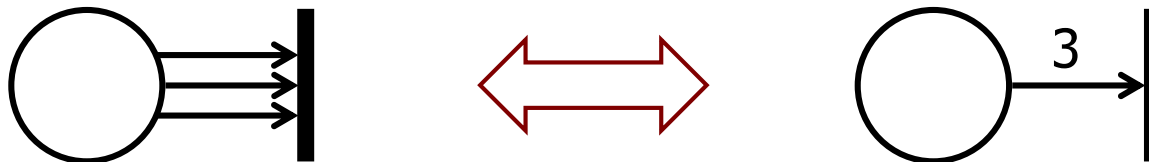
Egyszerű példa a tüzelésekre



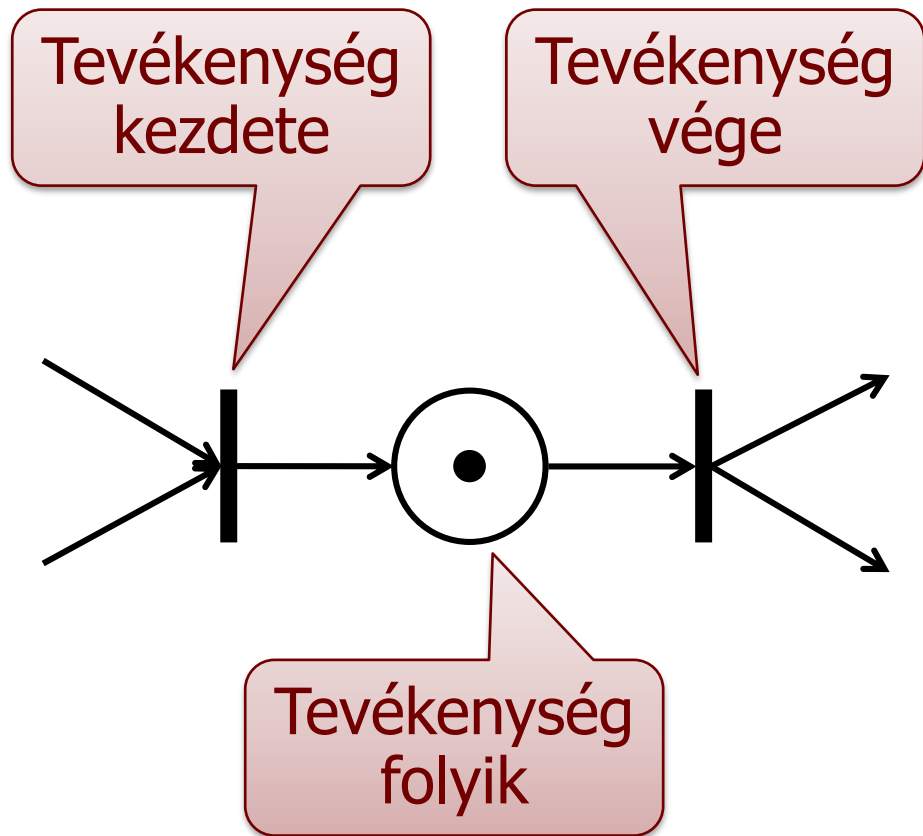
Többszörös élek

Élsúlyok:

- Bármely $e \in E$ élhez $w^*(e) \in \mathbf{N}^+$ élsúlyt lehet rendelni
- A $w^*(e)$ súlyú e él ugyanaz, mint w_e számú párhuzamos él
- Nem rajzolunk párhuzamos éleket, élsúlyt használunk
- Nem szokás feltüntetni az egyszeres élsúlyt

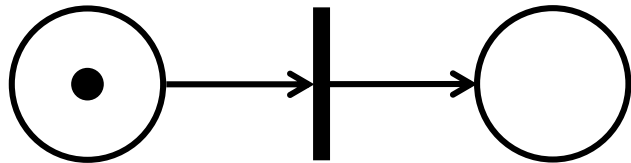


Petri hálók jellemzői



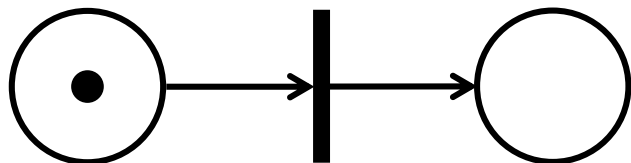
Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események

Petri hálók jellemzői



diasor
előkészítés

diasor
feltöltve

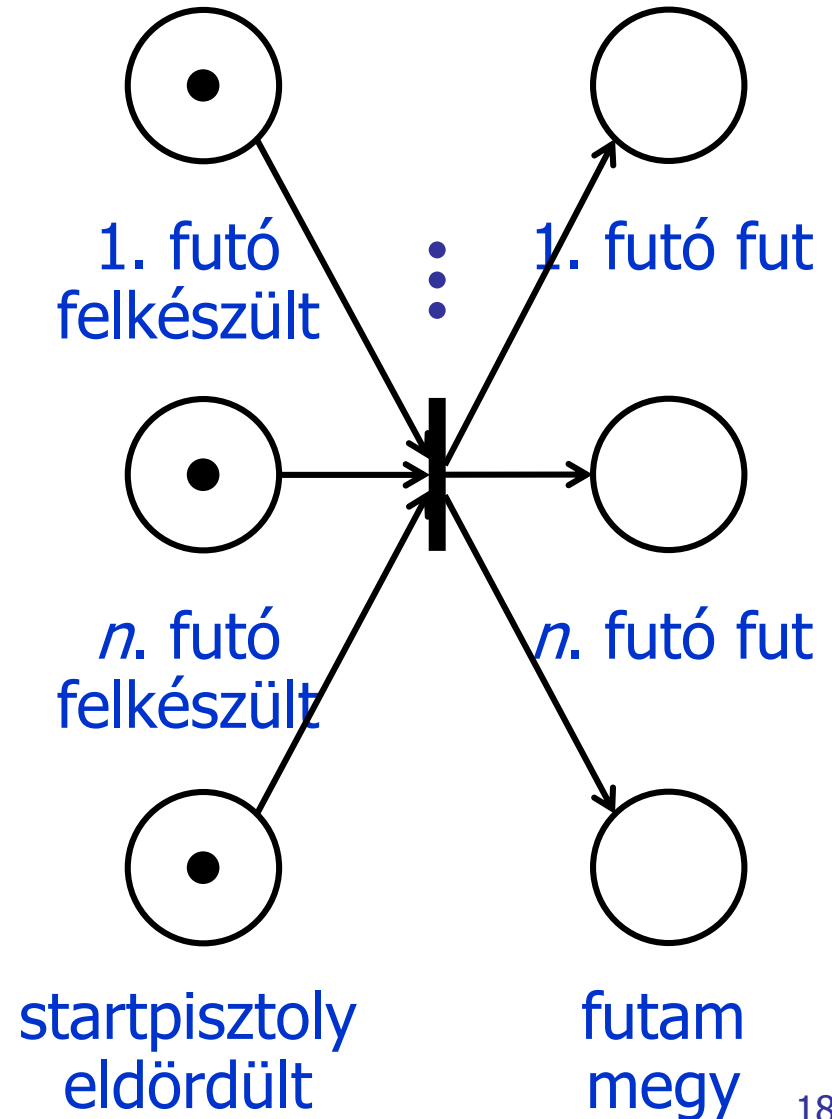
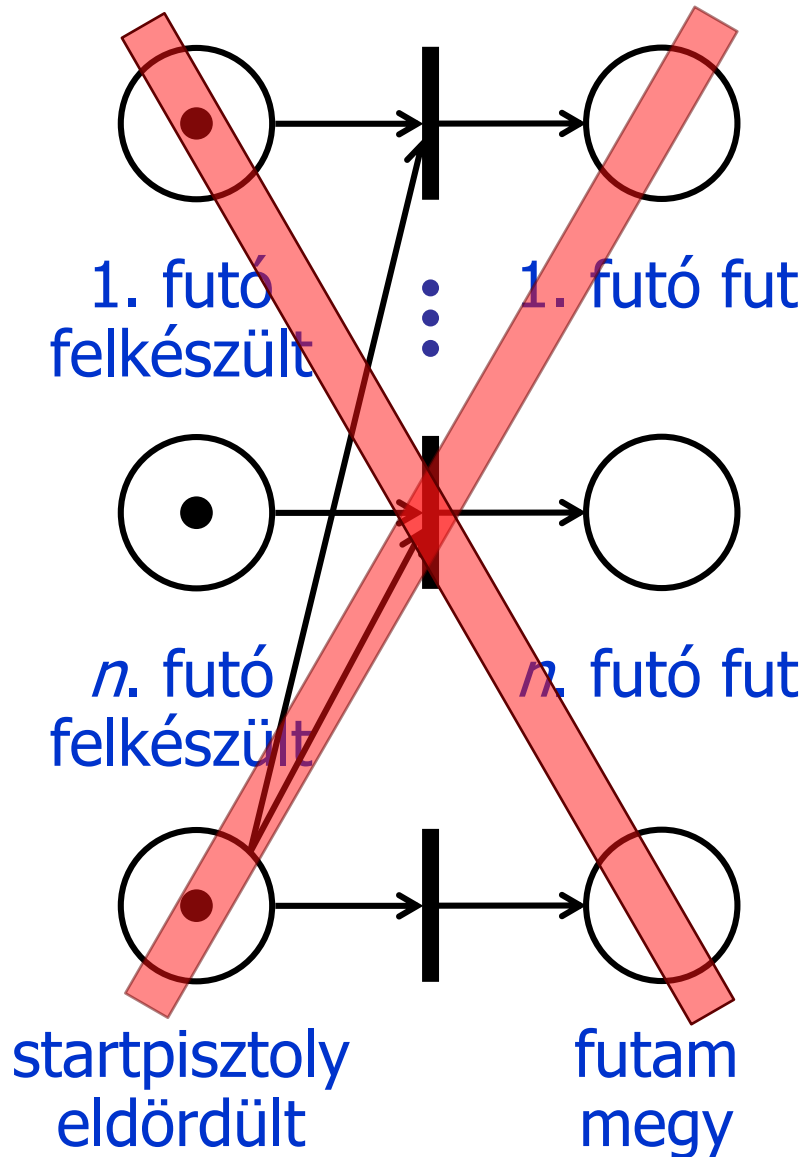


teavíz
melegszik

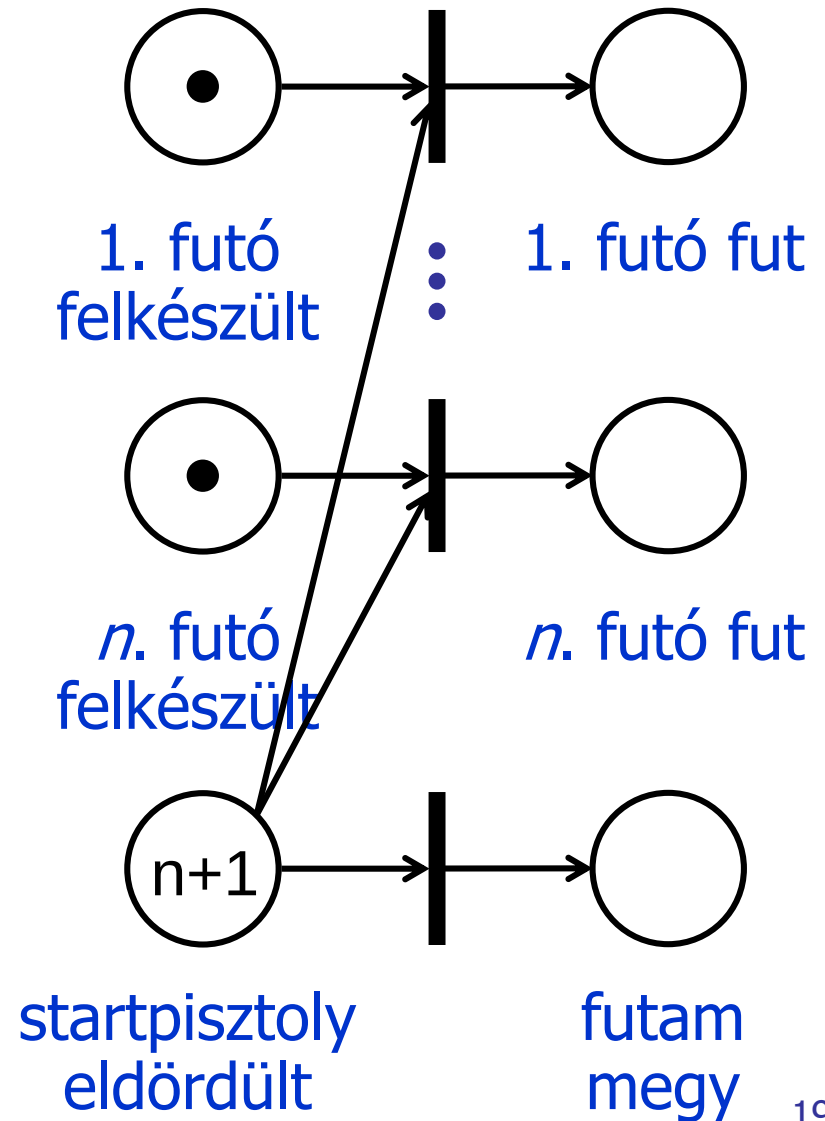
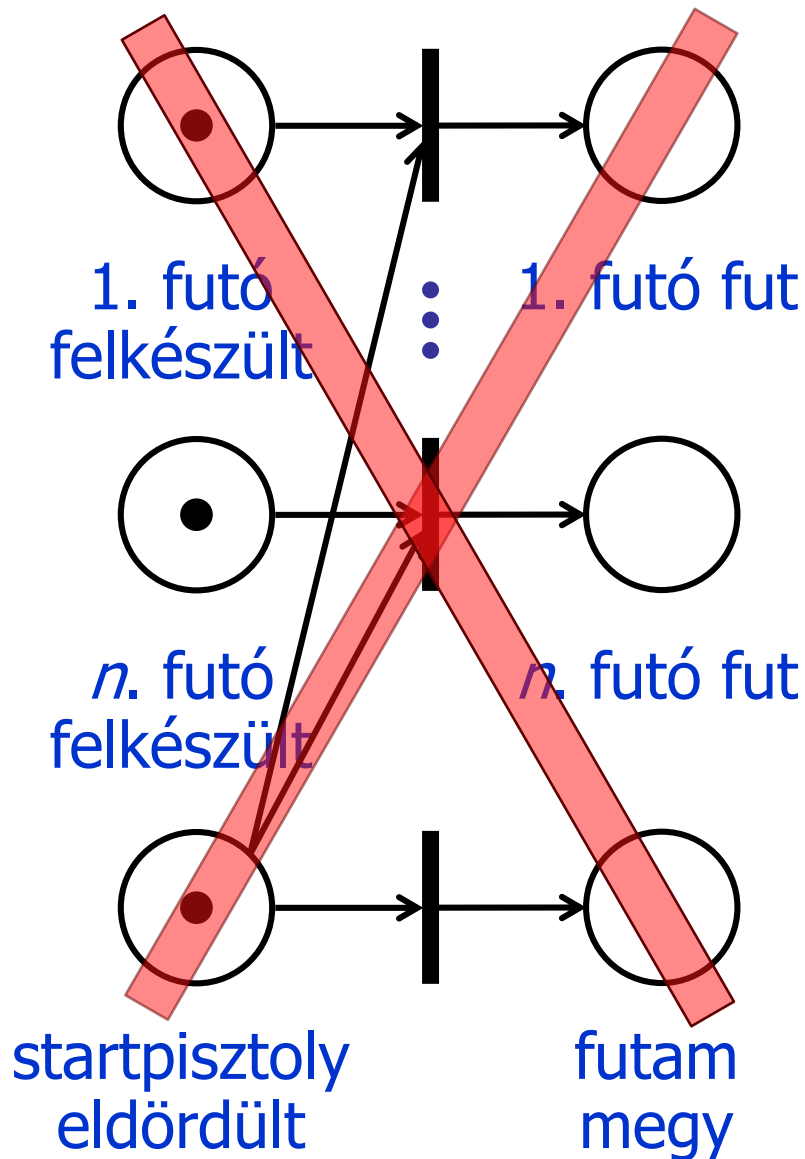
teavíz
felforrt

Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események

Példa: Egyidejűség, szinkronizáció

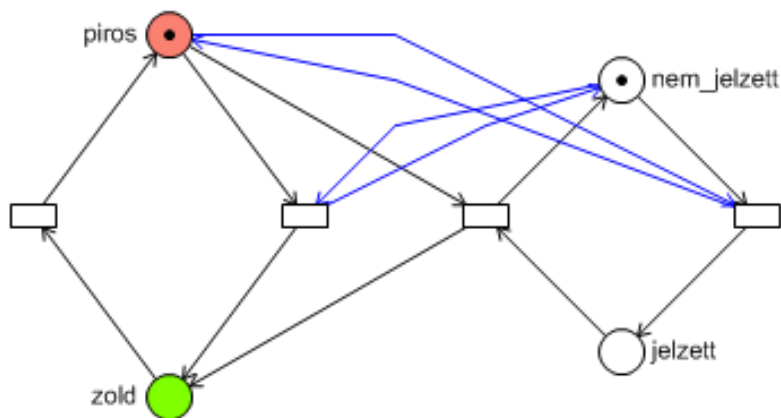
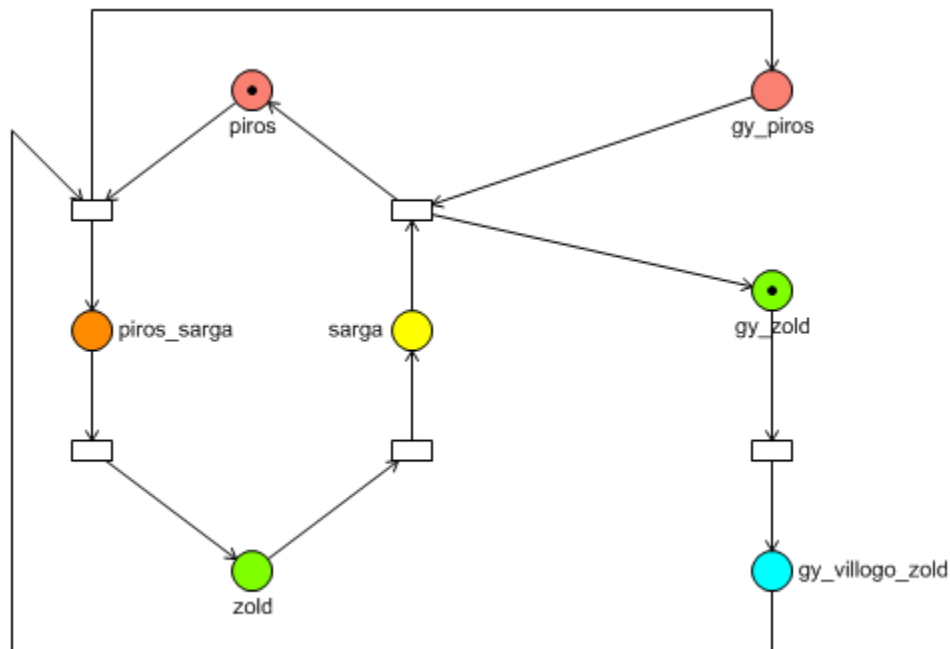


Példa: Egyidejűség, szinkronizáció



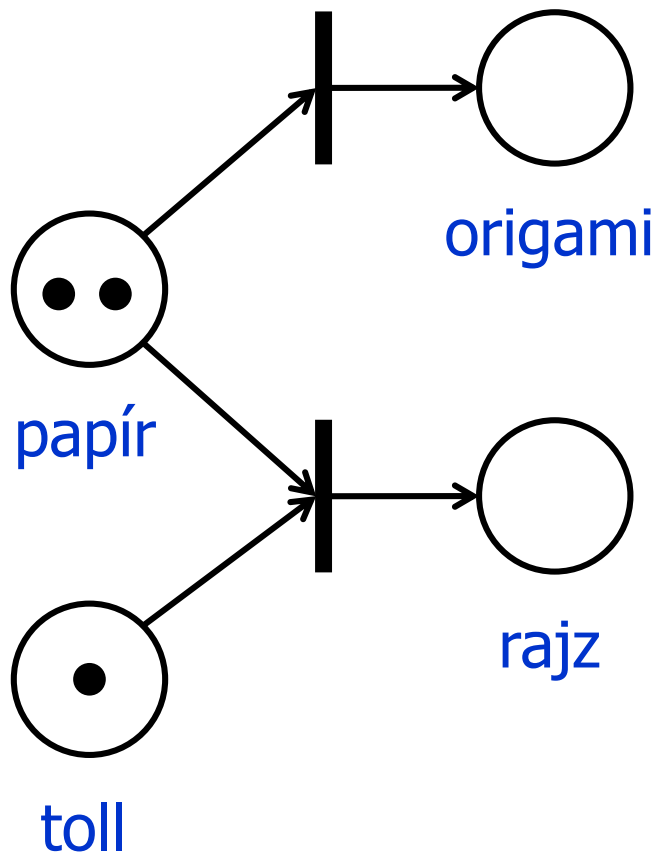
Példa: Szinkronizáció aktivitások között

Kereszteződés
forgalmi és gyalogos
átkelőhely lámpával



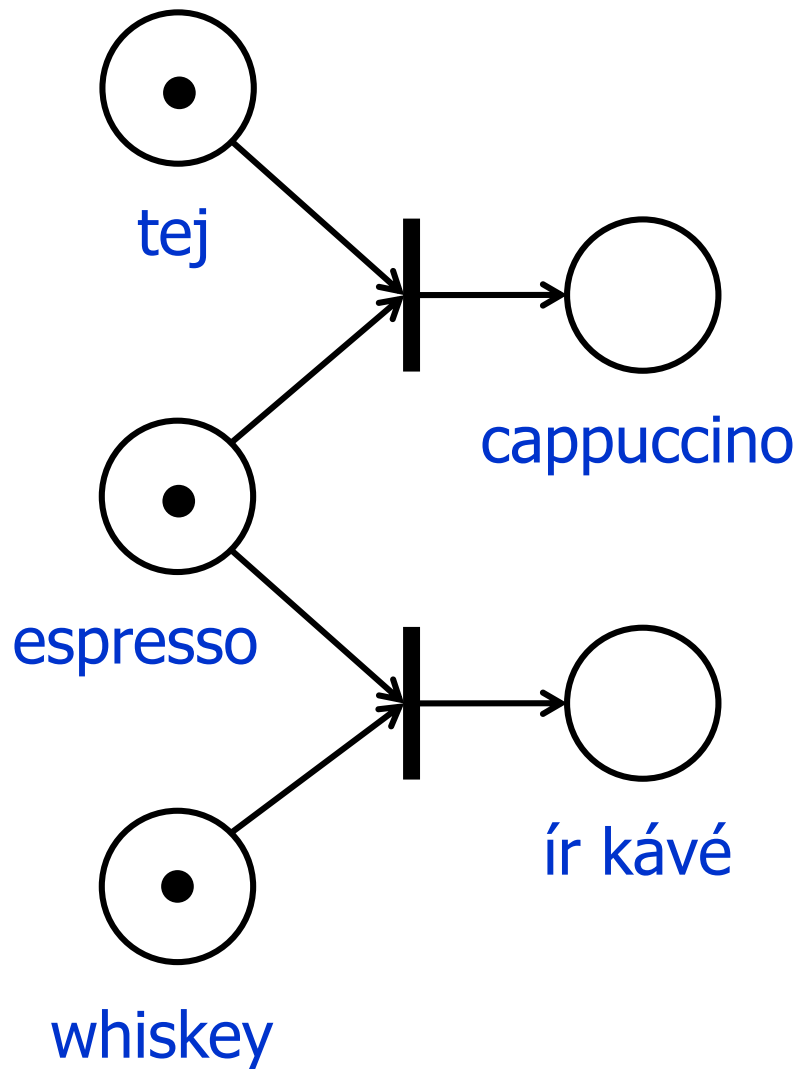
Gyalogos átkelőhely
lámpával és
nyomógombbal

Petri hálók jellemzői



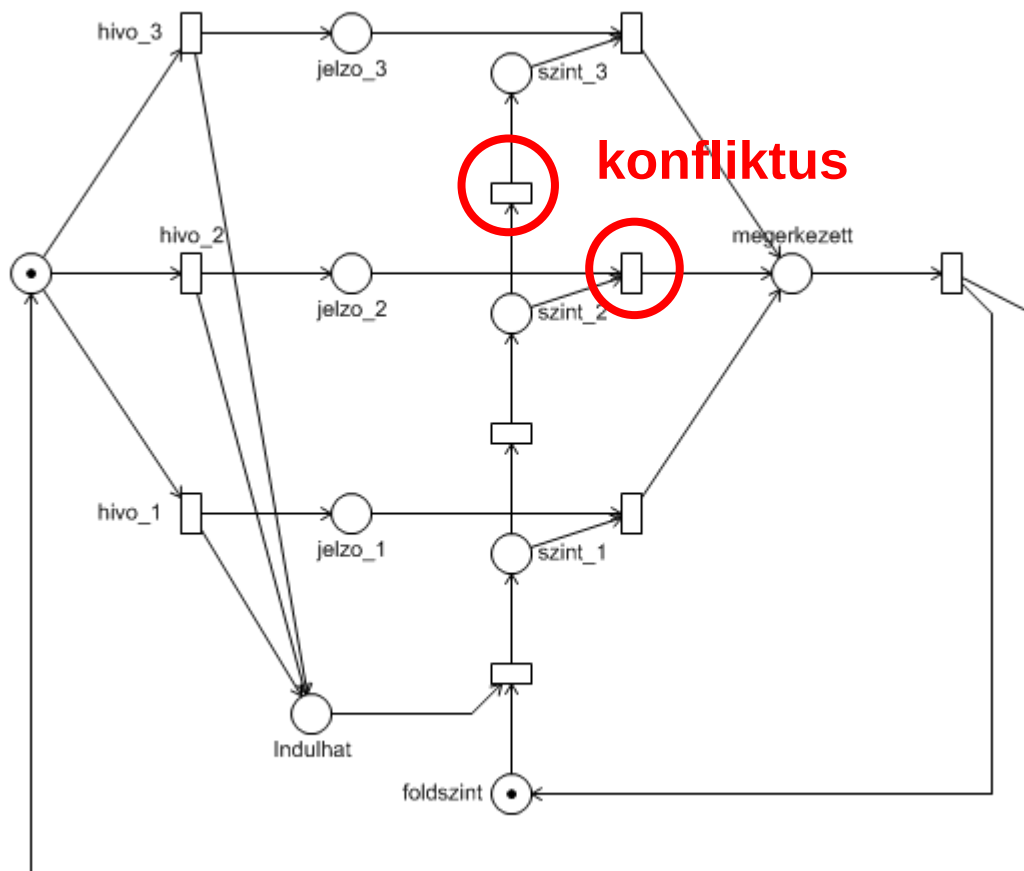
Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események

Petri hálók jellemzői



Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események
tranzíciók konfliktusban	kizáró események

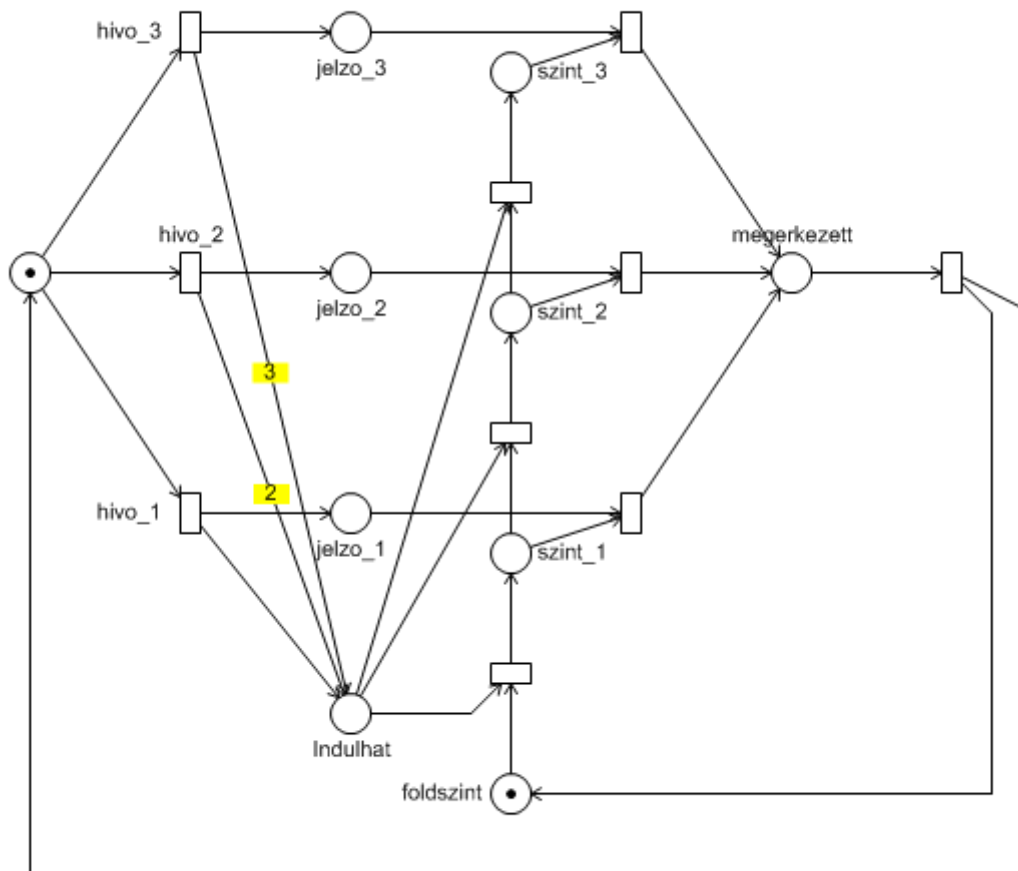
Példa: Konfliktus



Étellift modellje:

- Három szintről hívhatják, az adott szinten megáll
- A modell hibás

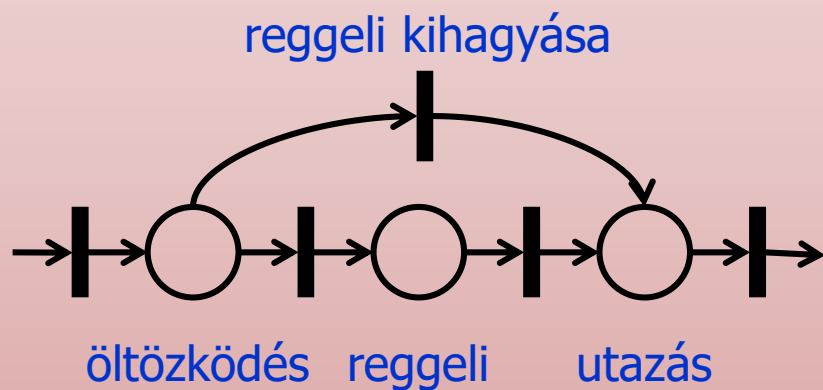
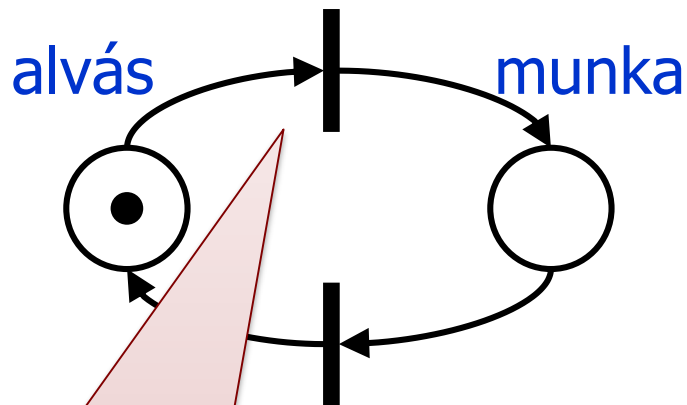
Példa: Konfliktus



A modell javítása:

- Feltétel a továbblépéshez és élsúlyok használata

Petri hálók jellemzői



Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események
tranzíciók konfliktusban	kizáró események
elemek finomítása	hierarchikus események

Alapfogalmak összefoglalása

Petri háló:

- Alapelemek: helyek, tranzíciók, élek, tokenek
- Állapot: tokeneloszlás vektor
- Állapot változása: tranzíció tüzelése

Felépítés:

- Tranzíció: állapotváltozást modellez
- Hely: feltétel állapotváltozáshoz
- Petri háló struktúrája: feladat dekompozíciója

Petri hálók formális definíciója

Felépítés összefoglalása

Petri háló (Petri net):

- Helyek (places)
- Tranzíciók (transitions)
- Élek (edges)
- Súlyfüggvény (weight)
- Kezdőállapot (initial marking)

$$PN = (P, T, E, W, M_0)$$

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_\pi\}$$

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_\tau\}$$

$$P \cap T = \emptyset$$

$$E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$$

$$W : E \rightarrow \mathbf{N}^+$$

$$M_0 : P \rightarrow \mathbf{N}$$

PN struktúra:

$$N = (P, T, E, W)$$

PN adott kezdőállapottal:

$$PN = (N, M_0)$$

Topológia és jelölések

- Helyek és tranzíciók bemeneti és kimeneti elemei:

$t \in T$ bemeneti helyei:

$$\bullet t = \{p \mid (p, t) \in E\}$$

$t \in T$ kimeneti helyei:

$$t \bullet = \{p \mid (t, p) \in E\}$$

$p \in P$ bemeneti tranzíciói:

$$\bullet p = \{t \mid (t, p) \in E\}$$

$p \in P$ kimeneti tranzíciói:

$$p \bullet = \{t \mid (p, t) \in E\}$$

- Csomópontok $P' \subseteq P$ és tranzíciók $T' \subseteq T$ részhalmazára:

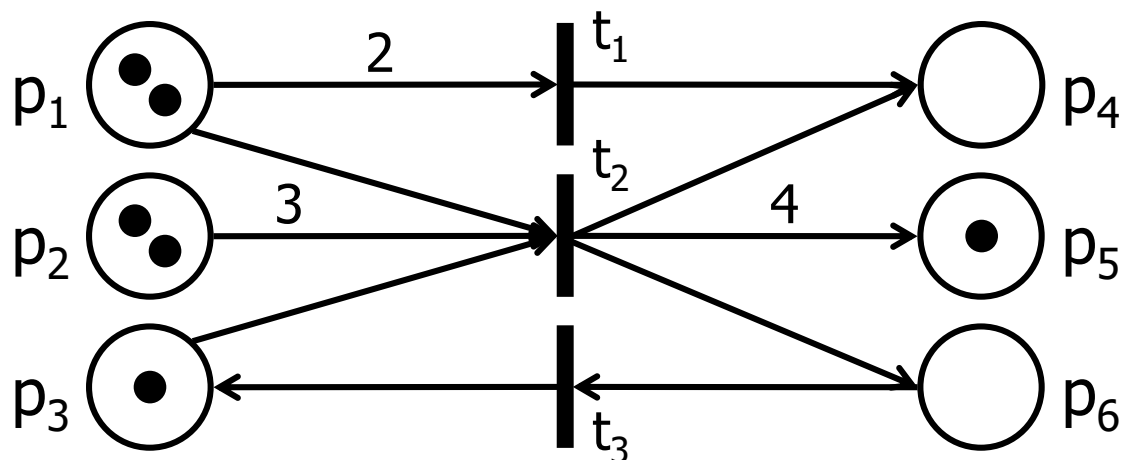
$$\bullet P' = \bigcup_{p \in P'} \bullet p$$

$$\bullet T' = \bigcup_{t \in T'} \bullet t$$

$$P' \bullet = \bigcup_{p \in P'} p \bullet$$

$$T' \bullet = \bigcup_{t \in T'} t \bullet$$

Topológia példa



$$\bullet p_1 = \emptyset$$

$$\bullet p_2 = \emptyset$$

$$\bullet p_3 = \{t_3\}$$

$$\bullet p_4 = \{t_1, t_2\}$$

$$\bullet p_5 = \{t_2\}$$

$$\bullet p_6 = \{t_2\}$$

$$p_1 \bullet = \{t_1, t_2\}$$

$$p_2 \bullet = \{t_2\}$$

$$p_3 \bullet = \{t_2\}$$

$$p_4 \bullet = \emptyset$$

$$p_5 \bullet = \emptyset$$

$$p_6 \bullet = \{t_3\}$$

$$\bullet t_1 = \{p_1\}$$

$$\bullet t_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$\bullet t_3 = \{p_6\}$$

$$t_1 \bullet = \{p_4\}$$

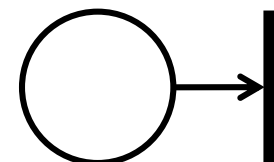
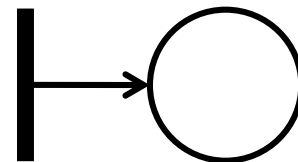
$$t_2 \bullet = \{p_4, p_5, p_6\}$$

$$t_3 \bullet = \{p_3\}$$

Speciális csomópontok és hálók

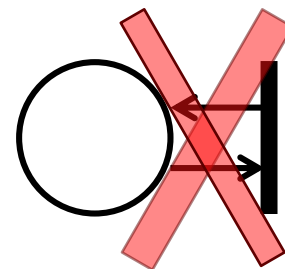
Forrás illetve nyelő tranzíciók:

- Egy $t \in T$ **forrás** tranzíció:
 - Bemenő hely nélküli, azaz $\bullet t = \emptyset$
 - Forrás tranzíció minden esetben tud tüzelni
- Egy $t \in T$ **nyelő** tranzíció:
 - Kimenő hely nélküli, azaz $t \bullet = \emptyset$



Tiszta Petri hálók:

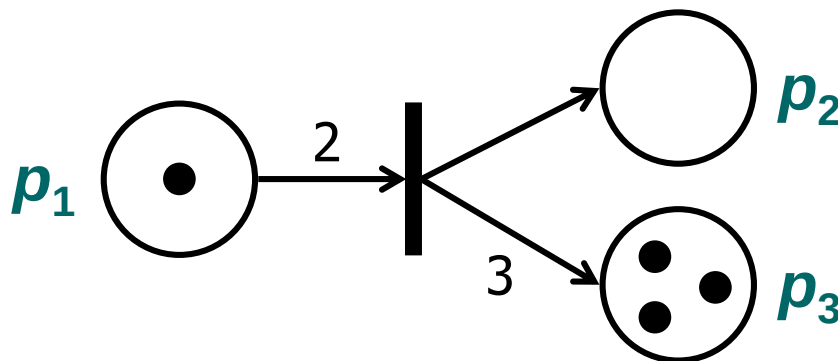
- Egy PN **tiszta**, ha nincs benne önhurok, azaz $\forall t \in T : \bullet t \cap t \bullet = \emptyset$



Állapotvektor: token eloszlás vektor

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{\pi} \end{bmatrix}$$

- Kezdőállapot: M_0 kezdő tokeneloszlás
- Példa:



$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \end{matrix}$$

Dinamikus viselkedés:
Engedélyezettség, tüzelés,
állapot trajektória

Dinamikus viselkedés

Petri hálók működésének egy lépése (állapotváltozás):

Tranzíció „tüzelése”

- Eredeti állapot: eredeti tokeneloszlás
- Tüzelés végrehajtása
 1. Engedélyezettség fennállása
 2. Tokenek elvétele a bemeneti helyekről
 3. Tokenek kirakása a kimeneti helyekre
- Új állapot: megváltozott tokeneloszlás

Engedélyezettség feltétele

- Egy $t \in T$ tranzíció engedélyezett, ha minden bemeneti helyét legalább annyi token jelöli, mint onnan a tranzícióba vezető él súlya
 - Azaz egy $t \in T$ tranzíció engedélyezett, ha minden bemeneti helyét legalább $w^-(p, t)$ token jelöli
 - Itt $w^-(p, t)$ a p -ből t -be vezető $e = (p, t)$ él $w(e)$ súlya
- Formálisan felírva:
 - Egy t tranzíció tüzelése engedélyezett, ha

$$\forall p \in \bullet t : m_p \geq w^-(p, t)$$

Tüzelés meghatározása

- Engedélyezett tranzíció „tetszés szerint **tüzelhet**”
 - Azaz tüzel vagy nem tüzel („fire at will”)
 - Implicit időfogalom: Nincs időzítés, a tüzelés bármikor megtörténhet
 - Az időzítetlen Petri háló minden lehetséges konkrét időzítés szerinti viselkedést lefed
- **Egyszerre csak egy** tranzíció tüzelhet
- Ha több tranzíció engedélyezett:
 - Engedélyezett tranzíciók közül ki kell választani **egyet**, **ami tüzelhet**
 - Véletlen választással $\Rightarrow$ **Nemdeterminisztikus működés**

Az állapotváltozás nagysága

A t tranzíció tüzelése:

- Elvesz $w^-(p, t)$ token a $p \in \bullet t$ bemeneti helyekről
 - Itt $w^-(p, t)$ nem más, mint a $p \rightarrow t$ él súlya
- Kitesz $w^+(t, p)$ token a $p \in t\bullet$ kimeneti helyekre
 - Itt $w^+(t, p)$ nem más, mint a $t \rightarrow p$ él súlya

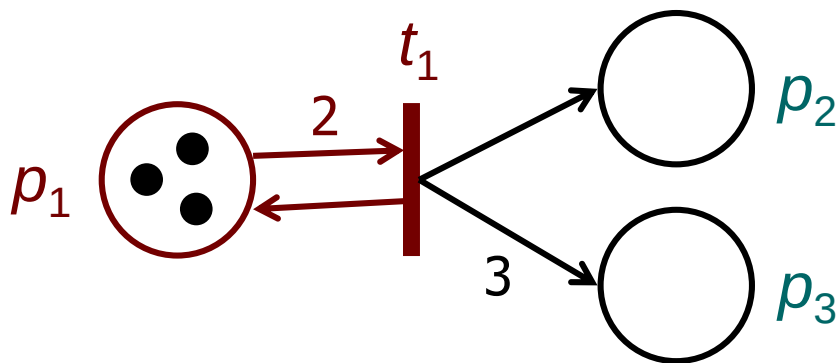
Ha t tranzíció tüzel M állapotban (tokeneloszlással):

- Új állapot: $M' = M + \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{e}_t$
 - ahol $\mathbf{e}_t$ a t tranzíciónak megfelelő egységvektor
 - ahol $\mathbf{W}^T$ a transzponált súlyozott szomszédossági mátrix

Súlyozott szomszédossági mátrix

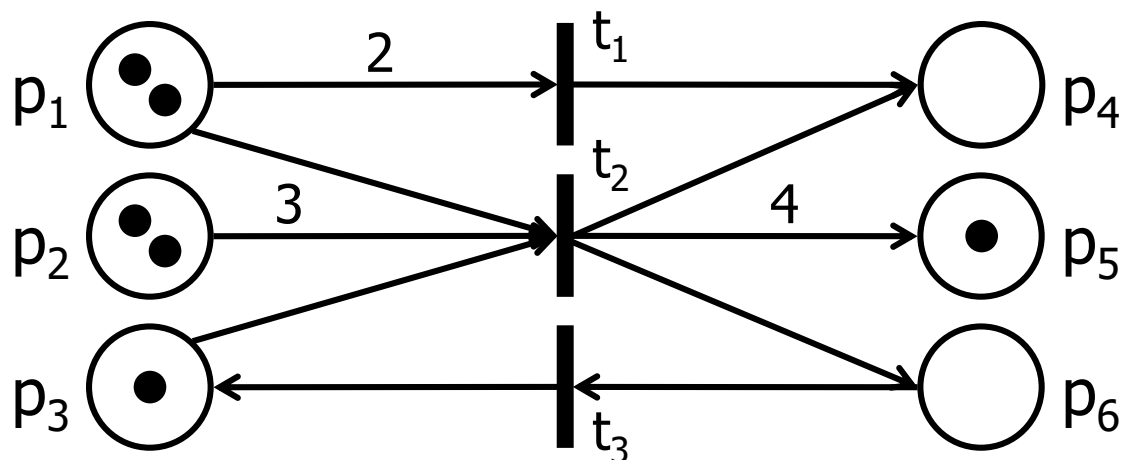
- Súlyozott szomszédossági mátrix: $\mathbf{W} = [w(t, p)]$
 - Élsúlyok alapján vehető fel
 - Dimenziója: tranzíciók x helyek, $\tau \times \pi = |T| \times |P|$
- Szerepe: $w(t, p)$ megadja, hogy ha t tüzel, mennyit változik a p -beli tokenszám:

$$w(t, p) = \begin{cases} w^+(t, p) - w^-(p, t) & \text{ha } (t, p) \in E \text{ vagy } (p, t) \in E \\ 0 & \text{ha } (t, p) \notin E \text{ és } (p, t) \notin E \end{cases}$$



$$\begin{aligned} w(t_1, p_1) &= \\ w^+(t_1, p_1) - w^-(p_1, t_1) &= \\ 1 - 2 &= -1 \end{aligned}$$

Súlyozott szomszédossági mátrix példa



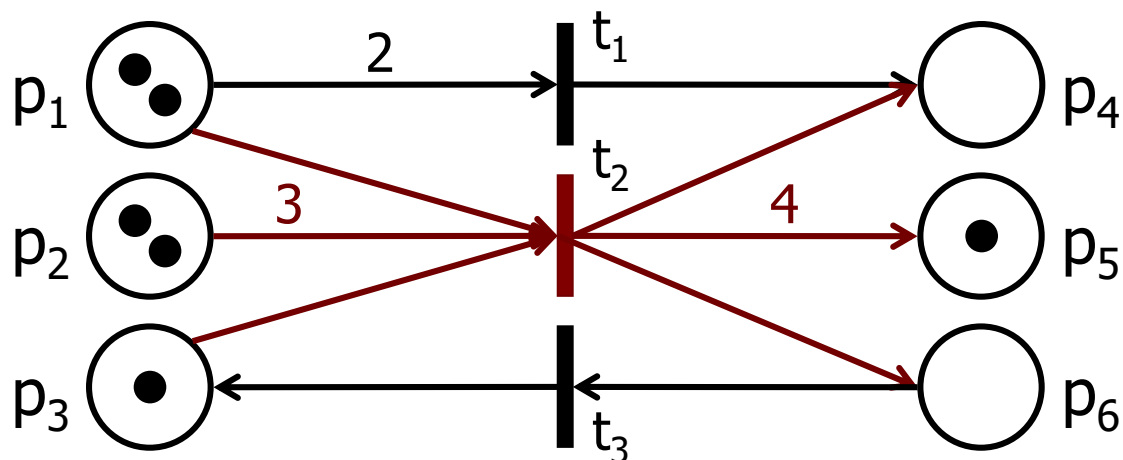
$$W^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W^- = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = W^+ - W^-$$

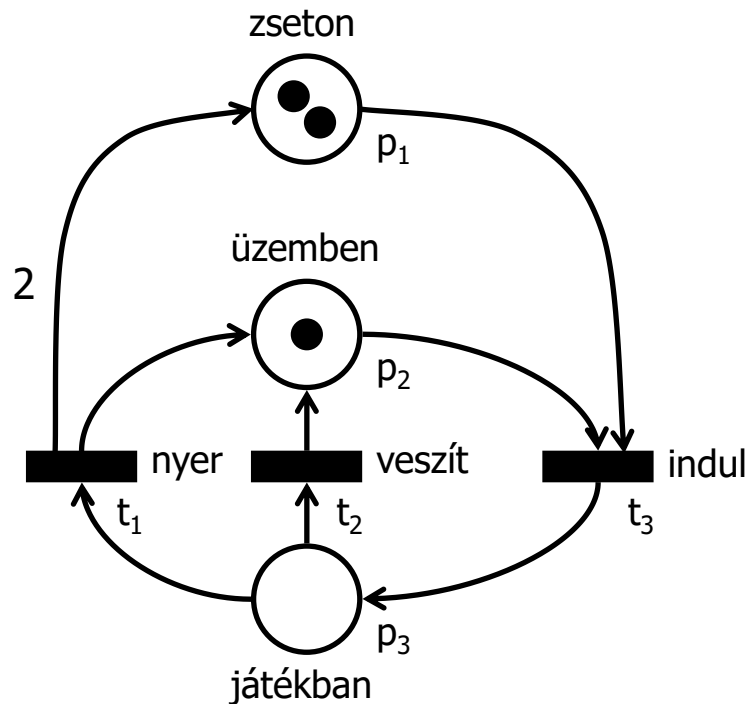
$$W = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix}$$

Súlyozott szomszédossági mátrix példa



$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Példa: Egy tranzíció tüzelése



Állapotváltozás:

$$M' = M + \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

t_3 tranzíció tüzelése a fenti kezdőállapotból:

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tüzelési szekvencia

- Állapotátmeneti trajektória
 - Egymást követő tüzelések hatására felvett állapotok
- Tüzelési szekvencia

$$\underline{\sigma} = \langle M_0 \ t_1 \ M_1 \ \dots \ t_n \ M_n \rangle \text{ vagy } \underline{\sigma} = \langle t_1 \ \dots \ t_n \rangle$$

- Ha az összes tranzíció kielégíti a tüzelési szabályt:
 M_n állapot M_0 -ból elérhető a $\underline{\sigma}$ tüzelési szekvencia által:

$$M_0 \ [\underline{\sigma}] > M_n$$

Kiterjesztett Petri hálók: A tüzelési szemantika módosítása

Petri hálók kiterjesztései

Célok:

- Modellezési erő növelése
- A működés nemdeterminizmusának korlátozása

A formalizmus kiterjesztései:

- **Kapacitáskorlát** rendelése a helyekhez
- **Tiltó élek** használata
- **Prioritás** rendelése a tranzíciókhoz

Helyek kapacitáskorlátja

- Idáig: végtelen kapacitású helyek
 - Nincs korlátozva a tokenek száma egy-egy helyen
 - Végtelen kapacitások, erőforrások megjelenítése
 - Pl. „futó” hely jelölése nem korlátozott:
tetszőleges számú processz lehet futó állapotban
- Véges kapacitású Petri-háló
 - Minden p helyhez opcionálisan $K(p)$ kapacitás:
Az adott helyen elhelyezhető tokenek maximális száma
 - Véges erőforrások megjelenítése
 - Pl. „futó” hely kapacitása:
a futó állapotban lévő processzek maximális száma

Tüzelés véges kapacitású Petri hálóban

- Egy $t \in T$ tranzíció tüzelése akkor engedélyezett, ha

- Elegendő token van a bemeneti helyeken:

$$\forall p \in \bullet t: m_p \geq w^-(p, t)$$

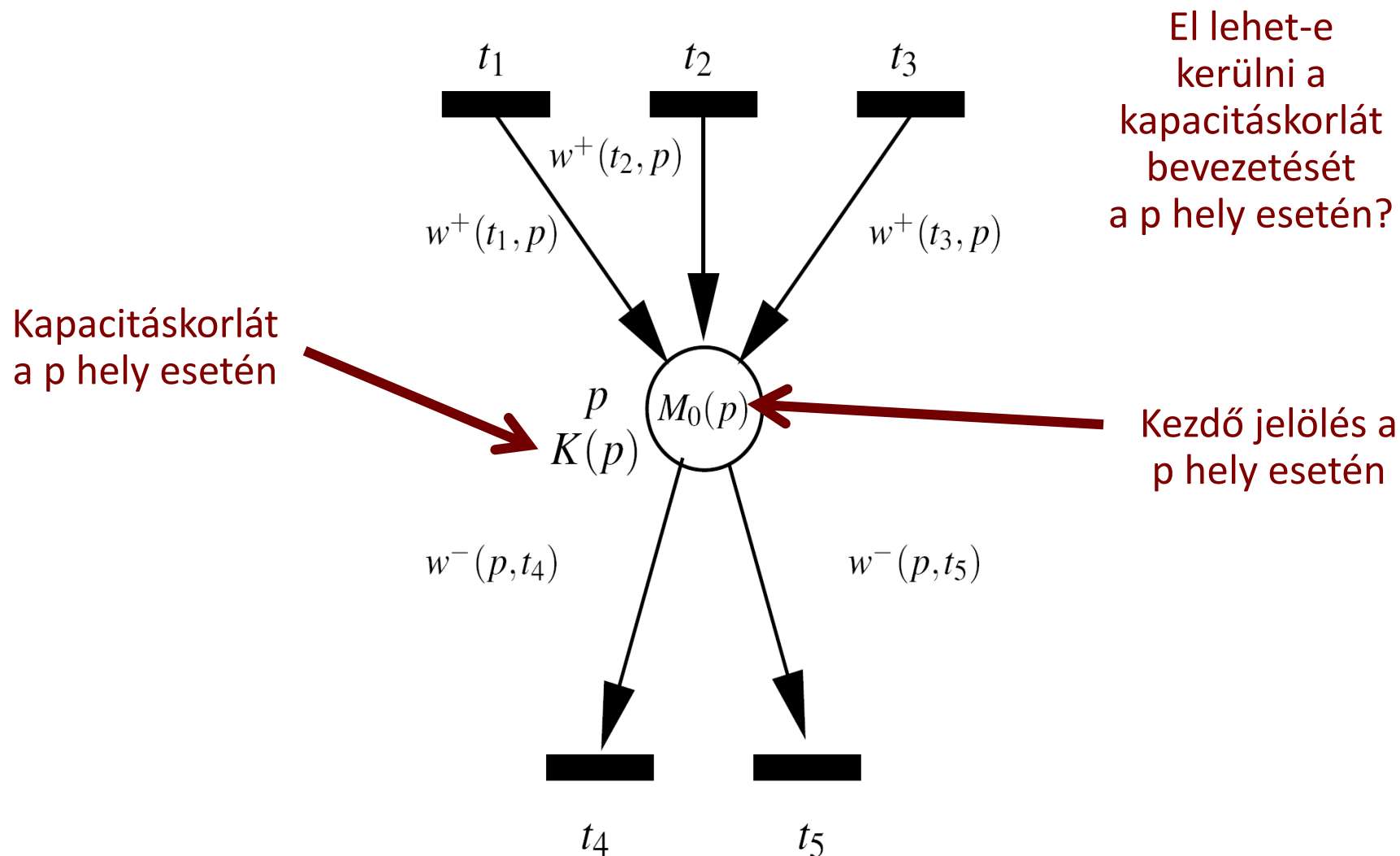
- Fennáll a kapacitáskorlát tüzelés után:

$$\forall p \in t\bullet: m'_p = m_p + w(t, p) \leq K(p)$$

azaz a tranzíció tüzelése egyetlen kimenő p helyre sem juttathat a hely $K(p)$ kapacitásánál több token

- Engedélyezett tranzíció tetszés szerint tüzelhet
- A tüzelés után: $\forall p \in P: m'_p = m_p + w^+(t, p) - w^-(p, t)$

Korlátos kapacitású hely

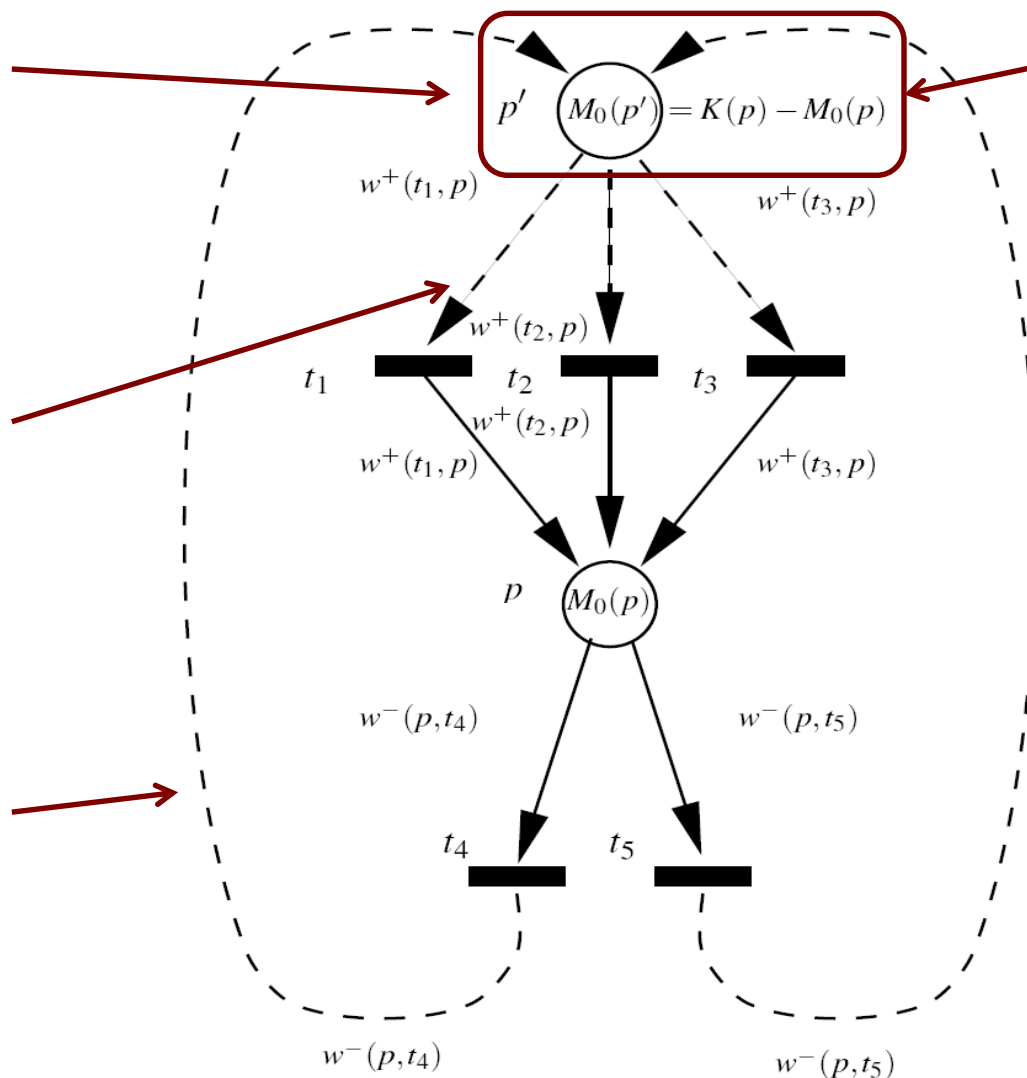


Ekvivalens végtelen kapacitású háló (tisztá PN)

Csak akkor rakható a p helyre token, ha a **kihasználatlan kapacitás** megengedi.

Az odarakott tokenek **csökkentik a kihasználatlan kapacitást**.

A levett tokenek **növelik a kihasználatlan kapacitást**.



Adminisztrációs hely:
Kihasználatlan kapacitás

Annyi token rakható a p helyre, amennyit a kapacitáskorlát és a kezdő jelölés különbsége (azaz a kihasználatlan kapacitás) megenged.

Kiegészítő helytranszformáció 1/2

Kiegészítő helytranszformáció:

- Véges kapacitású Petri hálóból ekvivalens működésű nem véges kapacitású háló képzése

Tiszta Petri hálók esetén a transzformáció menete:

- Minden egyes véges kapacitású p helyhez
 - Rendeljünk hozzá egy járulékos p' adminisztrációs helyet
 - A p' adminisztrációs hely kezdőállapota legyen

$$M_0(p') = K(p) - M_0(p)$$

azaz a p hely még kihasználatlan kapacitása

Kiegészítő helytranszformáció 2/2

- Kiegészítő éleket húzunk be a p' hely és a $t \in \bullet p \cup p\bullet$ tranzíciók között
- Az élek iránya attól függ, hogy t tüzelése növeli vagy csökkenti-e a p helyen levő tokenek számát:
 - Ha $w(t, p) < 0$, azaz a tüzelés elvesz tokenet a p helyről, akkor a t tranzíció és p' hely között (t, p') élet húzunk be $|w(t, p)|$ súllyal
 - Ha $w(t, p) > 0$, azaz a tüzelés berak tokenet a p helyre, akkor a p' hely és a t tranzíció között (p', t) élet húzunk be $w(t, p)$ súllyal

A transzformált háló ekvivalenciája

- Belátható, hogy a kiegészítő helytranszformáció az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:
 - Ha van egy (N, M_0) tiszta, véges kapacitású Petri háló, és alkalmazzuk rá a szigorú tüzelési szabályt (azaz a kapacitáskorlát figyelembevételét),
 - valamint van a fenti transzformáció által létrehozott (N', M'_0) társhálója ennek a Petri hálónak, amelyben a szokásos (gyenge) tüzelési szabályt alkalmazzuk,
 - akkor a két háló tüzelési szekvenciái azonosak.

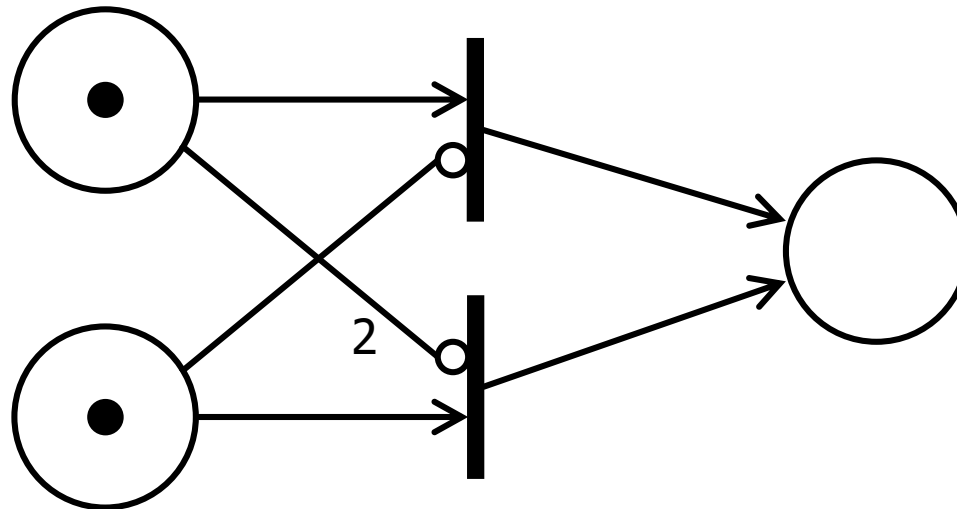
Tiltás és a tiltó él bevezetése

- Klasszikus PN
 - „Ponált” tüzelési feltételek: A tüzelés a feltétel megléte (bemeneti hely jelölése) esetén hajtsdjon végre, a **feltétel teljesülése** vizsgált
- Tiltás kifejezése
 - „Negált” tüzelési feltétel: A tüzelés a feltétel megléte esetén **ne hajtsdjon végre**
 - A bemenő helyeken lévő **feltétel negáltja** vizsgált
 - Modell kiterjesztése: **tiltó él** ← jelölés: kör az él végén
- Tiltó élek használata
 - A Petri hálók kifejezőerejét növelik (Turing gép szintjére)
 - De az analízist bonyolultabbá teszik

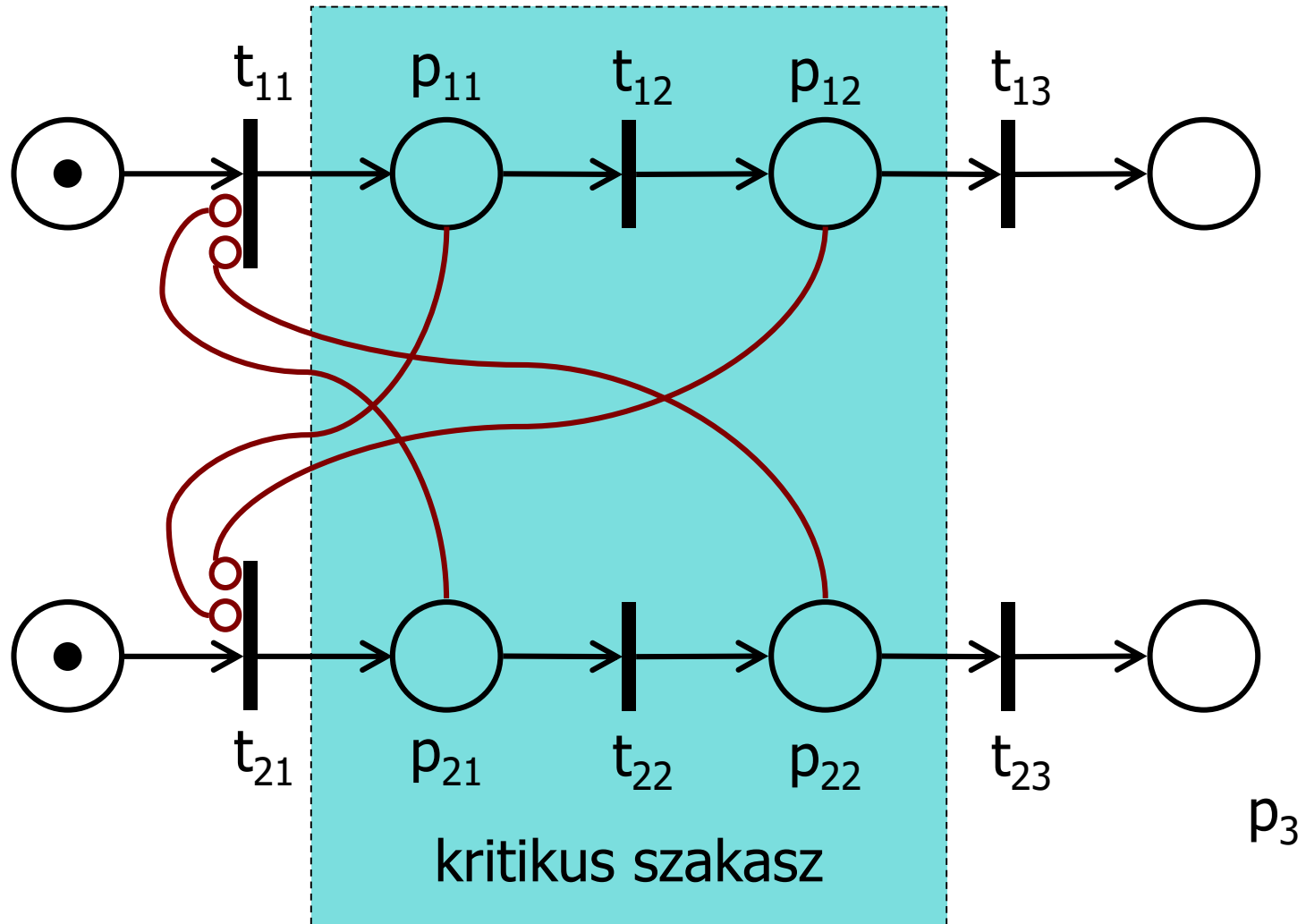
Tüzelési szabály tiltó él esetén

- Tüzelési szabály kiegészítése:

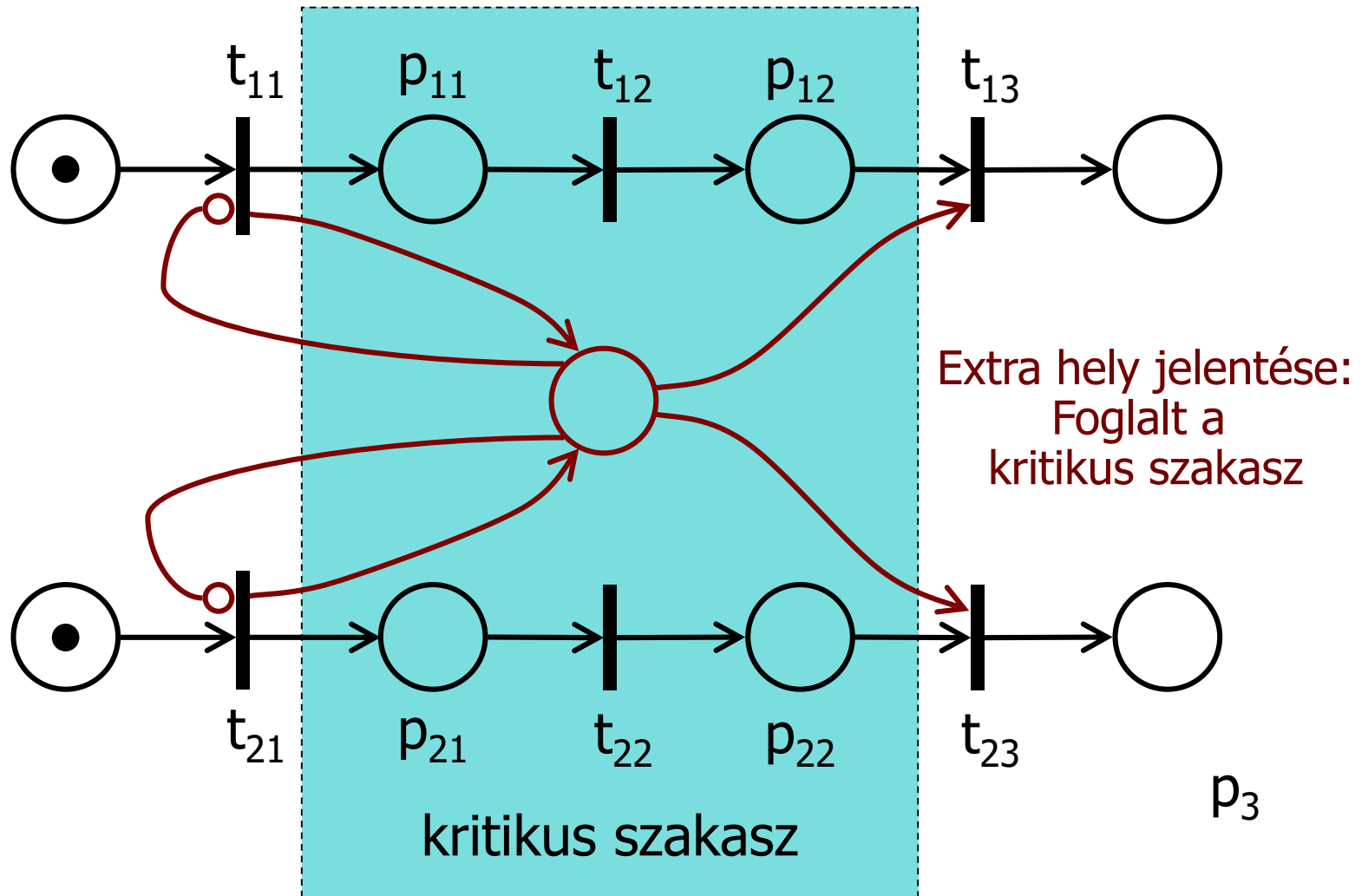
Ha a t tranzícióhoz kapcsolódó bármely (p, t) tiltó él p bemenő helyén a $w^-(p, t)$ élsúlynál nagyobb vagy egyenlő számú token van, akkor a tüzelés nem hajtható végre



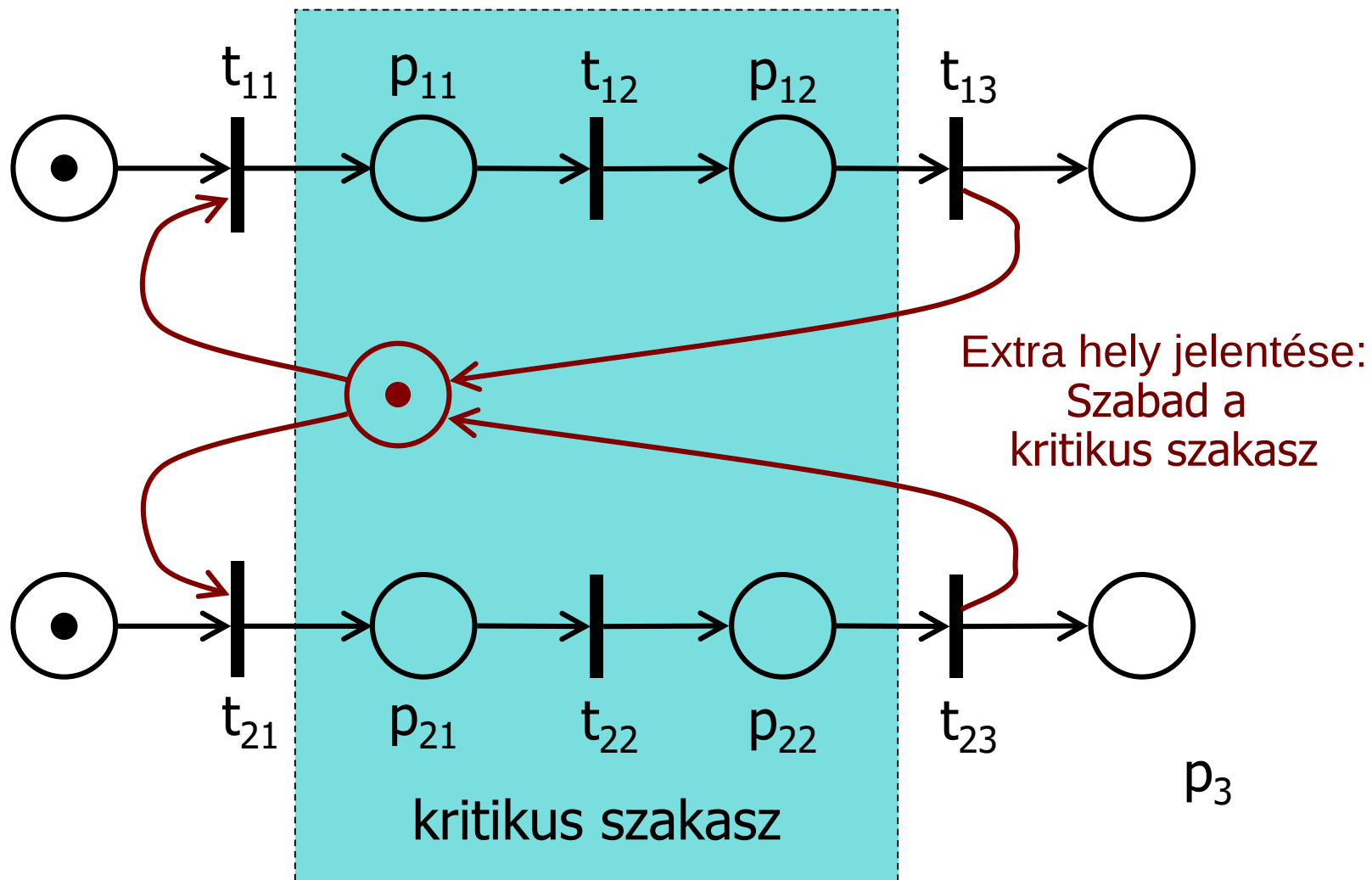
Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élekkel



Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élekkel, elegánsabban

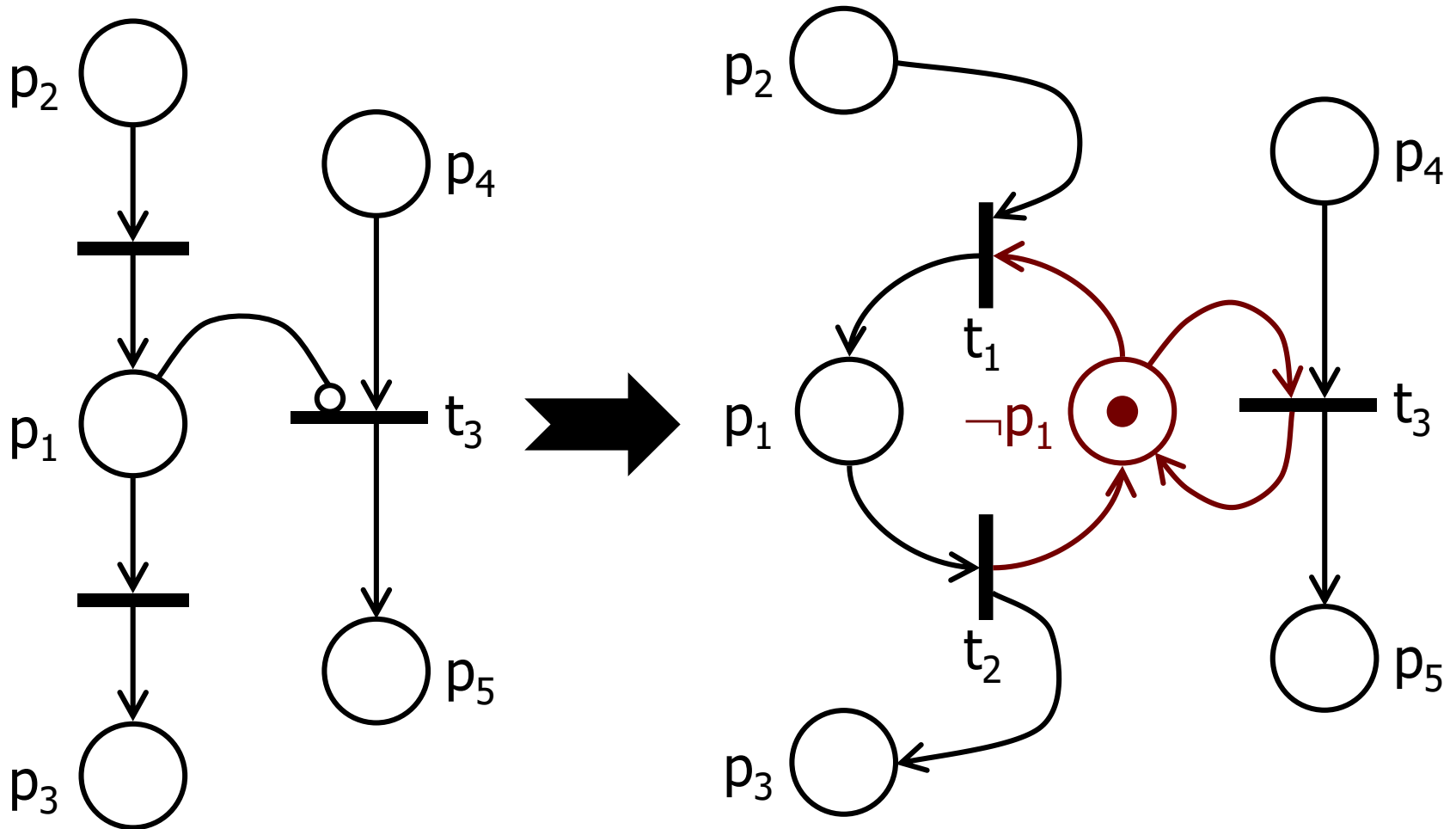


Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élek nélkül



Tiltó él kiváltása egyszerű esetben

Nem általánosan használható megoldás (itt: egyszerű logikai feltételre)



Prioritás bevezetése

- Egyszerre engedélyezett tranzíciók: melyik tüzeljen?
 - Nemdeterminisztikus választás helyett **prioritás** legyen
- Kiterjesztés: Tranzíciókhoz rendelt **prioritás**
- Tüzelési szabály módosítása:
 - Az engedélyezett tranzíciók közül egy alacsonyabb prioritású mindaddig **nem tüzelhet**, amíg van **engedélyezett ÉS magasabb prioritású** tranzíció
 - Prioritási szinten belül továbbra is nemdeterminisztikus a választás!

Bővítések a formális definícióban

Petri háló (PN):

$$PN = \langle P, T, \Pi, E, H, W, M_0 \rangle$$

- Helyek:

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_\pi\}$$

- Tranzíciók:

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_\tau\}$$

$$P \cap T = \emptyset$$

- Prioritások:

$$\Pi : T \rightarrow \mathbf{N}$$

- Normál élek:

$$E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$$

- Tiltó élek:

$$H \subseteq (P \times T)$$

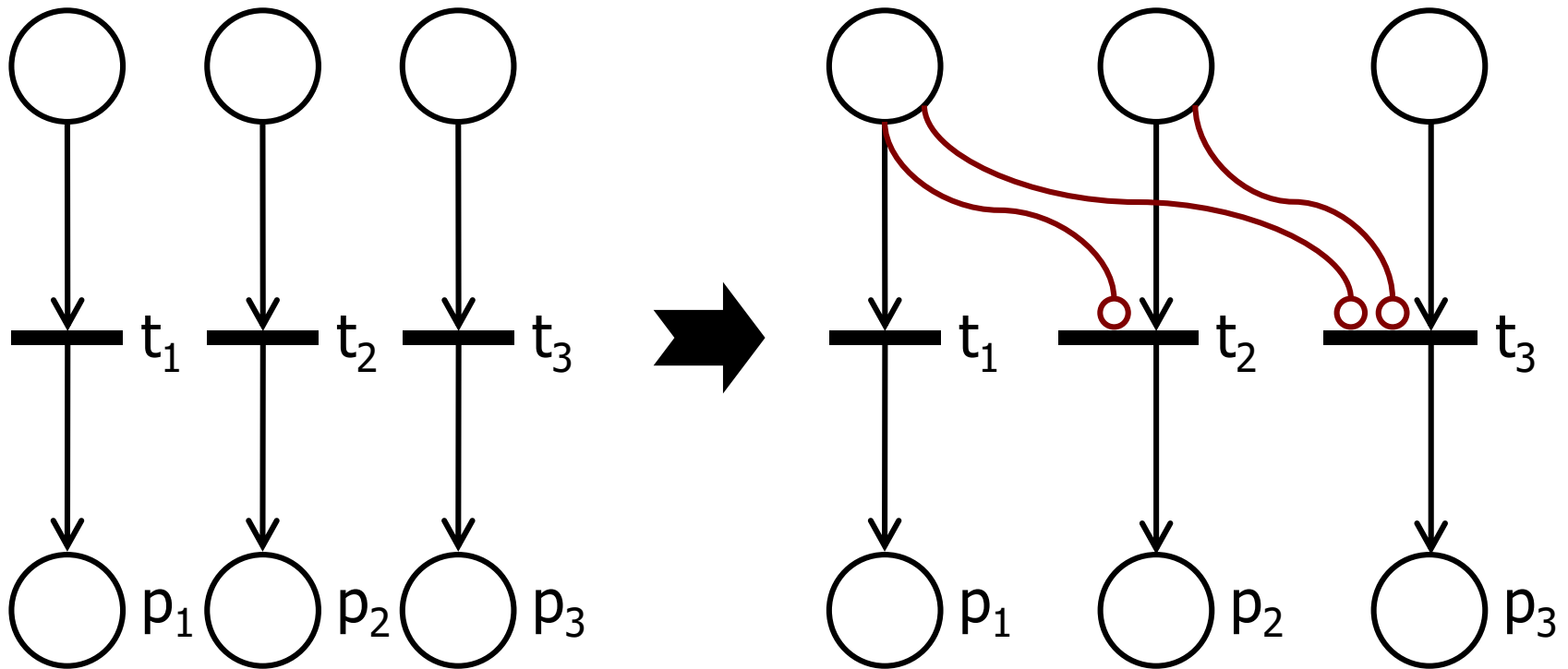
- Súlyfüggvény:

$$W: E \rightarrow \mathbf{N}^+$$

- Kezdőállapot:

$$M_0 : P \rightarrow \mathbf{N}$$

Ötlet: Prioritás helyett tiltó él?

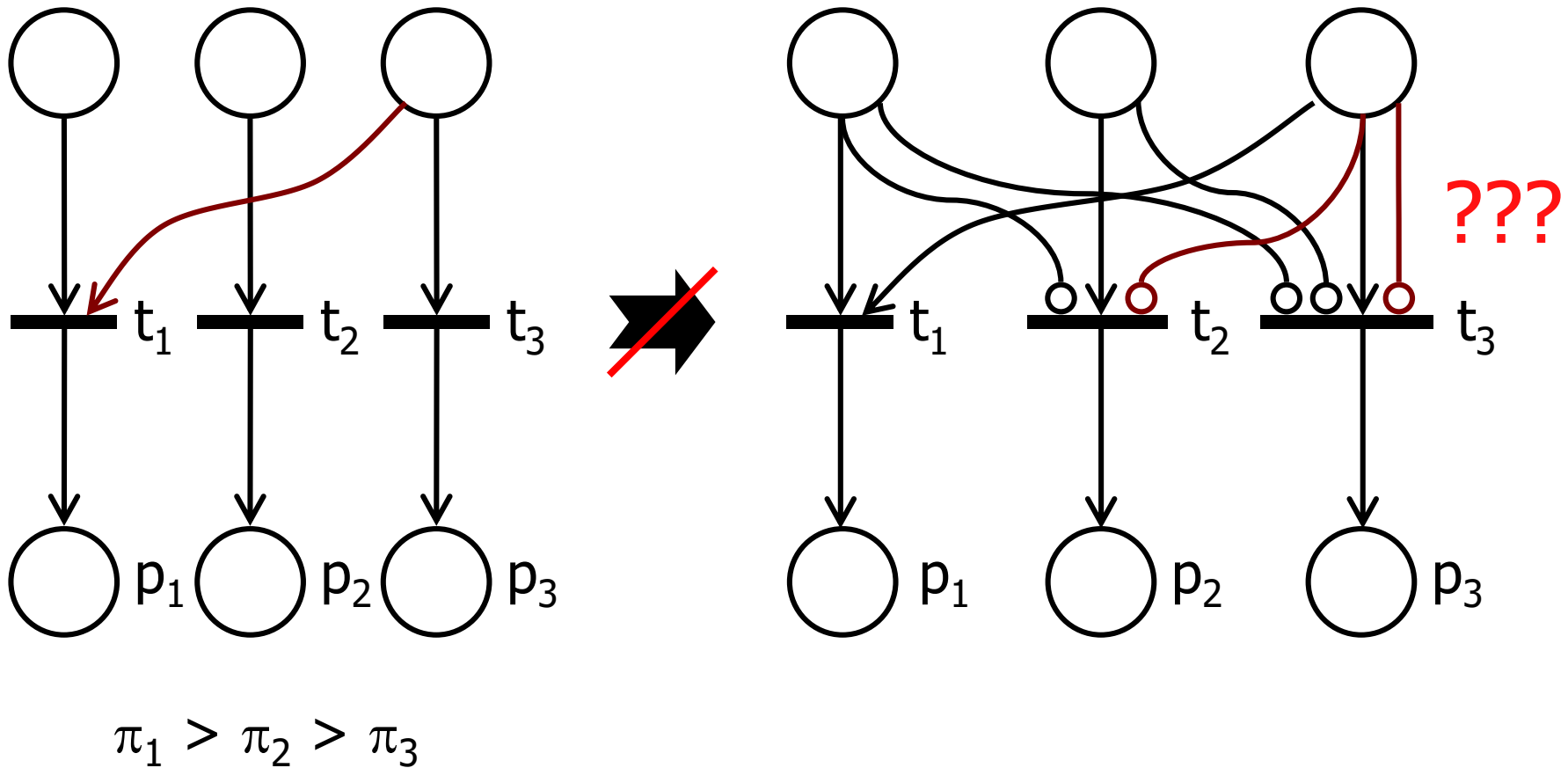


$$\pi_1 > \pi_2 > \pi_3$$

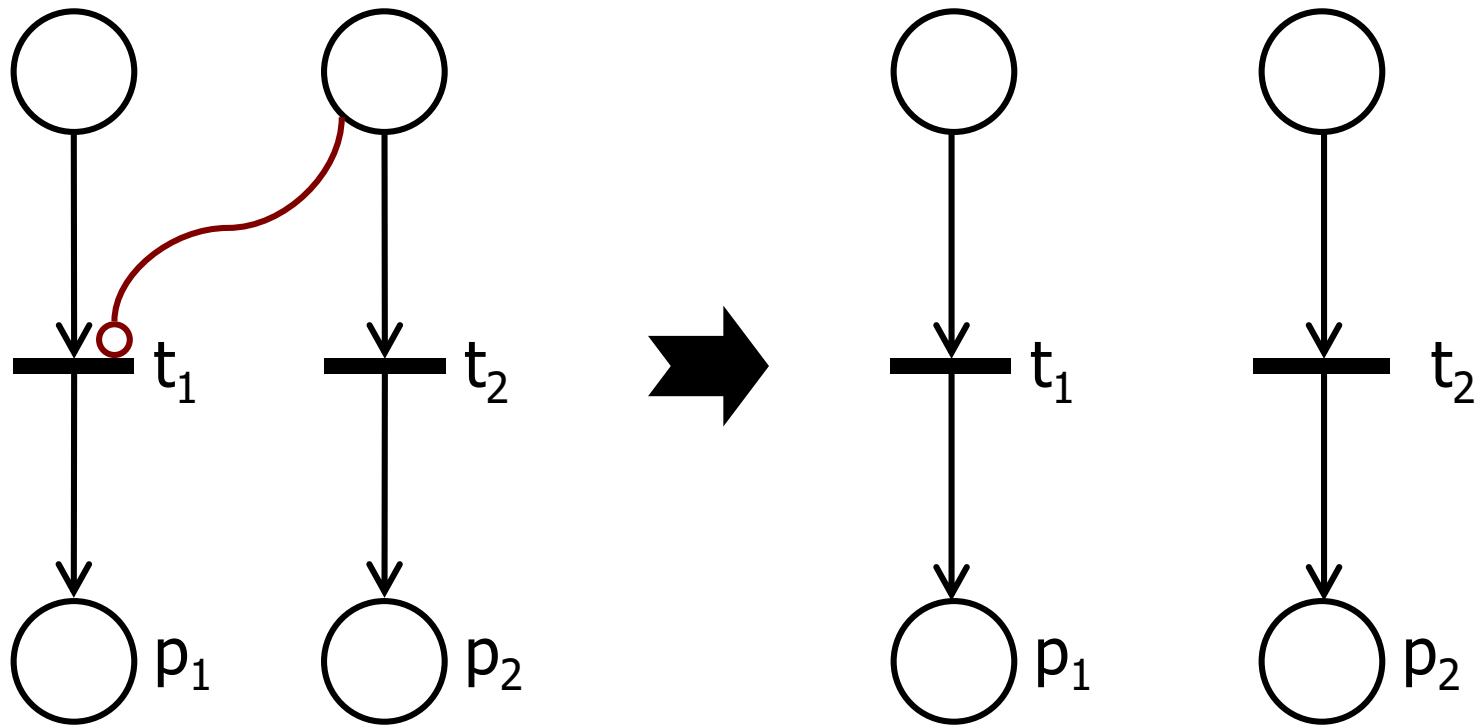
Ötlet: „Nagyobb prioritású tranzíció bemenő helyeiről tiltó éleket húzunk a kisebb prioritású tranzíciókhoz.”

Mennyire általános érvényű ez a konstrukció?

Prioritás helyett tiltó él: nem általános érvényű



Ötlet: Tiltó él helyett prioritás?

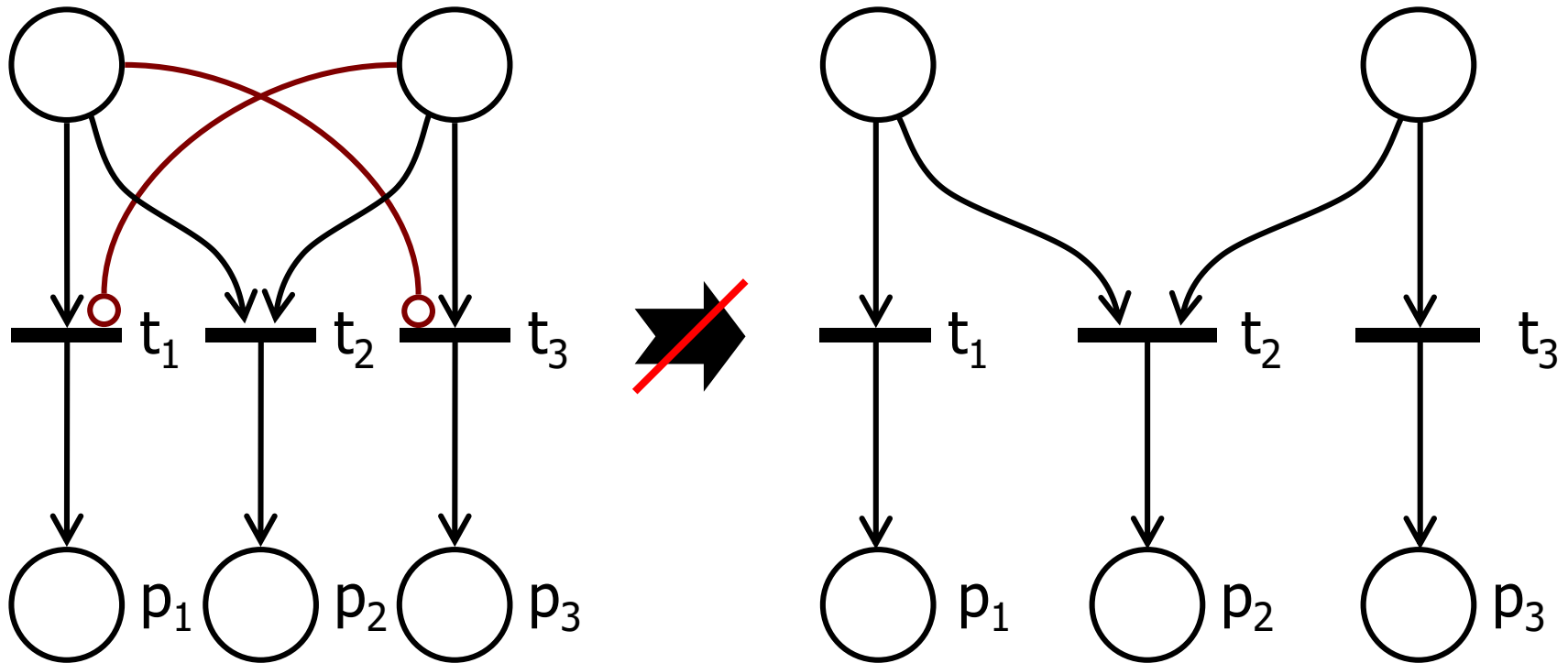


$$\pi_1 < \pi_2$$

Ötlet: „A tiltó éllel letiltott tranzíciónak adunk kisebb prioritást.”

Mennyire általános érvényű ez a konstrukció?

Tiltó él helyett prioritás: nem általános érvényű



$$\pi_1 < \pi_3$$

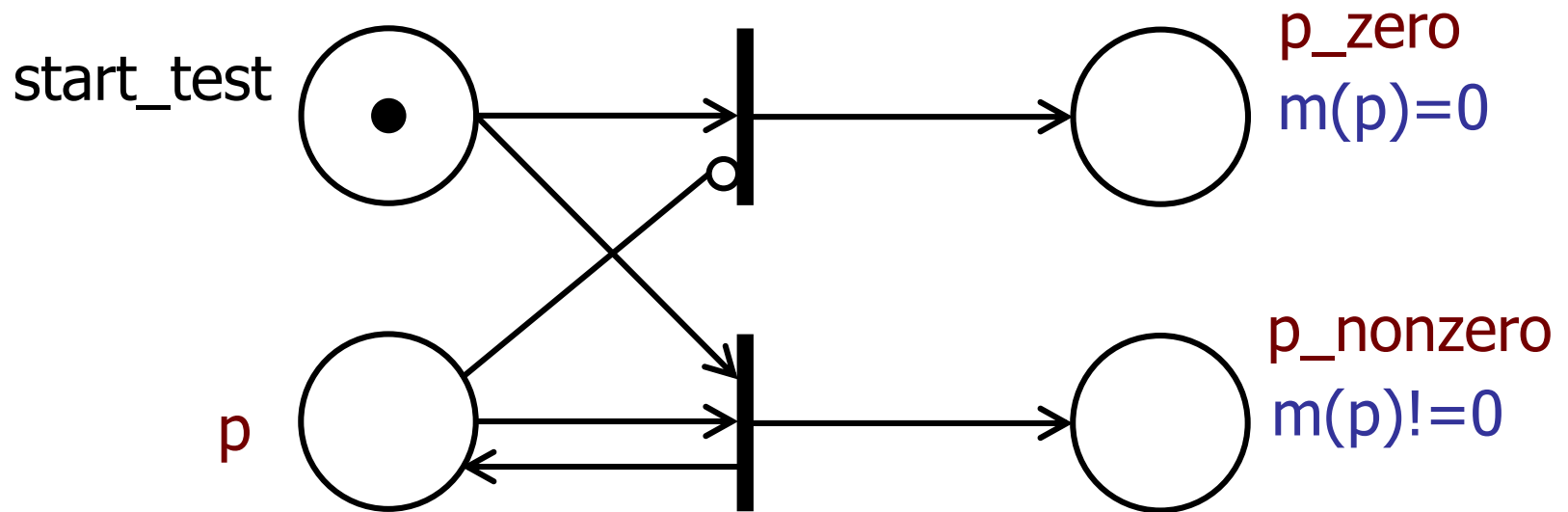
$$\pi_3 < \pi_1$$

???

Kifejezőerő tiltó éllel

- Tiltó él képes „zero testing”-re: $m(p)=0$ vizsgálata

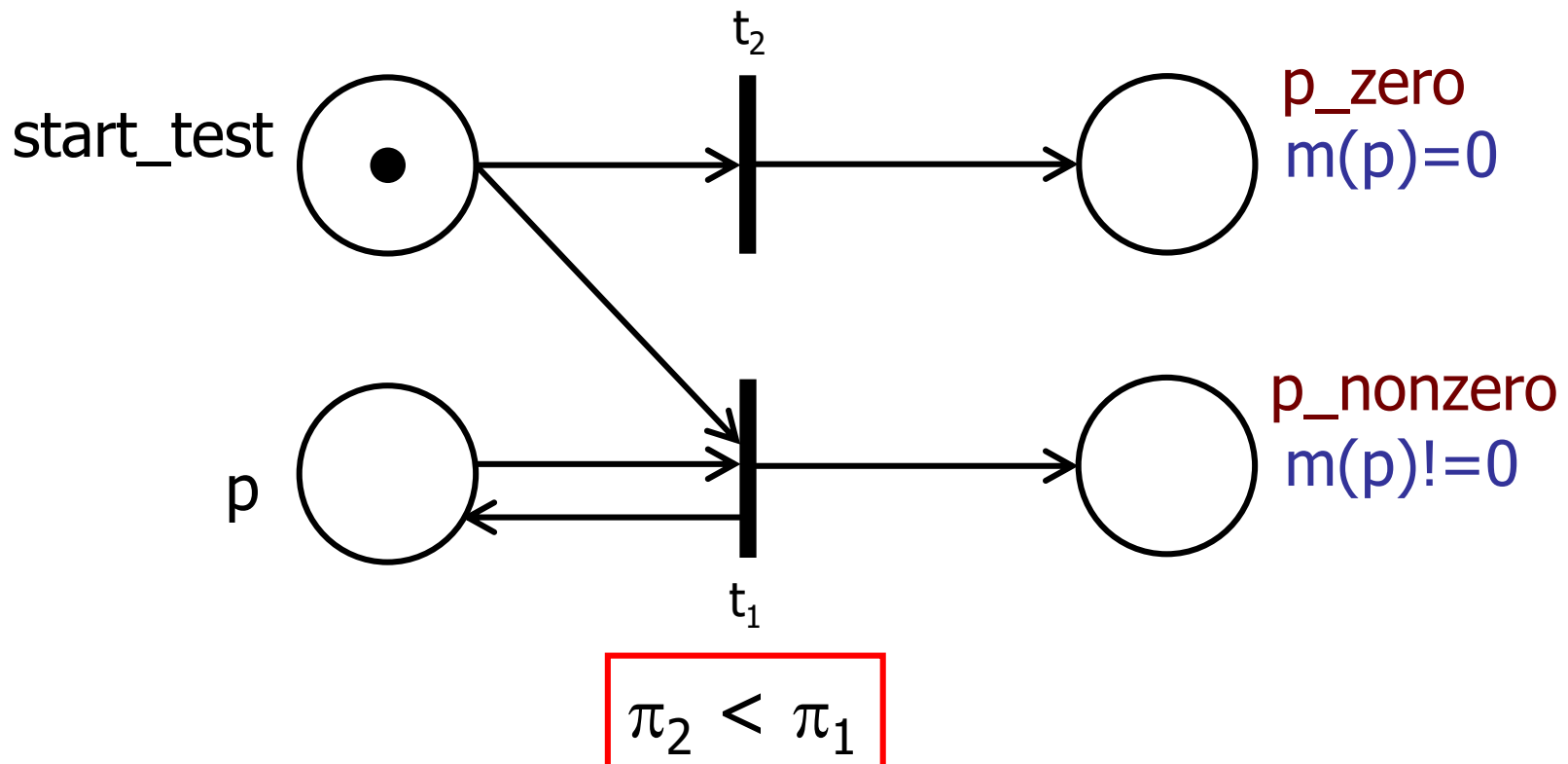
Szeretnénk a hálóban egy p_zero hely jelölésében látni, hogy $m(p)=0$ fennáll-e, illetve $p_nonzero$ jelölésében látni, hogy $m(p) \neq 0$ fennáll-e



Kifejezőerő prioritással

- Prioritás képes „zero testing”-re: $m(p)=0$ vizsgálata

Szeretnénk a hálóban egy p_zero hely jelölésében látni, hogy $m(p)=0$ fennáll-e,
illetve $p_nonzero$ jelölésében látni, hogy $m(p) \neq 0$ fennáll-e



Kifejezőerő összefoglalása

- „Zero testing” képesség lehetővé teszi, hogy minden Turing gép szimulálható Petri hálóval
 - Következmény: nehéz analízis, eldönthetetlen problémák
- A kapacitáskorlát csak szintaktikus konstrukció

Turing gép = Tiltó él + PN = Prioritás + PN

PN = Kapacitáskorlát + PN

J.L. Peterson, *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice-Hall, 1981.

Kiterjesztés nélküli PN kifejező ereje

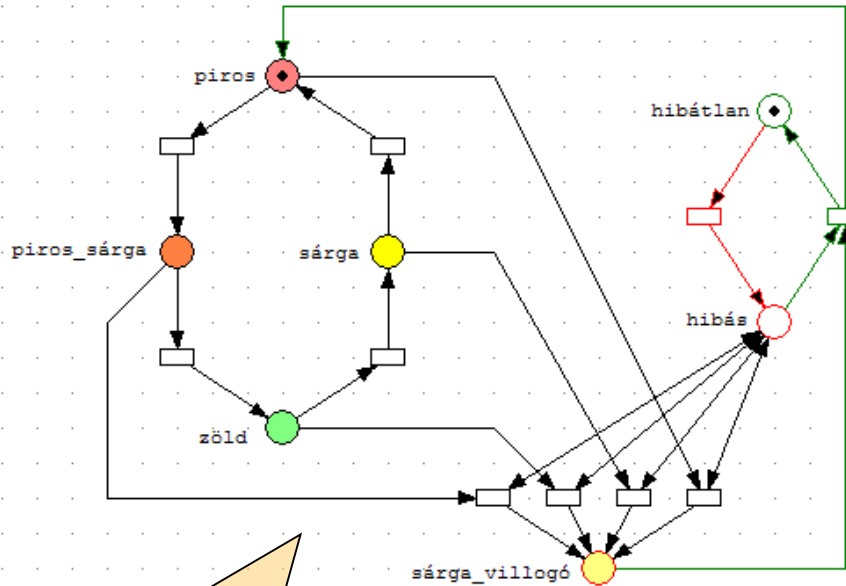
- Vannak-e olyan rendszerek, amelyek **nem modellezhetőek** Petri hálóval, ha egyik kiterjesztést sem használhatjuk?
 - **IGEN**
- A „nem modellezhetőség” kulcsa:
 - Nem korlátos kapacitású hely esetén nem tesztelhető, hogy a helyen **adott k számú token van-e** vagy sem
 - Speciális esetként **$k=0$** , ami „zero testing” probléma néven ismert
 - Belátható, hogy egy megoldás a „zero testing” problémára megoldást ad az általános **k**-val paraméterezett esetre

Példák Petri-hálók készítésére

Egyszerű modellek: Forgalmi lámpa meghibásodással

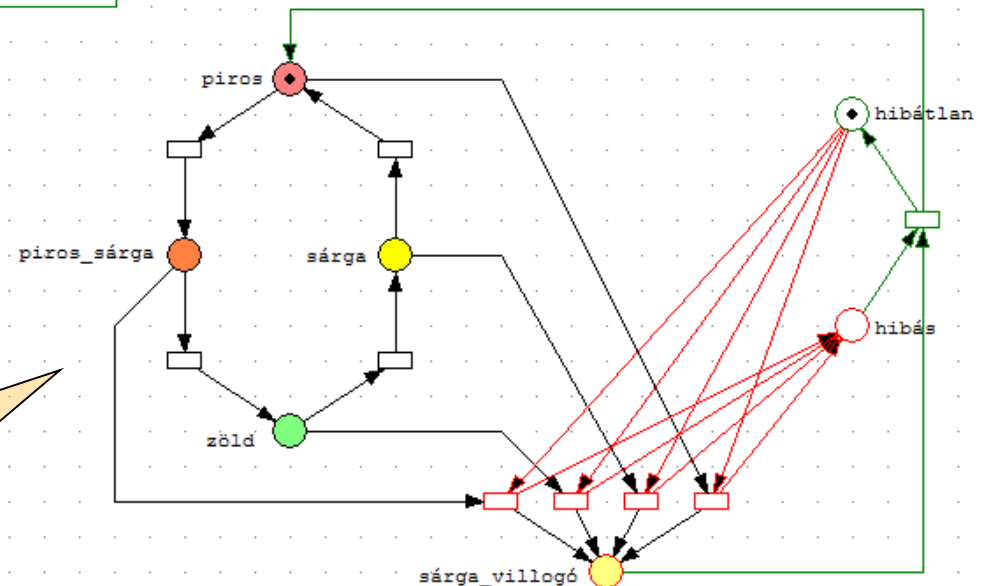
Modellezési
konstrukciók:

- Véletlen esemény
- Szinkronizáció
- Állapotváltozó



Hibás modell: A
meghibásodás csak
egy alternatíva

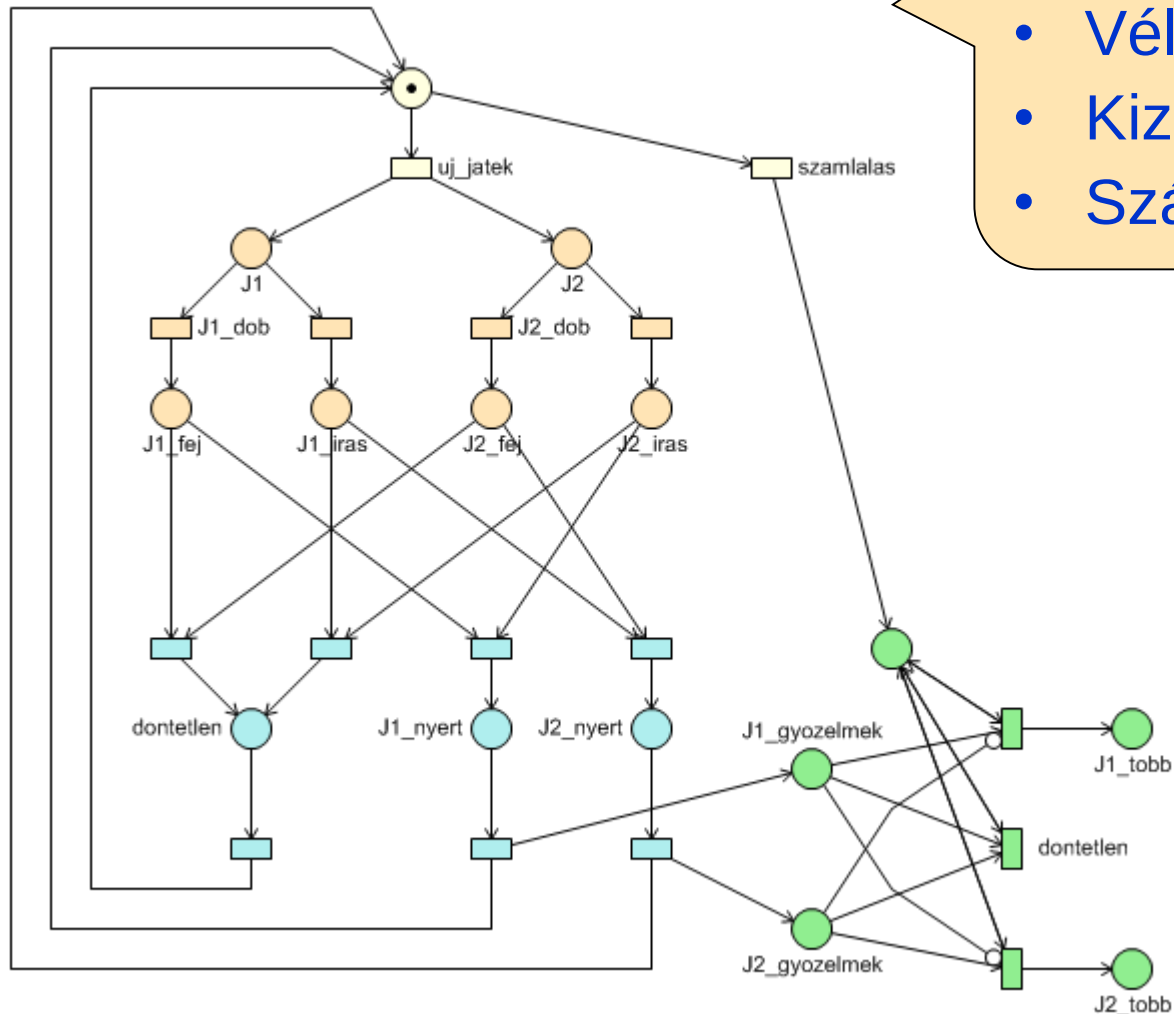
Javított modell: A
meghibásodás
állapotváltást jelent



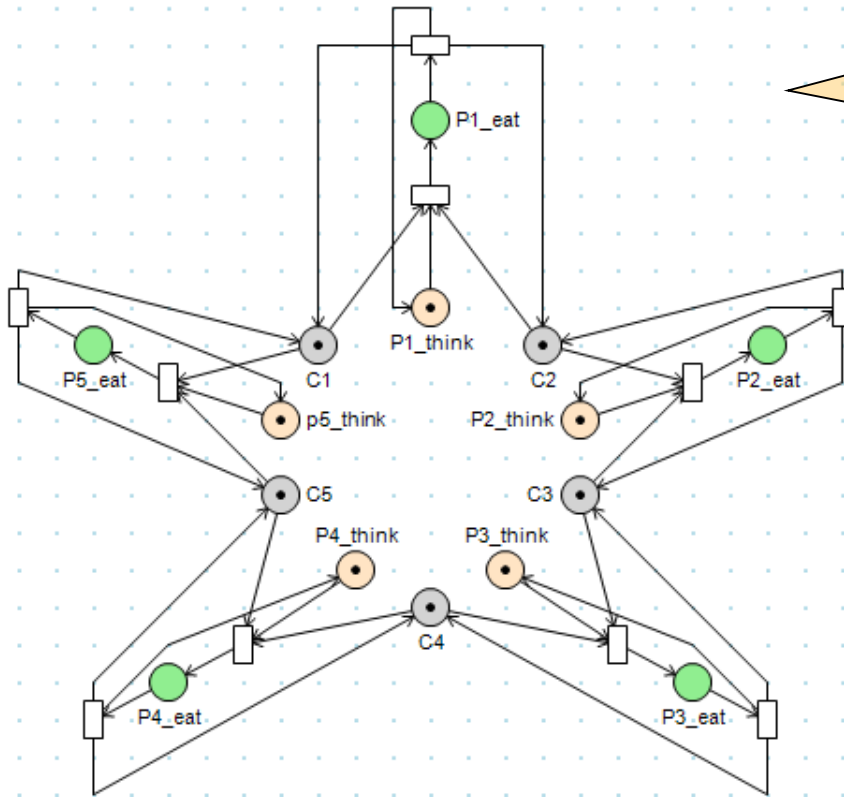
Egyszerű modellek: Pénzfeldobós játék

Modellezési konstrukciók:

- Véletlen választás
- Kizárások (alternatívák)
- Számlálás (döntéshez)



Egyszerű modellek: Étkező filozófusok

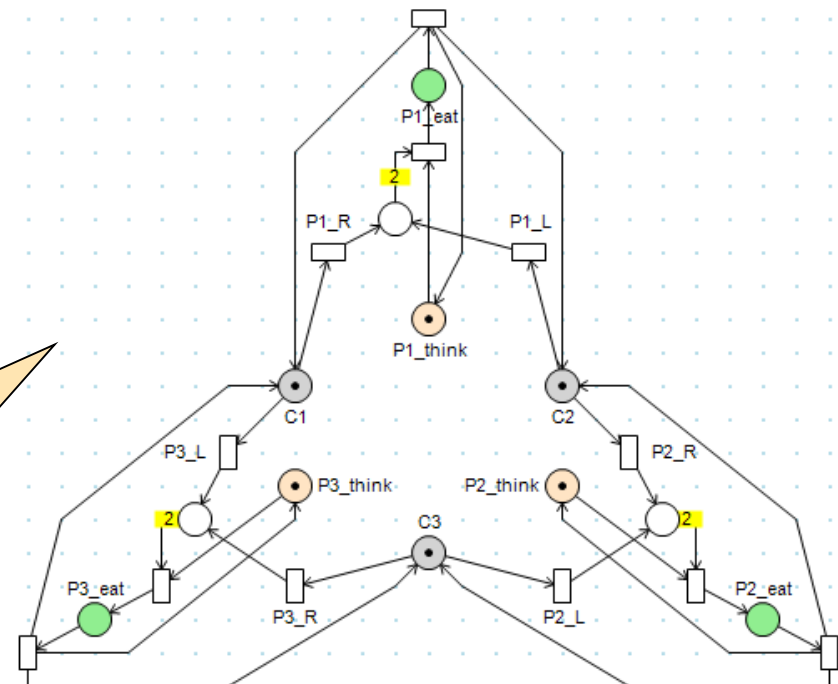


Modellezési konstrukciók:

- Atomi esemény: Két villa felvétele

Modellezési konstrukciók:

- Egy villa felvétele egy független esemény
- Holtpont lehetőség



Összefoglalás

- Petri-hálók felépítése és működése
 - Alapelemek
 - Szintaxis
 - Szemantika
- Kiterjesztések
 - Kapacitáskorlát
 - Tiltó élek
 - Prioritások
- Modellezési példák
 - Konkurens, aszinkron rendszerek