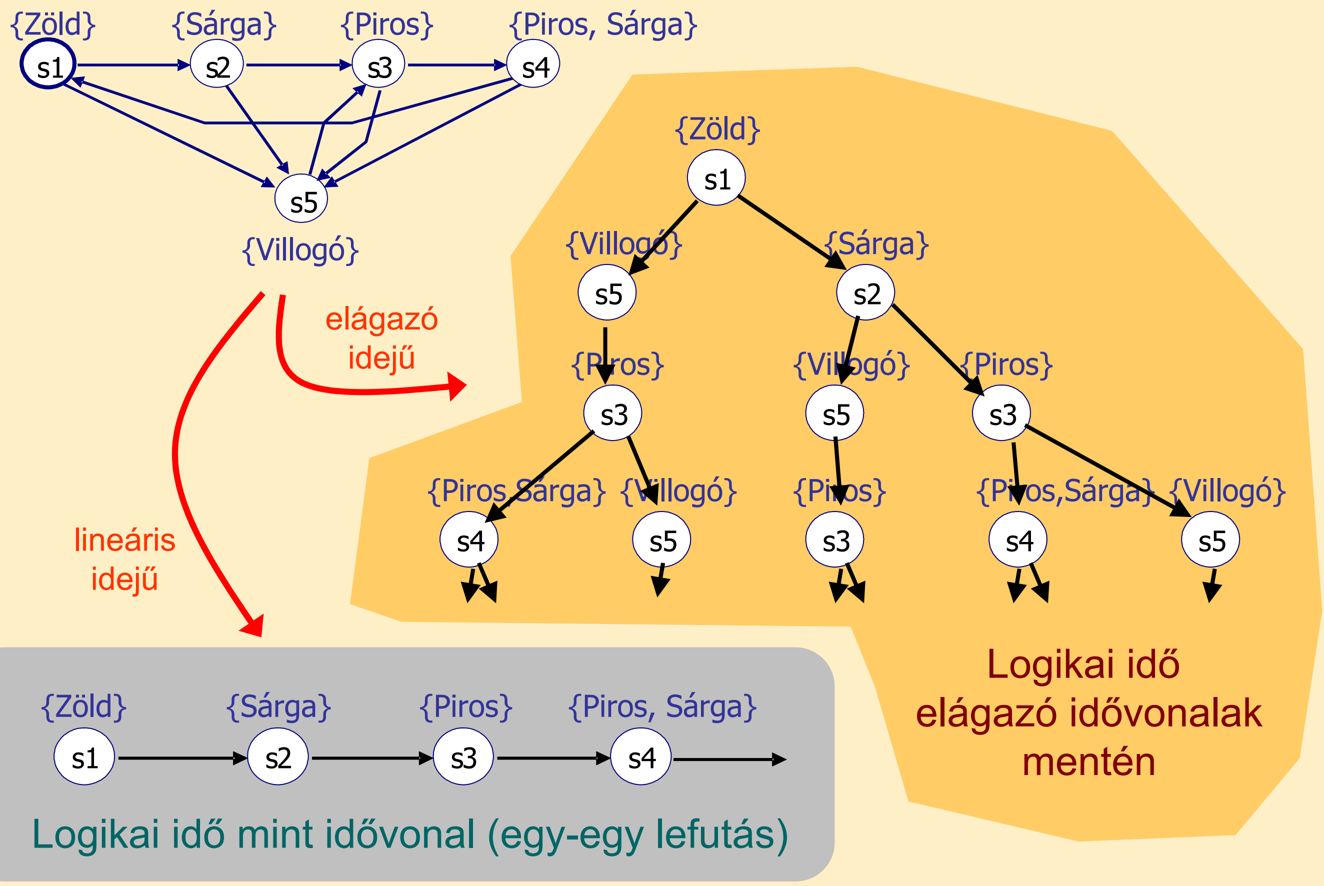
Elágazó idejű temporális logikák: Computational Tree Logic (CTL, CTL*)

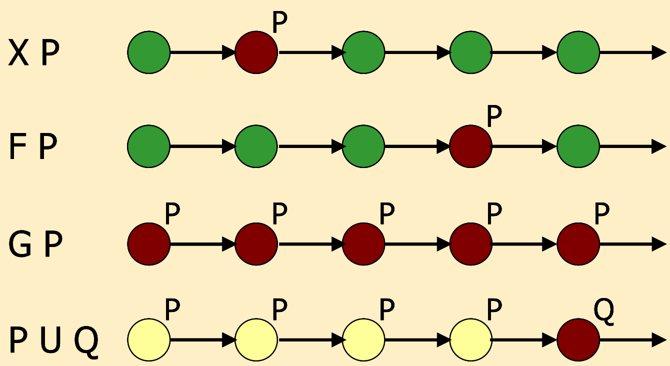
Majzik István
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Lineáris és elágazó idejű temporális logikák



Útvonalak vizsgálata (lineáris TL)

- Egy-egy útvonal állapotain értelmezett operátorok
- F, G, X, U informálisan:
  - F p: „Valamikor p”, egy elérhető állapotban igaz lesz p
  - G p: „Mindig p”, minden elérhető állapotban igaz lesz p
  - X p: „Következő p”, a következő állapotban igaz lesz p
  - p U q: „p amíg q”, egy elérhető állapotban igaz lesz q, és addig minden állapotban igaz p



Elágazások vizsgálata (elágazó TL)

Egy-egy állapotban útvonal kvantorok:

- E p (Exists p): Létezik legalább egy útvonal, ahol a p követelmény teljesül
  - Egy lehetséges elágazás mentén vizsgál
  - Egzisztenciális operátor
- A p (forAll p): Minden útvonalra fennáll, hogy a p követelmény teljesül
  - Minden lehetséges elágazást magába foglal
  - Univerzális operátor

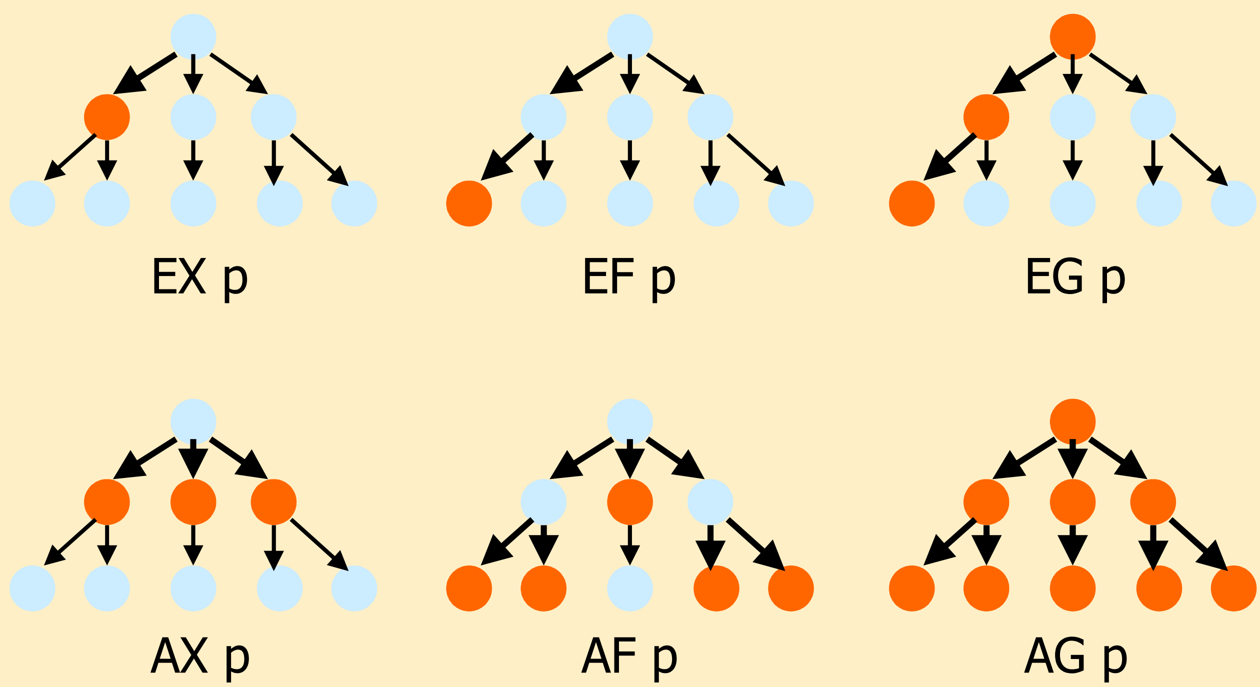
Elágazó idejű temporális logikák

- CTL*: Computational Tree Logic *

  Tetszőleges kombinációja a következőknek:
  - Útvonal kvantorok (E, A),
  - Útvonalakon az állapotokra vonatkozó operátorok (F, G, X, U)

- CTL: Computational Tree Logic
  - Állapotokra vonatkozó operátorokat mindig közvetlenül meg kell előznie útvonal kvantoroknak
  - Állapotokra vonatkozó operátorok nem kombinálhatók

CTL operátorok (példák)



Példák CTL illetve CTL* kifejezésekre

- $A(p \Rightarrow F\ q)$:
  - Minden útvonalra igaz, hogy amennyiben p fennáll az útvonal kezdetén, akkor ezt a jövőben olyan állapot fogja követni, ahol q fennáll
- $E(p \wedge G\ q)$:
  - Létezik olyan útvonal, hogy ennek kezdetén p fennáll és minden állapotán q is fennáll
- $E(XXX\ p \vee F\ q)$:
  - Létezik olyan útvonal, hogy
    - vagy ennek negyedik állapotán fennáll p,
    - vagy valamikor a jövőben q fennáll
- AG EF p:
  - A rendszer bármelyik elérhető állapotára igaz, hogy onnan indulva olyan állapotba vihető a rendszer, ahol p igaz
- EF AG p:
  - Lehetséges, hogy a rendszer olyan állapotba kerül, hogy utána p mindig igaz lesz
- $AG\ (p \Rightarrow AF\ q)$:
  - A rendszer bármelyik elérhető állapotára igaz, hogy ha ott p igaz, akkor bármely onnan induló úton valamikor q mindenképpen igaz lesz

CTL* formális szintaxis

- Állapot-kifejezések: Állapotokon kiértékelhető
  - **S1**: Minden P atomi kijelentés egy állapot-kifejezés
  - **S2**: Ha p és q állapot-kifejezések, $\neg p$ és $p \wedge q$ is
  - **S3**: Ha p útvonal-kifejezés, akkor E p és A p állapot-kifejezések.
- Útvonal-kifejezések: Útvonalakon kiértékelhető
  - **P1**: Minden állapot-kifejezés útvonal-kifejezés
  - **P2**: Ha p és q útvonal-kifejezések, akkor $\neg p$ és $p \wedge q$ is
  - **P3**: Ha p és q útvonal-kifejezések, akkor X p és p U q is

- Érvényes CTL* kifejezések: A fenti szabályok alapján generált állapot-kifejezések

CTL* szemantika: Jelölések

- $M=(S, R, L)$ Kripke-struktúra
- $\pi=(s_0, s_1, s_2,\dots)$ az M egy útvonala, ahol s_0 a kezdőállapot és $\forall i\geq 0$: $(s_i, s_{i+1})\in R$.
- $\pi^i=(s_i, s_{i+1}, s_{i+2},\dots)$ a π útvonal szuffixe i-től.

- $M,\pi \vDash p$ jelentése:

  az M modellben a π útvonalon igaz p

- $M,s \vDash p$ jelentése:

  az M modellben az s állapotban igaz p

CTL* szemantika: Állapot-kifejezések

- **S1**: $M,s \vDash P$ a.cs.a. $P\in L(s)$
- **S2**:
  - $M,s \vDash \neg p$ a.cs.a. $M,s \vDash p$ nem igaz
  - $M,s \vDash p\wedge q$ a.cs.a. $M,s \vDash p$ és $M,s \vDash q$
- **S3**:
  - $M,s \vDash E\, p$ (ahol p útvonal-kifejezés) a.cs.a. létezik $\pi=(s_0, s_1, s_2,\dots)$ útvonal M-ben $s=s_0$ mellett, hogy $M,\pi \vDash p$.
  - $M,s \vDash A\, p$ (ahol p útvonal-kifejezés) a.cs.a. minden $\pi=(s_0, s_1, s_2,\dots)$ útvonalra M-ben ahol $s= s_0$ fennáll igaz, hogy $M,\pi \vDash p$.

CTL* szemantika: Útvonal-kifejezések

- **P1**: $M,\pi \models p$ (ahol p állapot-kifejezés) a.cs.a. $M,s_0 \models p$.
- **P2**:
  - $M,\pi \models \neg p$ a.cs.a. $M,\pi \models p$ nem igaz
  - $M,\pi \models p \wedge q$ a.cs.a. $M,\pi \models p$ és $M,\pi \models q$
- **P3**:
  - $M, \pi \models X\, p$ a.cs.a. $M,\pi^1 \models p$
  - $M, \pi \models p\, U\, q$ a.cs.a

    $\exists j \geq 0 : (M, \pi^j \models q \text{ valamint } \forall 0 \leq k<j\text{: } M,\pi^k \models p)$

CTL formális szintaxis (CTL*-hoz képest)

- Állapot-kifejezések: Állapotokon kiértékelhető
  - **S1**: Minden P atomi kijelentés egy állapot-kifejezés
  - **S2**: Ha p és q állapot-kifejezések, $\neg p$ és $p \wedge q$ is
  - **S3**: Ha p útvonal-kifejezés, akkor E p és A p állapot-kifejezések.
- Útvonal-kifejezések: Útvonalakon kiértékelhető
  - ~~**P1**: Minden állapot-kifejezés útvonal-kifejezés~~
  - ~~**P2**: Ha p és q útvonal-kifejezések, akkor $\neg p$ és $p \wedge q$ is~~
  - ~~**P3**: Ha p és q útvonal-kifejezések, akkor X p és p U q is~~
- Ezek helyett egy szabály:
  - **P0**: Ha p és q állapot-kifejezések, akkor X p és p U q útvonal-kifejezések.

Útvonal-kifejezések nem kombinálhatók, rögtön hozzájuk „ragad” az útvonal kvantor

CTL* de nem CTL

- E(XXX Piros)
  - A többszörös X operátor használat miatt egymásba ágyazott útvonal-kifejezések vannak,
  - azaz a két külső X operátort útvonal-kifejezésre alkalmaztuk
- E(X Piros $\vee$ F Sárga)
  - Boole operátor van útvonal-kifejezések között
- A(X G (Piros $\wedge$ Sárga))
  - Egymásba ágyazott útvonal-kifejezések vannak

CTL formális szemantika

- Állapot-kifejezések:
  - **S1**, **S2**, **S3** szabályok (lásd CTL*) változatlanok.
- Útvonal-kifejezések:
  - **P1**, **P2**, **P3** helyébe lépő új **P0** szabályra:

P0:

- $M,\pi \vDash X\, p$ ahol p állapot-kifejezés a.cs.a. $M,s_1 \vDash p$
- $M,\pi \vDash p\, U\, q$ ahol p,q állapot-kifejezés a.cs.a

$$\exists j \geq 0 : (M, s_j \vDash q \text{ valamint } \forall 0 \leq k < j :\ M, s_k \vDash p)$$

Mintapélda: Kölcsönös kizárás

- Két processzből álló rendszer: P1 és P2
- Processz állapotok a követelmények szempontjából:
  - Kritikus szakaszban van: C1, C2
  - Nem-kritikus szakaszban van: N1, N2
  - Kritikus szakaszba belépést próbál: W1, W2
- Atomi kijelentések:
  AP = {C1, C2, N1, N2, W1, W2}

Mintapélda (folytatás)

- Biztonság: Egyszerre csak egy processz lehet a kritikus szakaszban:

  $AG\ (\neg(C1 \wedge C2))$
- Élőség: Ha egy processz várakozik, akkor előbb-utóbb mindig beléphet:

  $AG\ (W1 \Rightarrow AF(C1))$ és $AG\ (W2 \Rightarrow AF(C2))$
- Egy processz bármikor megpróbálhat belépni

  $AG\ (N1 \Rightarrow EX\ W1)$ és $AG\ (N1 \Rightarrow EX\ W1)$
- Flexibilitás: Nem csak ciklikusan (egymást váltva) léphetnek be a kritikus szakaszba:

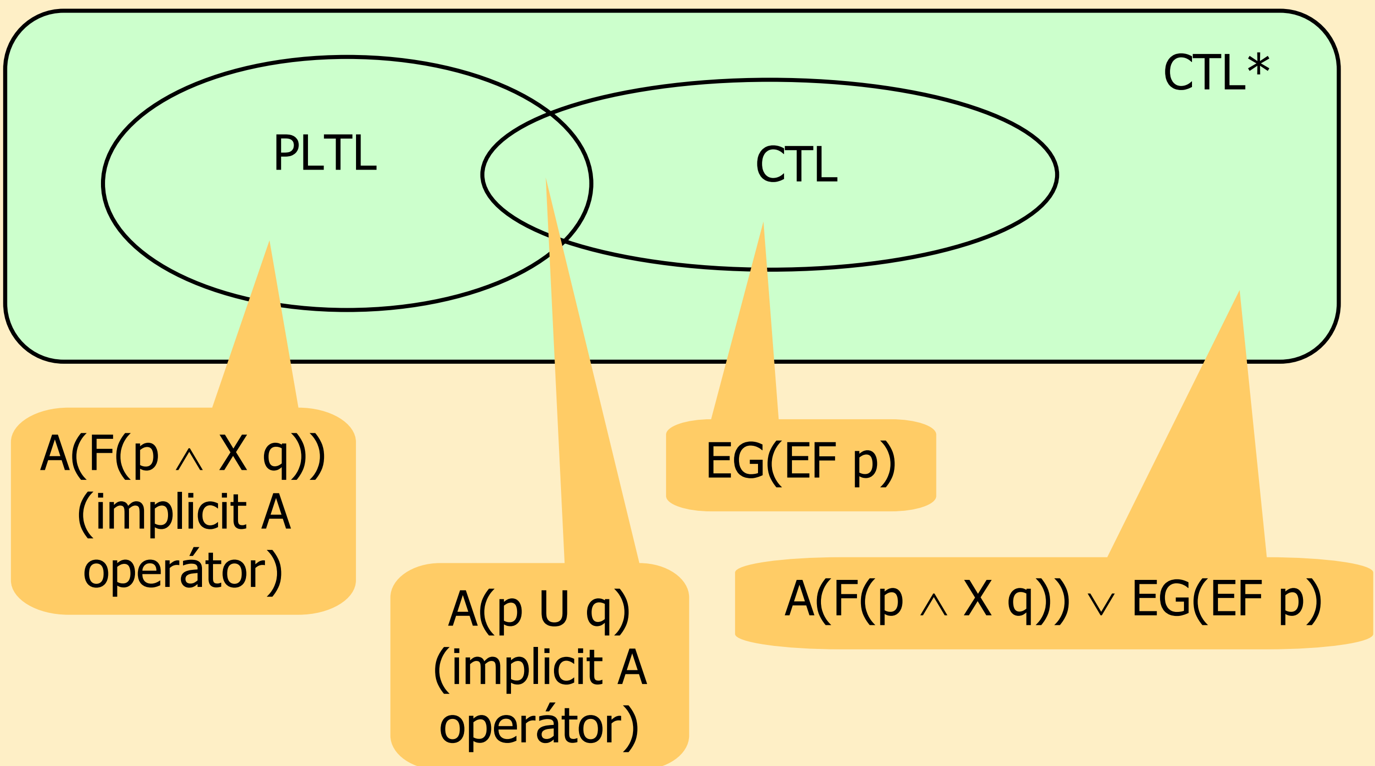
  $EF(C1 \wedge E\ [C1\ U\ (\neg C1 \wedge E[\neg C2\ U\ C1]\ )\ ])$

  $EF(C2 \wedge E\ [C2\ U\ (\neg C2 \wedge E[\neg C1\ U\ C2]\ )\ ])$

Kifejezőképesség

- Egy temporális logika kifejezőképessége nagyobb egy másikénál, ha képes olyan tulajdonság megfogalmazására, amire a másik nem.
- Eddigi tapasztalatok:
  - Lineáris idejű logika nem tudja figyelembe venni a lehetséges elágazásokat
    (implicit „minden útra” jellegű vizsgálat lehetséges)
  - CTL kötöttebb, mint a CTL*,
    ezért kevesebb tulajdonság megfogalmazására képes
  - CTL* magába foglalja a lehetséges PLTL kifejezéseket

LTL, CTL, CTL* kifejezőképessége



Kifejezőképesség - formálisan

- TL1 és TL2 logikák kifejezőképessége azonos, ha minden *M* modellre és annak minden *s* állapotára:

$$\forall p \in \mathrm{TL1}:$$
$$(\exists q \in \mathrm{TL2}:\ (M, s \vDash p \Leftrightarrow M, s \vDash q)),$$
$$\forall q \in \mathrm{TL2}:$$
$$(\exists p \in \mathrm{TL1}:\ (M, s \vDash p \Leftrightarrow M, s \vDash q))$$

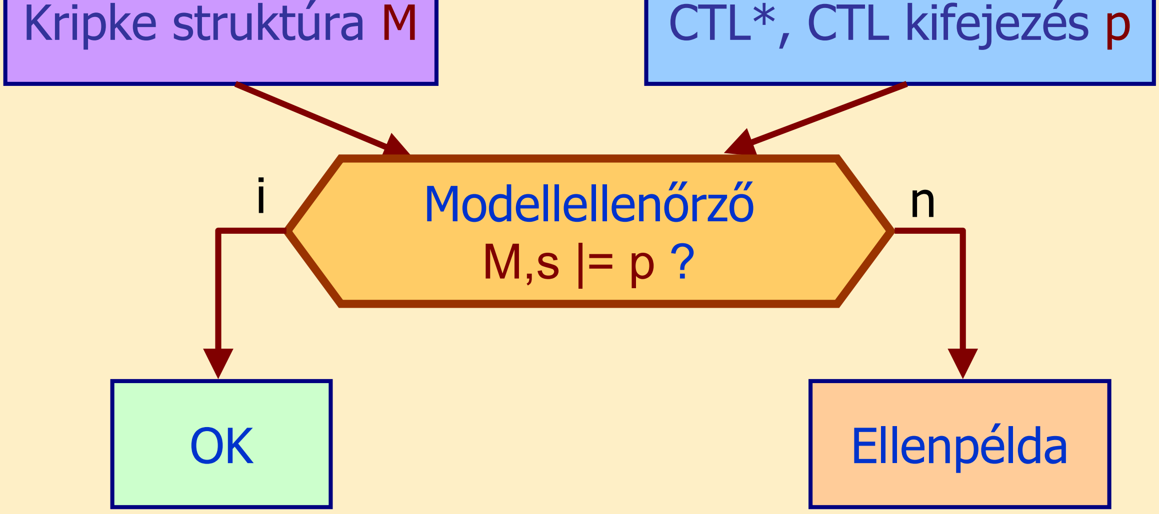
- Ha csak az első kifejezés igaz, akkor TL1 kevésbé kifejező, mint TL2

FairCTL: A „fair” utak megadása

- A követelmények ellenőrzésének korlátozása a „fair” útvonalakra
  - Triviális ellenpéldák kihagyása (pl. mindig reset, minden üzenet elveszik)
- Módosított kvantorok:
  - A_q p: minden „fair” útvonalon
  - E_q p: létezik „fair” útvonal
- Az A_q és E_q kvantorokban szereplő q útvonal-kifejezés formái:
  - GF r: az r állapot-kifejezés végtelen sokszor előfordulhat a „fair” útvonal mentén („nincs kiéheztetés”)
  - FG r: az r állapot-kifejezés csaknem mindig igaz a „fair” útvonal mentén („üzemi állapot beáll”)
- Módosított operátorok jelentése:
  - A_qF p jelentése az A(q ⇒ F p) CTL* kifejezés
  - E_qG p jelentése az E(q ∧ G p) CTL* kifejezés
- FairCTL előnyei:
  - „Fair” útvonalakra korlátozható az ellenőrzés
  - A CTL modell ellenőrzés egyszerűsége megmarad

CTL modell ellenőrzés: Szemantika alapon

A modellellenőrzés feladata



Megközelítés

- Globális modell ellenőrzés:
  - Adott p CTL kifejezés esetén Sat(p) számítása: Azok az állapotok, ahol igaz p
  - Ezeket az állapotokat p-vel címkézzük
  - Ezután s∈Sat(p) egyszerűen vizsgálható egy adott s (kezdő)állapotra
- Sat(p) számítása inkrementálisan történik
  - Címkézett állapothalmazok bővítése
  - A bővítés vége: Nem nő a címkézhető állapotok halmaza

CTL modell ellenőrzés állapot címkézéssel

- Kifejezések felbontása azok struktúrája alapján, és „belülről kifelé” Sat(..) halmaz számítások:
  AF (P ∧ E (Q U R))
- Állapotok címkézése: Hol igaz egy adott kifejezés?
  - Kiindulás: KS címkézve van atomi kijelentésekkel
  - Továbblépés: Címkézés az összetettebb kifejezésekkel
    - Ha p illetve q címkék már vannak, akkor megadható, hol lehet ¬p, p∧q, EX p, AX p, E(p U q), A(p U q) címke
    - Inkrementális címkézés a szemantika definíció alapján!

Hol igaz egy adott kifejezés?

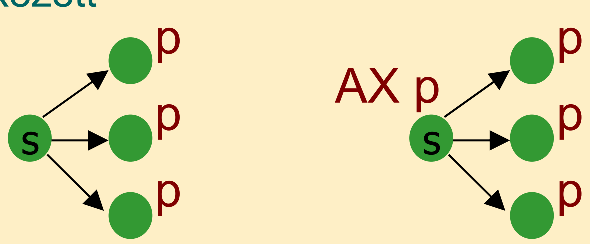
- P (atomi kijelentés) azokban az s állapotokban igaz, ahol $P \in L(s)$
  - Itt P címkeként már szerepel a KS-ban
- $\neg P$ azokban az s állapotokban igaz, ahol $P \notin L(s)$
  - Ezek az állapotok $\neg P$ kifejezéssel címkézhetők
- $p \wedge q$ azokban az s állapotokban igaz, ahol p és q is igaz
  - Egy állapot címkézése lehet $p \wedge q$, ha címkéi között már van p és q

Temporális operátorok: EX, AX, E(U), A(U) esetére kell még megadni a címkézési eljárást

Az AX, EX alakú kifejezések

- EX p azokban az s állapotokban igaz, amelyeknek van olyan rákövetkező állapota, ahol p igaz
  - Egy állapot címkézése lehet EX p, ha van olyan rákövetkező állapota, ami p-vel címkézett

- AX p azokban az s állapotokban igaz, amelyeknek minden rákövetkező állapotában p igaz
  - Egy állapot címkézése lehet AX p, ha minden rákövetkező állapota p-vel címkézett

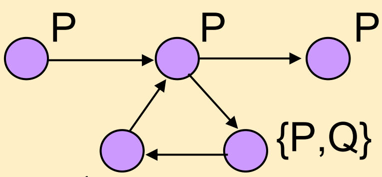


.

Az E(p U q) kifejezések

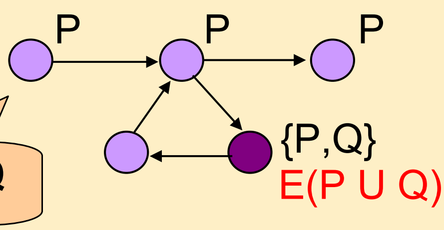
- Hol igaz E(p U q)?
  - Azonosság: $E(p\ U\ q) = q \lor (p \land EX\ E(p\ U\ q))$
  - „Rekurzív” képlet…
- Tehát mely állapotok címkézhetők E(p U q)-val?
  - Ha s címkézett q-val, vagy
  - ha s címkézett p-vel, és legalább egy rákövetkezője már címkézett E(p U q)-val
- Iteráció adódik:
  - q-val már címkézett állapotok adják azokat az állapotokat, ahol először megjelenik az E(p U q) címke
  - Ezek megelőző állapotait kell végignézni:
    Ha szerepel ott a p címke, akkor ráthető az E(p U q) címke is
  - Így visszafelé járjuk be azokat az útvonalakat, amik p-vel címkézett állapotokon keresztül visznek q-val címkézett állapotba

Az E(P U Q) címkézés

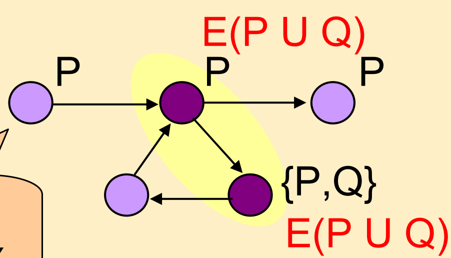


Kripke struktúra a kezdő címkézéssel

Első lépés: Q

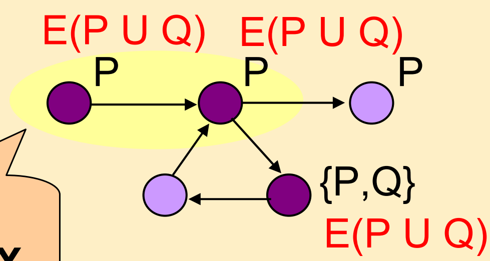


Második lépés: P ∧ EX



- Az iteráció addig tart, míg nő az állapothalmaz (fixpontot érünk el)

Harmadik lépés: P ∧ EX



Az A(p U q) kifejezések

- Hol igaz A(p U q)?
  - Azonosság: A(p U q) = q $\vee$ (p $\wedge$ AX A(p U q))
  - Ez is „rekurzív” képlet…
- Tehát mely állapotok címkézhetők A(p U q)-val?
  - Ha s címkézett q-val, vagy
  - ha s címkézett p-vel, és minden rákövetkezője már címkézett A(p U q)-val
- Iteráció adódik:
  - q-val már címkézett állapotok adják azokat az állapotokat, ahol először megjelenik az A(p U q) címke
  - Ezek megelőző állapotait kell végignézni:
    Ha szerepel ott a p címke, és minden rákövetkező állapotukon szerepel az A(p U q) címke, akkor ezekre is rátehető az A(p U q) címke

Ezzel a formális szintaxisban használt operátorokat lefedtük!

Címkézés leírása halmazműveletekkel

- A címkézés bővítése halmazműveletekkel történik
  - Z kezdőhalmaz adott (az előző lépések alapján)
  - Inkrementális bővítés definíciója a Z halmazhoz tartozó (már címkézett) állapotok megelőző állapotain:

    $pre_E(Z)$={s$\in$S | létezik olyan s’, hogy (s,s’)$\in$R és s’$\in$Z}

    $pre_A(Z)$={s$\in$S | minden s’-re, ahol (s,s’)$\in$R: s’$\in$Z}

  Bónusz kérdés: $pre_A(Z)$ felírható-e $pre_E()$ segítségével?
- Példa: E(P U Q) esetén:
  - Kezdőhalmaz: X_0 = {s | Q$\in$L(s)}
  - Bővítés: $X_{i+1} = X_i \cup (pre_E(X_i) \cap \{s \mid P \in L(s)\})$

    Eddig címkézettek és …

    … ezek megelőző állapotai közül amelyek …

    … P-vel címkézettek
  - Bővítés vége: Ha $X_{i+1} = X_i$, azaz nem bővül a halmaz

CTL modell ellenőrzés: Fixpont iteráció

Teljes hálók

- KS=(S,R,L) Kripke-struktúra
- $(2^S, \subseteq)$ teljes hálót képez, mivel
  - $\subseteq$ reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus
  - 2^S tartalmazza a felső (S) és alsó ($\emptyset$) határt
- Legyen: $\tau: 2^S \to 2^S$ leképzés $\tau(z)$ jelöléssel
  - τ monoton, ha $z_1 \subseteq z_2$ esetén $\tau(z_1) \subseteq \tau(z_2)$
  - τ $\cup$-folytonos, ha $z_1 \subseteq z_2 \subseteq z_3 \subseteq \ldots$ esetén $\tau(\cup_i z_i) = \cup_i \tau(z_i)$
  - τ $\cap$-folytonos, ha $z_1 \supseteq z_2 \supseteq z_3 \supseteq \ldots$ esetén $\tau(\cap_i z_i) = \cap_i \tau(z_i)$
  - Ha S véges, akkor a monotonitásból adódik a $\cup$-folytonosság és $\cap$-folytonosság

Fixpontok

- Fixpontok definíciója:
  - lfp $\tau(z)$ az a legkisebb $z \subseteq S$, amelyre $\tau(z)=z$
  - gfp $\tau(z)$ az a legnagyobb $z \subseteq S$, amelyre $\tau(z)=z$
- Tételek:
  - Tarski tétele (létezés):
    Ha S véges és $\tau(z)$ monoton, akkor létezik legkisebb és legnagyobb fixpont
  - Kleene tételei (számítási mód):
    Ha $\tau(z)$ $\cup$-folytonos, akkor lfp $\tau(z)= \cup_i \tau^i(\emptyset)$.
    Ha $\tau(z)$ $\cap$ -folytonos, akkor gfp $\tau(z)= \cap_i \tau^i(S)$.

Fixpontok számítása

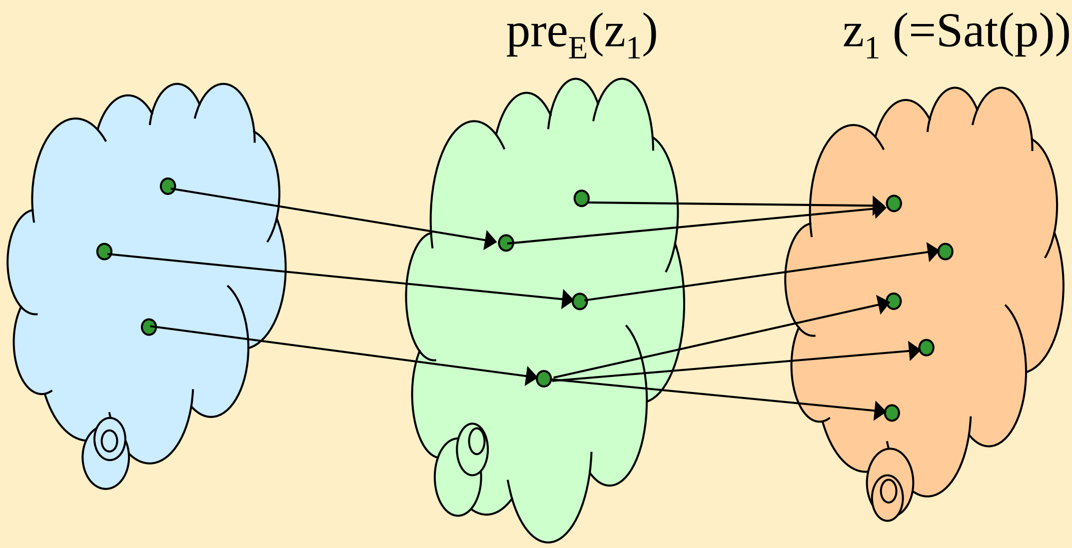
- A tételek alapján belátható következmény:
  - Véges S és monoton $\tau(z)$ esetén:
    $\exists\, i_0$: lfp $\tau(z)= \tau^{i_0}(\emptyset)$, ld. lfp $\tau(z)= \cup_i \tau^i(\emptyset)$
    $\exists\, j_0$: gfp $\tau(z)= \tau^{j_0}(S)$, ld. gfp $\tau(z)= \cap_i \tau^i(S)$
- Iterációval való számítás (korlát az S mérete):
  - lfp $\tau(z)$: $\emptyset, \tau(\emptyset), \tau^2(\emptyset), \ldots$ amíg $\tau^i(\emptyset)= \tau^{i+1}(\emptyset)$
    - Monoton nő a halmaz mérete a fixpontig
  - gfp $\tau(z)$: $S, \tau(S), \tau^2(S), \ldots$ amíg $\tau^j(S)= \tau^{j+1}(S)$
    - Monoton csökken a halmaz mérete a fixpontig

CTL operátorok és fixpont műveletek

- Pongyola megközelítés:
  - lfp: eshetőségek (pl. EF); adott tulajdonságot teljesítő állapotokhoz vezető utak kiinduló állapotai
  - gfp: folyamatos igazságok (pl. EG): adott tulajdonságot folyamatosan teljesítő utak kiinduló állapotai

- Tétel: Sat(EF p)= lfp $\tau(z)$,
  - ahol $\tau(z) = Sat(p) \cup pre_E(z)$ itt analógia: $EF(p)=p \vee EX\ EF(p)$
  - ahol $pre_E(z) = \{s \mid \exists t: (s,t) \in R \text{ és } t \in z\}$, azaz azoknak az állapotoknak a halmaza, ahonnan van átmenet z-be
  - Itt fixpont számítás: „visszafelé lépked az utakon”; kezdőállapotokat keres a p-t kielégítő állapotba vezető utakhoz
    - Kezdetben $\emptyset$, ebből Sat(p) lesz az első bővítés
    - Visszalépés az odavezető állapotokon: $pre_E(z)$ lépked visszafelé

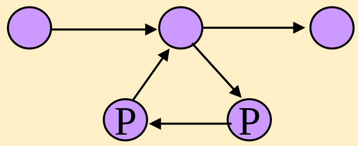
$pre_E(z)$ számítása



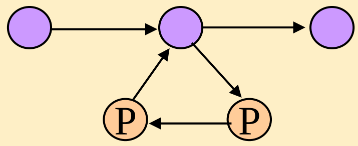
- Sat(p) lesz az első lépés eredménye
- $pre_E(z)$ az iteráció során visszafelé lépked az egyes utakon, kezdőállapotokat keresve a Sat(p)-be vezető utakhoz

EF(P) iterációs példa

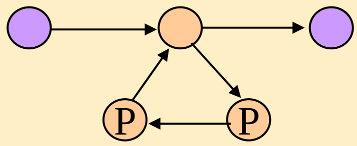
$z_0=\emptyset$



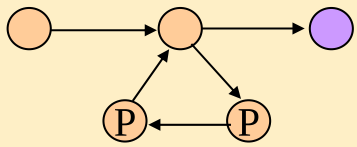
$z_1=Sat(P)\cup pre_E(z_0)=Sat(P)$



$z_2=Sat(P)\cup pre_E(z_1)$



$z_3=Sat(P)\cup pre_E(z_2)$



CTL operátorok és fixpont műveletek

Tételek (folytatás):

Terminálo utakon sántít az analógia

- Sat(EG p)= gfp τ(z),
  - ahol $\tau(z)= Sat(p) \cap pre_E(z)$

    analógia: $EG(p)=p \wedge EX\ EG(p)$
  - Itt fixpont számítás: csak az olyan utak kellenek, ahol p minden állapotban igaz (ld. metszet Sat(p)-vel)
    - Kezdetben S, ebből az elérhető Sat(p)
    - Visszalépés az olyan odavezető állapotokon, ahol igaz p
- Sat(E(p U q))= lfp τ(z),
  - ahol $\tau(z)= Sat(q) \cup (Sat(p) \cap pre_E(z))$

    analógia: $E(pUq)=q \vee (p \wedge EX\ E(pUq))$

CTL modell ellenőrzés iteratív módszerrel

- Alapelv: Kifejezések felbontása és „belülről kifelé” Sat(..) számítások:
  $AX\ AG\ (p \wedge E\ (Q\ U\ R))$

- Szabályok: A szintaxis definíció alapján
  - $Sat(P) = \{s \mid P \in L(s)\}$
  - $Sat(\neg p) = S \setminus Sat(p)$
  - $Sat(p \wedge q) = Sat(p) \cap Sat(q)$
    $Sat(p \vee q) = Sat(p) \cup Sat(q)$

- Szabályok (folytatás):
  - $Sat(EF\ p)$ számítás: $lfp\ \tau(z)$
    - ahol $\tau(z) = Sat(p) \cup pre_E(z)$
    - ahol $pre_E(z) = \{s \mid \exists t: (s,t) \in R$ és $t \in z\}$

    azaz az iteráció:
    - $z_0 = \varnothing$
    - $z_1 = \tau(z_0) = \tau(\varnothing)$
    - $z_{i+1} = \tau(z_i) = Sat(p) \cup pre_E(z_i) = Sat(p) \cup \{s \mid \exists t: (s,t) \in R$ és $t \in z_i\}$
    - amíg $z_{i+1} = z_i$ és itt $z_i = lfp\ \tau(z) = Sat(EF\ p)$

- Szabályok (folytatás):
  - Sat(EG p) számítás: gfp $\tau(z)$
    - ahol $\tau(z)$= Sat(p) $\cap$ $pre_E(z)$
    - ahol $pre_E(z)=\{s \mid \exists t: (s,t)\in R$ és $t\in z\}$

    azaz az iteráció:
    - z_0= S
    - $z_1= \tau(z_0)=\tau(S)$
    - $z_{i+1}= \tau(z_i)$= Sat(p) $\cap$ $\{s \mid \exists t: (s,t)\in R$ és $t\in z_i\}$
    - amíg $z_{i+1}= z_i$ és itt z_i = gfp $\tau(z)$ = Sat(EG p)
  - Sat(E(p U q)) számítás hasonlóan
  - További CTL operátorok mint helyettesítések kezelhetők
- A modell ellenőrzés halmazműveleteket jelent!

CTL modell ellenőrzés komplexitása

- Worst case időkomplexitás: $O(|S|^2\times|p|)$
  - $|S|^2$ az átmenetek száma worst case esetben (ld. pre(z))
  - |p| az operátorok száma;
    itt a szintaxis szabályainak megfelelően bontjuk fel a kifejezést és külön-külön számítjuk a Sat(..) halmazt
  - PLTL-nél kedvezőbb (pedig elágazó idejű logika);
    - de itt a PLTL kifejezés soha nem hosszabb, mint az ugyanazt a tulajdonságot leíró CTL kifejezés (ha van ilyen)
- FairCTL esetén: $O(|S|^2\times|p|\times|q|)$
  - Itt q a fair útvonalak megadására szolgáló kifejezés
- CTL* esetén: $O(|S|^2 \times 2^{|p|})$
  - Itt a beágyazott PLTL kifejezések kötetlensége miatt jön be komplexitásnövekedés
  - ld. PLTL modell ellenőrzés komplexitása: $O(|S|^2 \times 2^{|p|})$

Modális mu-kalkulus

Modális mu-kalkulus

- Szintaxis:

  $p ::= P \mid Z \mid \neg p \mid p \wedge p \mid [a]p \mid \langle a \rangle p \mid \mu Z.p \mid \nu Z.p$

- Közvetlenül a fixpont operátorokat tartalmazza
  - $\nu Z.p$ legnagyobb fixpont (Z változó, ahol p nyitott kifejezés Z-re)
    - az a legnagyobb $z \subseteq S$ halmaz, melyet újra megkapunk, ha a p(Z) formulát azzal az interpretációval értékeljük ki, hogy Z a z-n igaz
  - $\mu Z.p$ legkisebb fixpont (ahol p nyitott kifejezés Z-re)
- Előírás: Z páros számú negáció hatókörében fordulhat elő
  - Így kapunk monoton kifejezéseket, Sat(p) iterációval számítható
- CTL* is lefedhető vele (kifejezőképessége nagyobb)
- Worst case időkomplexitás: $O(|S|^2 \times |p|^a)$
  - Itt a az egymásba ágyazott váltakozó fixpont operátorok száma („alternation depth”)
  - CTL esetén az alternation depth 1 (független fixpont műveletek), általános esetben ennél nagyobb is lehet

- CTL: egymásba ágyazott fixpont kifejezések között nincs függőség:
  pl. AG EF p = $\nu Z.(\mu Y.(p \vee EX(Y)) \wedge AX(Z))$
  - Egy belső fixpont kifejezés nem függ egy külső fixpont kifejezés változóitól
  - Egy-egy kifejezés kiértékelhető belülről kifelé haladva, egyenként feloldva az egyes operátorokat
- Általános eset:
  pl. $\nu Z.\mu Y.(\langle b\rangle Z \vee \langle a\rangle Y)$, van a és b lépésekből álló út, végtelen sokszor előforduló b-vel
  - Kölcsönös függőség van a legkisebb és legnagyobb fixpont kifejezések között
  - Az iteráció ”ellenkező irányba tart”, újraszámolt belső iteráció szükséges a külső iterációs lépésekben