Programhelyesség-bizonyítás

Majzik István
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék
http://www.mit.bme.hu/~majzik/

Motiváció

- Kritikus algoritmusok helyességének bizonyítása
  - Korlátozott feladatok: biztonságkritikus funkciók, hozzáférésvédelem, protokoll mag, …
  - Bizonyítás alapja:
    - Részletes terv: Pszeudo-nyelven leírt algoritmus (a továbbiakban mint „program”)
    - Valós programnyelv: Csak részleges támogatás van
- Tételbizonyító rendszerek használata
  - Bizonyítandó tulajdonság mint bizonyítandó „tétel”
  - Klasszikus elő- és utófeltételek a tipikusak (contract)
- Kihívások:
  - (Pszeudo) programból hogyan lesz bizonyítandó tétel?
  - Milyen stratégiák használhatók a bizonyításhoz?

Tételbizonyító rendszerek

- Felépítés:
  - Leíró nyelv, pl.:
    - Elsőrendű logika
    - Típusokkal kiegészített logikák
    - Magasabbrendű logika, …
  - Problématér leírása: logikai axiómák
  - Megoldandó feladat: bizonyítandó tétel
  - Következtetési szabályok (levezetési szabályok)
    - Indukció, dedukció, unifikáció, …
- Komponensek:
  - Algoritmikus: Egy-egy következtetési szabály alkalmazása
  - Kereső: Stratégia/taktika a szabályok kiválasztására
    - Cél-vezérelt (visszafelé történő) keresés
    - Mélységi vagy szélességi keresés
    - Interaktív (felhasználói segítséggel)

Tételbizonyító rendszerek alkalmazása

- A tételbizonyítás komplex feladat
  - n operátort tartalmazó tétel,
  - $O(2^n)$ hosszú bizonyítási szekvencia (közbenső tételek bizonyítása),
  - $O(2^{2^n})$ időigény a bizonyítás megtalálásához… (worst case, kereséssel)
  - Fontos a bizonyítási stratégia meghatározása!
- További használati esetek
  - Kézi bizonyítás automatikus ellenőrzése (proof checking)
  - Kézi bizonyítás segítése (interaktív szabályalkalmazás)
- Tételbizonyítás szerepe
  - Adat-intenzív alkalmazások tulajdonságainak bizonyítása
  - Paraméter-függőségek kezelése (pl. protokoll résztvevők száma)
    - Indukció használható
  - Együttes használat a modellellenőrzéssel
    - Legkisebb paraméterértékre (kiindulási eset): modellellenőrzés
    - Tulajdonság megtartásának bizonyítása indukcióval
- Népszerű eszközök
  - HOL, PVS, ACL2, …

Tulajdonságok

D tételbizonyító rendszer, c levezetendő (bizonyítandó) tétel

- Szemantikus helyesség (soundness):
  - Ami levezethető D-ben az igaz
  - Szükséges a használhatósághoz
  - Formálisan: $\forall$c: ha $|-_D c$ (levezethető) akkor $|=c$ (teljesül, igaz)
- Szemantikus teljesség (completeness):
  - Ami igaz, az levezethető D-ben
  - Hasznos tulajdonság, de nem szükséges
  - Formálisan: $\forall$c: ha $|=c$ akkor $|-_D c$
- Totális helyesség és teljesség:
  - Minden interpretációra helyes és teljes
- Konzisztens tételbizonyító rendszer:
  - Nem lehet egy tételt és az ellenkezőjét is bizonyítani

Kitekintés: Program és specifikáció kapcsolata

Egy P program és egy Φ specifikáció (követelmény) esetén:

- Verifikáció (program helyességbizonyítás):
  - P $\models \Phi$ eldöntése
- Analízis:
  - P alapján Φ levezetése
- Szintézis:
  - Φ alapján P konstruálása
- Optimalizálás:
  - P $\models \Phi$ alapján olyan P' konstruálása, hogy P' $\models \Phi$, ugyanakkor P' jobb adott szempontok szerint (kisebb, gyorsabb…)
- Javítás:
  - P $\not\models \Phi$ alapján olyan P' konstruálása, hogy P' $\models \Phi$ legyen

A verifikációs probléma leképzése

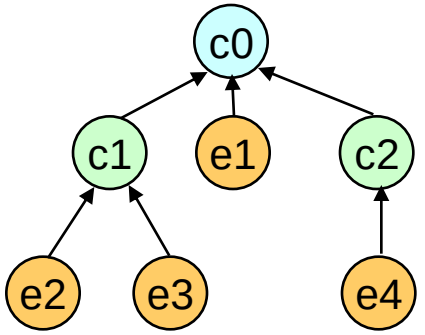
Források:

- Axiómákhoz:
  - Program utasítások (értékadás)
  - Program domén axiómái
- Levezetési szabályokhoz:
  - Program nyelv szemantika
  - Program domén szemantika
- Bizonyítandó tételhez:
  - Program és a specifikáció
- Mi legyen a stratégia?

Bizonyításhoz leginkább használt stratégia: Indukció

- Számítási indukció: Műveleti szemantika esetén
  - Állapotokra:
    Ha a kiindulási állapot tulajdonságait ismerjük, az átmenetek követésével levezetjük a végállapot tulajdonságait

- Strukturális indukció: Axiomatikus szemantikához
  - Szintaktikai konstrukciókra:
    Ha az elemek tulajdonságait ismerjük, a rajtuk alkalmazott szintaktikai konstrukció alapján levezetjük a kompozit struktúra (így majd a teljes program) tulajdonságait



Célkitűzéseink

- Bizonyítási vázak rögzítése program helyesség bizonyításhoz
  - Bizonyítási stratégia megadása
  - Nincs teljesen automatikus „garantált” módszer
- Nem konkrét programozási nyelvhez kötve
  - Pszeudo-nyelv (algoritmus leírás)
    - Továbbiakban mint „programozási nyelv” szerepel
  - Pl. saját, domén-specifikus nyelvhez is alkalmazható
- Megkötések a bizonyíthatósághoz
  - Programozási nyelv: Formális szemantikával rendelkezik (műveleti vagy axiomatikus szemantika)
  - Specifikációs nyelv: Elsőrendű kijelentéslogika

Programozási nyelv műveleti szemantikával

- Konfiguráció („állapot”): C
  - σ látható állapot (a program vizsgált kimenetében szerepel)
    - $\sigma[x]$ egy x változó értéke egy σ látható állapotban
    - $\sigma[\underline{x}]$ az $\underline{x}$ változó-vektor értéke egy σ látható állapotban
  - Rejtett állapot (helyesség szempontjából érdektelen)
  - Szintaktikus folytatás λ: A további számításokat definiálja
    - „Programszámláló” helyett
    - Az adja meg, mit kell még végrehajtani (pl. forrásszövegként)
- Átmenet reláció a konfigurációk között: $\rightarrow$
  - $\pi(P, \sigma_0)$ egy P program számítása σ_0 kezdőállapotból
    - $C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \ldots$ maximális szekvencia (végállapotig/végtelen)
    - $\sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \ldots$ látható állapot szekvencia
  - $val(\pi(P, \sigma)) = \sigma_n$ véges esetben a végállapot jelölése
- I domén: A számítások itt értelmezettek

Specifikációs nyelv

- Korlátozások a programra:
  - Determinisztikus
  - Nem folyamatos működésű (előbb-utóbb megáll)
  - Érték- vagy állapot-transzformációt valósít meg
- Tulajdonság megadása: Predikátumokkal
  - Előfeltétel: $p(\underline{x})$ - a megengedhető kezdeti állapotokra
    - $\underline{x}$ a látható állapot változói
    - $\sigma_0 \models p(\underline{x})$ jelentése: kezdőállapotban igaz $p(\underline{x})$
  - Utófeltétel: $q(\underline{x})$ - az elfogadható végállapotokra
    - true – minden befejeződő számítás kielégíti
    - false – egy szabályos végállapot sem elégíti ki
    - $val(\pi(P,\sigma_0)) \models q(\underline{x})$ jelentése: π számítás végállapotában igaz $q(\underline{x})$
- Specifikáció példák
  - Segédváltozók használata
  - Specifikációs változók használata

Példák specifikációkra

- A program egy x és egy legalább ekkora y egészet ad:

  Előfeltétel p(x,y) = true, utófeltétel q(x,y) = $x \leq y$

  Tömörebben felírva (true, $x \leq y$)

- A program egy páros x egészet ad a kimenetén:

  (true, even(x)) ha a doménen értelmezett even(x)

  (true, $\exists y$: x=2y) itt y kötött segédváltozó q(x)-ben

- A program a bemeneti x-et megkétszerezi és kiadja:

  (X=x, x=2X) itt X egy specifikációs változó

- A program az x/y pozitív bennfoglalás q eredményét és r maradékát adja:

  $(X=x \wedge x>0 \wedge Y=y \wedge y>0, \quad X=qY+r \wedge 0<=r<Y)$

  ha meg kell őrizni x és y értékét:

  $(X=x \wedge x>0 \wedge Y=y \wedge y>0, \quad X=qY+r \wedge 0<=r<Y \wedge x=X \wedge y=Y)$

Program helyességi kritériumok (1)

- Részleges helyesség: Jelölése $\{p(\underline{x})\}\ P\ \{q(\underline{x})\}$

  Egy P program részlegesen helyes $p(\underline{x})$, $q(\underline{x})$ szerint, ha teljesül a következő:

  $\forall \pi(P,\sigma_0)$ és $\sigma_0 \models p(\underline{x})$ esetén
  ha befejeződik π, akkor $val(\pi(P,\sigma_0)) \models q(\underline{x})$

- Megjegyzések:
  - Az előfeltételt kielégítő állapotból induló számításokra: ha befejeződik, akkor az utófeltétel igaz a végállapotban
  - Nem mond semmit azokról a számításokról, amelyekre $\sigma_0 \not\models p(\underline{x})$
  - {true}P{true} minden programra igaz
  - {true}P{false} ha igaz, akkor nincs befejeződő számítás

Program helyességi kritériumok (2)

- Helyesség: Jelölése $\langle p(\underline{x}) \rangle P \langle q(\underline{x}) \rangle$

  Egy P program helyes $p(\underline{x})$, $q(\underline{x})$ szerint, ha teljesül a következő:

  $\forall \pi(P,\sigma_0)$ és $\sigma_0 \models p(\underline{x})$ esetén

  π befejeződik és $val(\pi(P,\sigma_0) \models q(\underline{x})$

- Megjegyzések:
  - Az előfeltételt kielégítő állapotból induló számításokra: befejeződik és az utófeltétel igaz lesz a végállapotban
  - $\langle p(\underline{x}) \rangle P \langle true \rangle$ csak befejeződést ír elő
  - Felírható:

    $\langle p(\underline{x}) \rangle P \langle q(\underline{x}) \rangle$ a.cs.a. $\{p(\underline{x})\}P\{q(\underline{x})\}$ és $\langle p(\underline{x}) \rangle P \langle true \rangle$

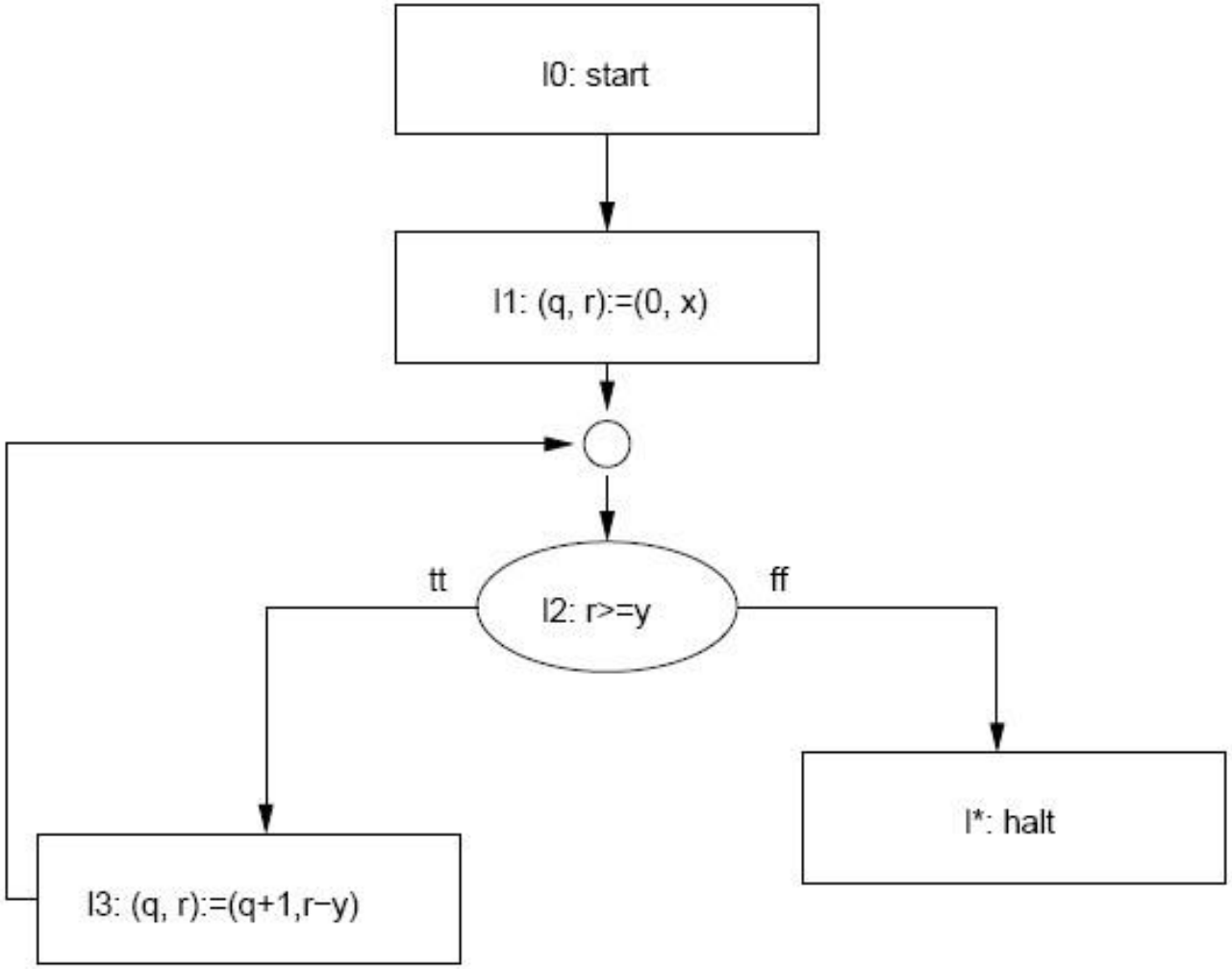
    azaz a program helyes, ha részlegesen helyes és befejeződik

Egyszerű determinisztikus programok

- PLF „flow language”: Assemblyhez közeli pszeudo-nyelv
  - *start*, $\underline{x}$:=$\underline{e}$, *B*($\underline{x}$), *halt* utasítások egyedi l címkékkel (l_0, l_*, l_i,…)
- Program felépítése: PLF mint véges irányított gráf
  - Csomópontok: utasítások; élek: utasítások sorrendje
  - succ(l), $succ^+$(l), $succ^-$(l) adja meg a következő csomópontot
  - Minden utasítás egy start $\rightarrow$ halt útvonalon
- Szemantika: C=(σ,λ) konfiguráció és $\rightarrow$ megadása: C(σ,λ) $\rightarrow$ C’ (σ’,λ’) a.cs.a.
  - λ egy *start*: λ’=succ(λ), σ’=σ
  - λ egy $\underline{x}$:=$\underline{e}$ utasítás: λ’=succ(λ), σ’=σ[$\underline{e}$/$\underline{x}$]
    - itt [$\underline{e}$/$\underline{x}$] jelöli, hogy $\underline{x}$ helyébe $\underline{e}$ helyettesítése történik
  - λ egy *B*($\underline{x}$) elágazás:
    - σ|=B($\underline{x}$) esetén: λ’=$succ^+$(λ), σ’=σ
    - σ|≠B($\underline{x}$) esetén: λ’=$succ^-$(λ), σ’=σ

Példa: Maradékos osztás egész számokra

x/y számítása, q hányados, r maradék



Áttekintés a bizonyítási stratégiákról

- Részleges helyesség ciklusmentes programokra
  - Visszalépéses számítási indukció
- Részleges helyesség ciklust tartalmazó programokra
  - Induktív állítások módszere
- Teljes helyesség ciklust tartalmazó programokra
  - Befejeződés bizonyítása: Paraméterezett induktív állítások módszere

Részleges helyesség ciklusmentes esetben (1)

- Ötlet: Számítási indukció {p}P{q} esetén
- Egy véges számításhoz tartozó u útvonal jellemzői:

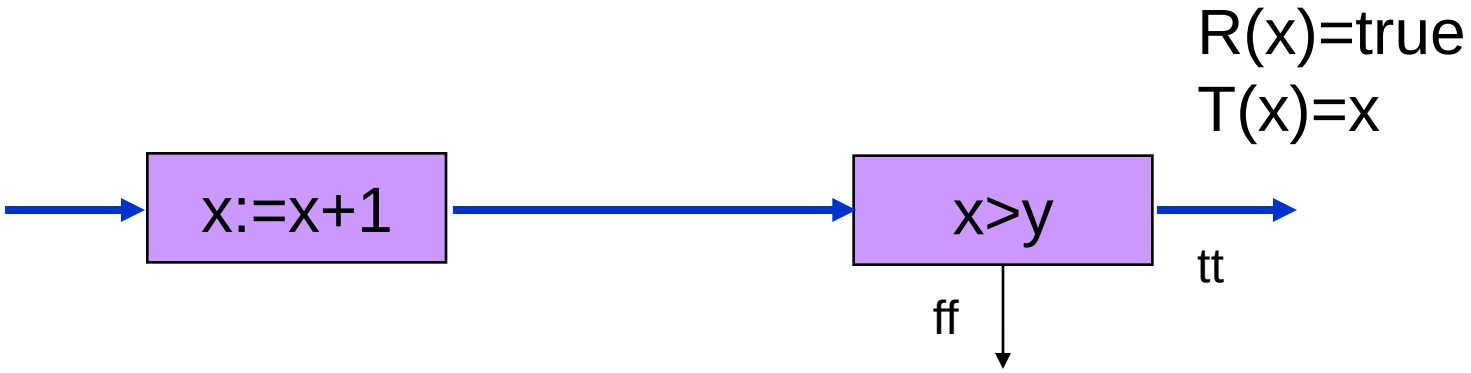
  $u = l_0 \rightarrow l_1 \rightarrow l_2 \rightarrow \ldots \rightarrow l_k$

  - **Elérhetőségi (bejárási) feltétel**: $R_u(\underline{x})$ predikátum u útvonalhoz
    - Ha fennáll l_0 esetén, akkor éppen az u útvonalat járja be a program
  - **Állapot transzformáció**: $T_u(\underline{x})$ egy állapotvektort ad u útvonalhoz
    - $\underline{x}$ állapotvektorból indulva az u útvonal bejárása utáni állapot
    - $\underline{x} := T_u(\underline{x})$ a végállapotot eredményező állapot transzformáció
- Jelölések:
  - $l_m \rightarrow \ldots \rightarrow l_k$ szuffixe az útvonalnak az m indextől (l_m pontból)
  - $R_u^m(\underline{x})$ és $T_u^m(\underline{x})$ erre a szuffixre vonatkoznak
- Ismert az útvonal l_k végpontjára (utolsó szuffixre):
  - $R_u^k(\underline{x})$=true - hiszen már a végpontban vagyunk
  - $T_u^k(\underline{x})=\underline{x}$ - hiszen nincs további transzformáció

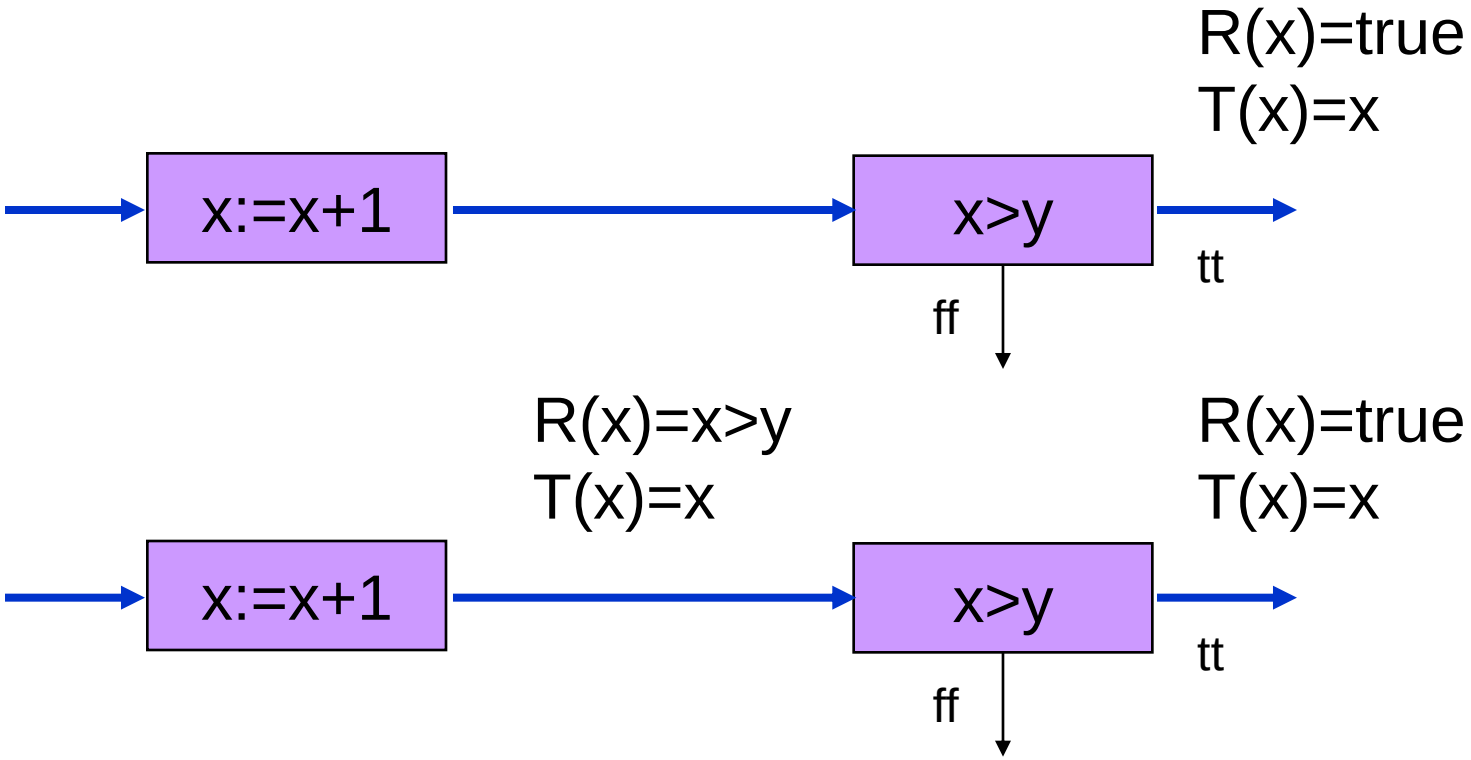
Részleges helyesség ciklusmentes esetben (2)

- Visszalépéses indukció:
  - Feltéve: Ismert $R_u^{m+1}(\underline{x})$ és $T_u^{m+1}(\underline{x})$ egy szuffixre
  - Lépés: Az I_m utasítása alapján $R_u^m(\underline{x})$ és $T_u^m(\underline{x})$ számítás
    - $\underline{x}:=\underline{e}$ hozzárendelés:
      $R_u^m(\underline{x}) = R_u^{m+1}(\underline{x})[\underline{e}/\underline{x}]$, $T_u^m(\underline{x}) = T_u^{m+1}(\underline{x})[\underline{e}/\underline{x}]$
    - *B(x)* feltétel pozitív ága:
      $R_u^m(\underline{x}) = R_u^{m+1}(\underline{x}) \wedge B(x)$, $T_u^m(\underline{x}) = T_u^{m+1}(\underline{x})$
    - *B(x)* feltétel negatív ága:
      $R_u^m(\underline{x}) = R_u^{m+1}(\underline{x}) \wedge \neg B(x)$, $T_u^m(\underline{x}) = T_u^{m+1}(\underline{x})$
    - *start*:
      $R_u(\underline{x}) = R_u^0(\underline{x})$, $T_u(\underline{x}) = T_u^0(\underline{x})$
  - Így a végpontban ismert $R_u^k(\underline{x})$=true és $T_u^k(\underline{x})=\underline{x}$ alapján a kezdőpontra $R_u(\underline{x})$ és $T_u(\underline{x})$ *levezethető*

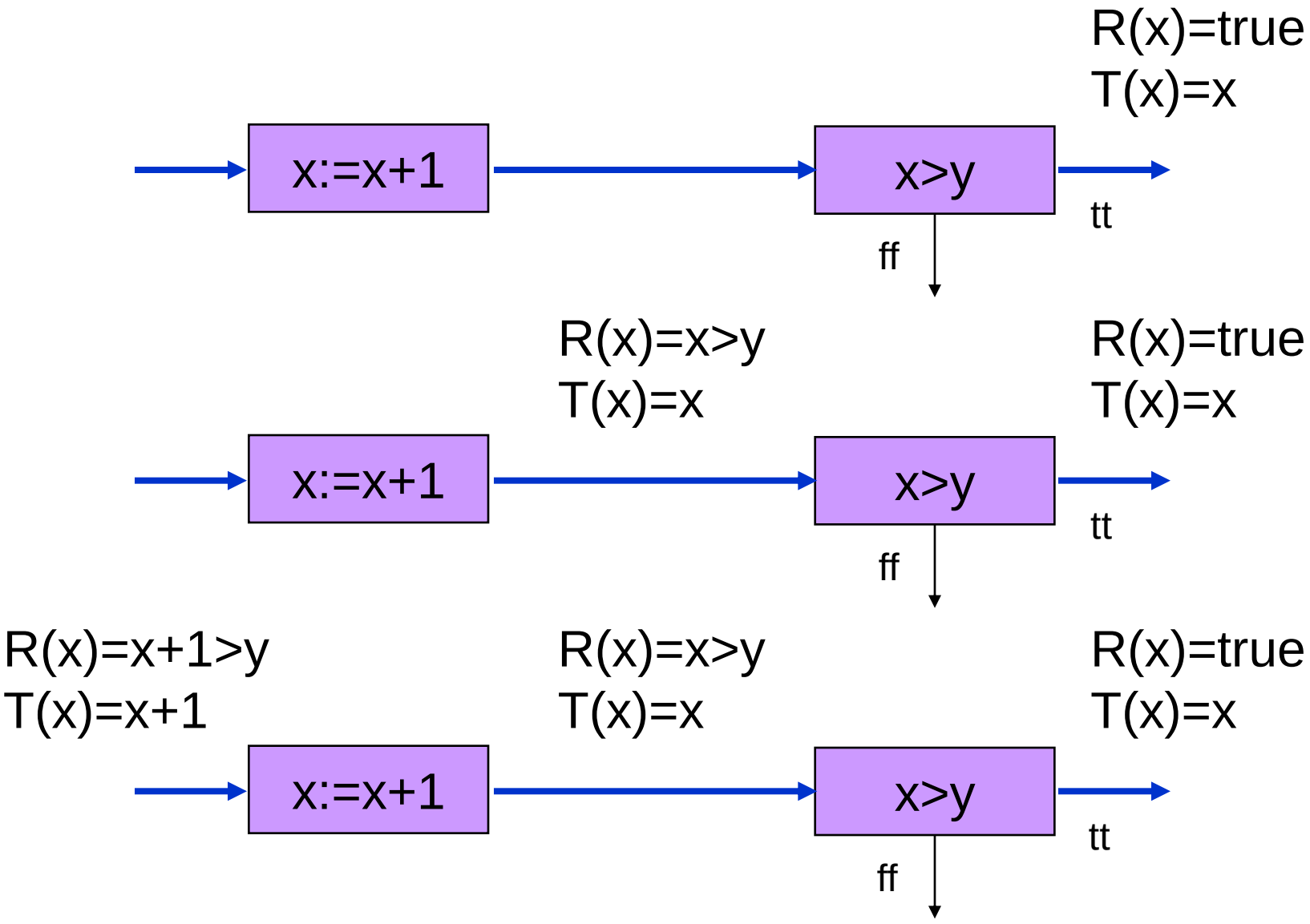
Részleges helyesség ciklusmentes esetben (példa)



Részleges helyesség ciklusmentes esetben (példa)



Részleges helyesség ciklusmentes esetben (példa)



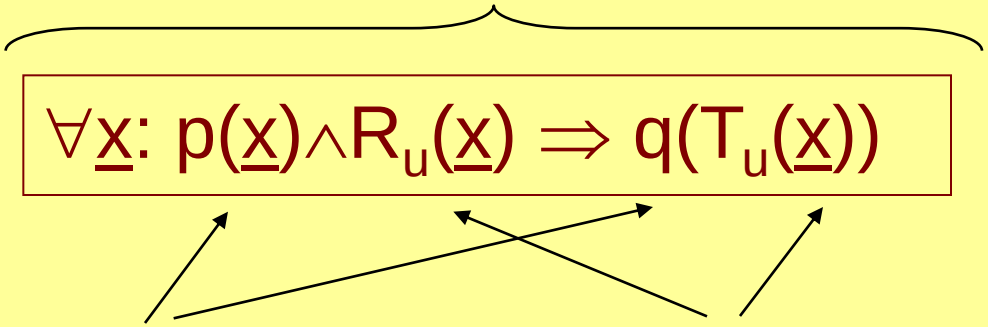
Részleges helyesség ciklusmentes esetben (3)

- Részleges helyesség megmutatása:

  $\{p(\underline{x})\}\ P\ \{q(\underline{x})\}$ a.cs.a. ha minden teljes u útra:

  $\forall \underline{x}: p(\underline{x}) \wedge R_u(\underline{x}) \Rightarrow q(T_u(\underline{x}))$

Doménen értelmezett elsőrendű logikai kifejezés;
ez tételbizonyítónak átadható minden u út esetén:

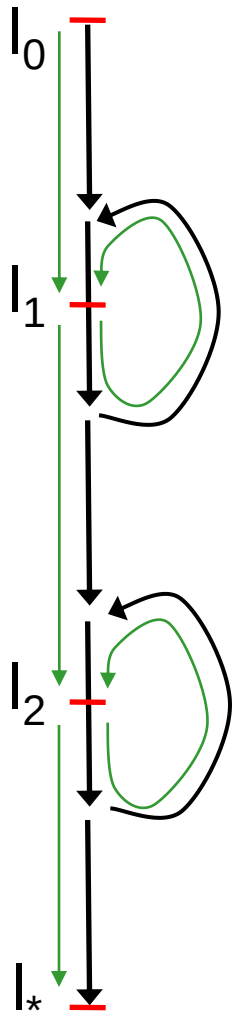


p és q a specifikáció alapján

R és T a program forrás alapján, visszalépéses számítási indukció alapján megadható minden útra

Részleges helyesség ciklusos programokra (1)

- Ötlet: Ciklusok felvágása
  - Minden ciklusban egy l_i utasítás kijelölése, ami azt (ciklusmentes) szegmensekre osztja
  - $I_{li}(\underline{x})$ predikátum, ún. induktív állítás hozzárendelése a vágási ponthoz
    - Első belépés után l_i-nél igaz
    - Ciklus futása során igaz marad (ciklus invariáns)
    - Kilépés esetén következő szegmens bejárási feltételét igazzá teszi
      $\rightarrow$ majd az utófeltételt igazzá teszi a végpontban
  - A szegmensek mint ciklusmentes utak az előző módszer alapján vizsgálhatók
    - Elérhetőségi feltétel és
    - állapot-transzformáció számítható



Részleges helyesség ciklusos programokra (2)

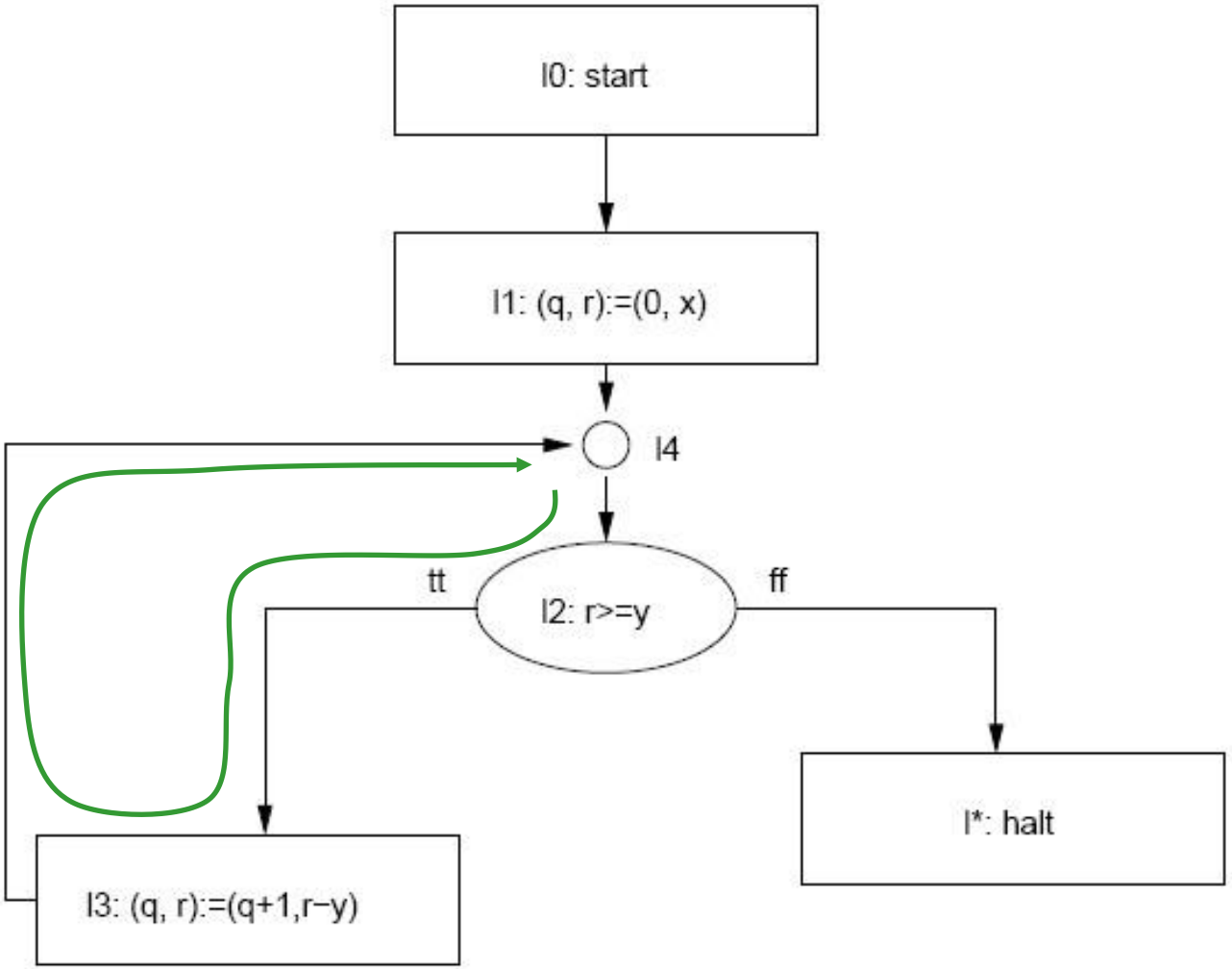
- Bizonyítási váz:
  - Vágási pontok kijelölése a ciklusokban (legalább egy-egy)
  - Induktív állítások felírása: $I_{li}(\underline{x})$
    - $I_{l0}(\underline{x}) = p(\underline{x})$ - kezdőállapotra, vagy $p(\underline{x}) \Rightarrow I_{l0}(\underline{x})$
    - $I_{l*}(\underline{x}) = q(\underline{x})$ - végállapotra, vagy $I_{l*}(\underline{x}) \Rightarrow q(\underline{x})$
    - Ciklusokban: ld. előbb (ciklus invariáns)
  - Verifikációs feltételek: A szomszédos vágási pontokra, azaz minden l, l' vágási pontok által kijelölt u szegmensre:

$$\forall \underline{x}: I_l(\underline{x}) \wedge R_u(\underline{x}) \Rightarrow I_{l'}(T_u(\underline{x})) \text{ bizonyítandó}$$

    - $R_u(\underline{x})$ és $T_u(\underline{x})$ a szegmensekre kiszámíthatók
- Helyes és teljes módszer
  - Mindig találhatók megfelelő vágási pontok és induktív állítások (de ennek bizonyítása nem konstruktív ☹)
  - Heurisztikus az induktív állítások felvétele

Részleges helyesség ciklusos programokra (példa)

$$I_{l4}(x,y,q,r) = (x \geq 0 \wedge y > 0 \wedge x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0)$$



Befejeződés bizonyítása ciklusok esetén (1)

- Ötlet: Az induktív állítások paraméterezése
  - Paraméter egy (W, >) ún. jól megalapozott halmazból
    - Nem létezik végtelen $w_0 > w_1 > \ldots$ csökkenő szekvencia, $w_i \in W$
    - Példák:
      - Természetes számok, és az ezeken értelmezett > reláció
      - Véges halmaz valódi részhalmazai, és a tartalmazás reláció
      - Véges lista, és a lista prefix reláció
      - …
  - A ciklus befejeződik, ha a paraméterről kimutatható, hogy csökken a ciklus végrehajtása során
  - A paraméter sok esetben lehet maga a ciklusváltozó, de segédváltozót is használhatunk
    - Megválasztása heurisztikus

Befejeződés bizonyítása ciklusok esetén (2)

- Bizonyítási váz:
  - Jól megalapozott halmaz(ok) választása: $(W,<)$
  - Vágási pontok kijelölése a ciklusokban: l_0, l_i, l_*
  - Paraméterezett induktív állítások: $l_l(\underline{x},w)$ ahol $w \in W$
  - Verifikációs feltételek (bizonyítandók):
    - Inicializálás: $\forall \underline{x}: \; p(\underline{x}) \Rightarrow \exists w: l_{l0}(\underline{x},w)$ (előfeltétel bővítés)
    - Terminálás: $\forall \underline{x}: \; l_{l*}(\underline{x},w) \Rightarrow q(\underline{x})$
    - Csökkenés: Szomszédos l, l' pontok által kijelölt u szegmensre:

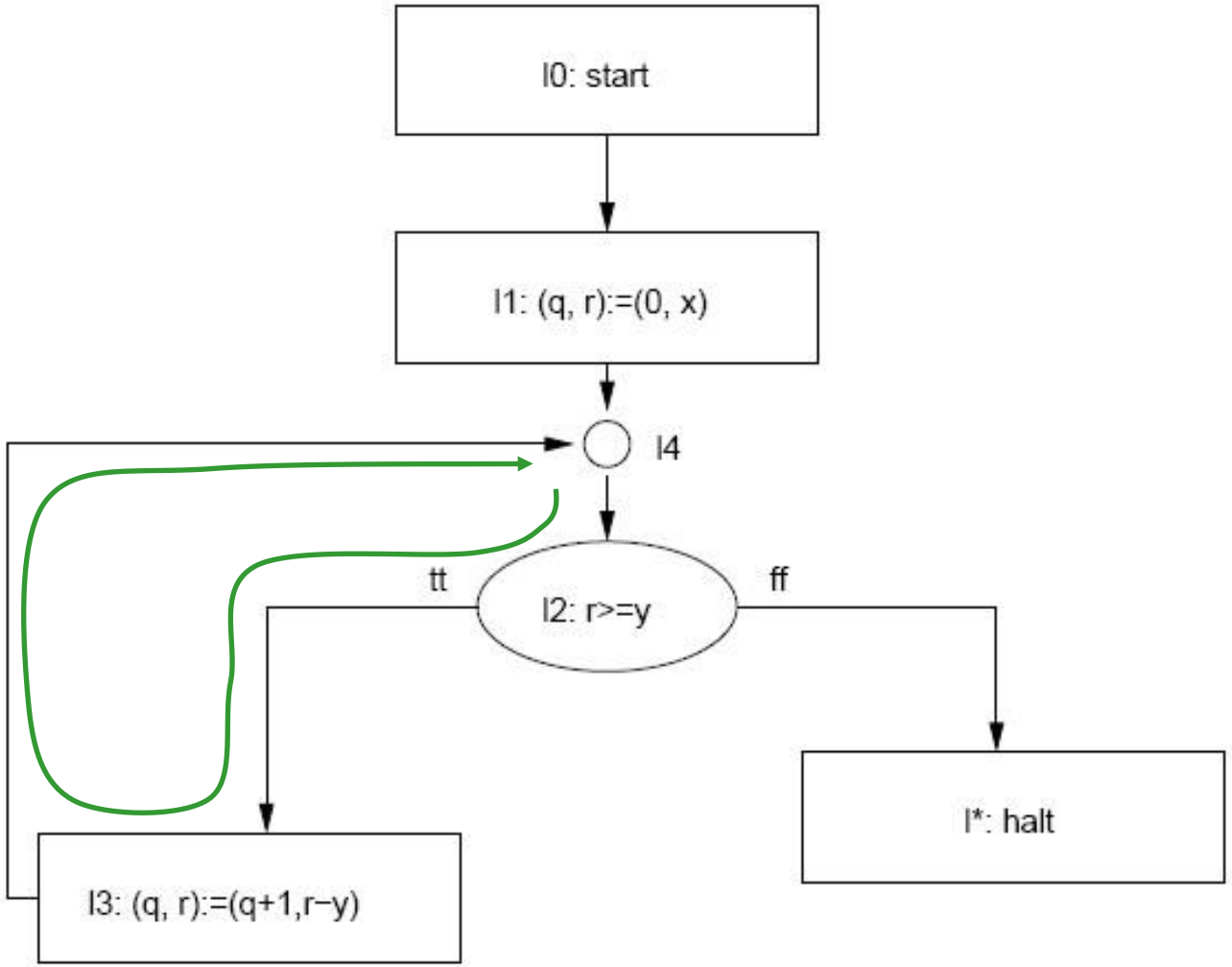
$$\forall \underline{x}: \; l_l(\underline{x},w) \wedge R_u(\underline{x}) \Rightarrow \exists w' < w: l_{l'}(T_u(\underline{x}),w')$$

Itt $R_u(\underline{x})$ és $T_u(\underline{x})$ a szegmensekre kiszámíthatók

- Helyes módszer <p(x)>P<true> bizonyítására
  - A paraméterezett induktív állítások felvétele heurisztikus

Befejeződés bizonyítása ciklusok esetén (példa)

$$I_{l4}(x,y,n) = (y>0 \wedge n=r\geq 0)$$



Rész-összefoglaló

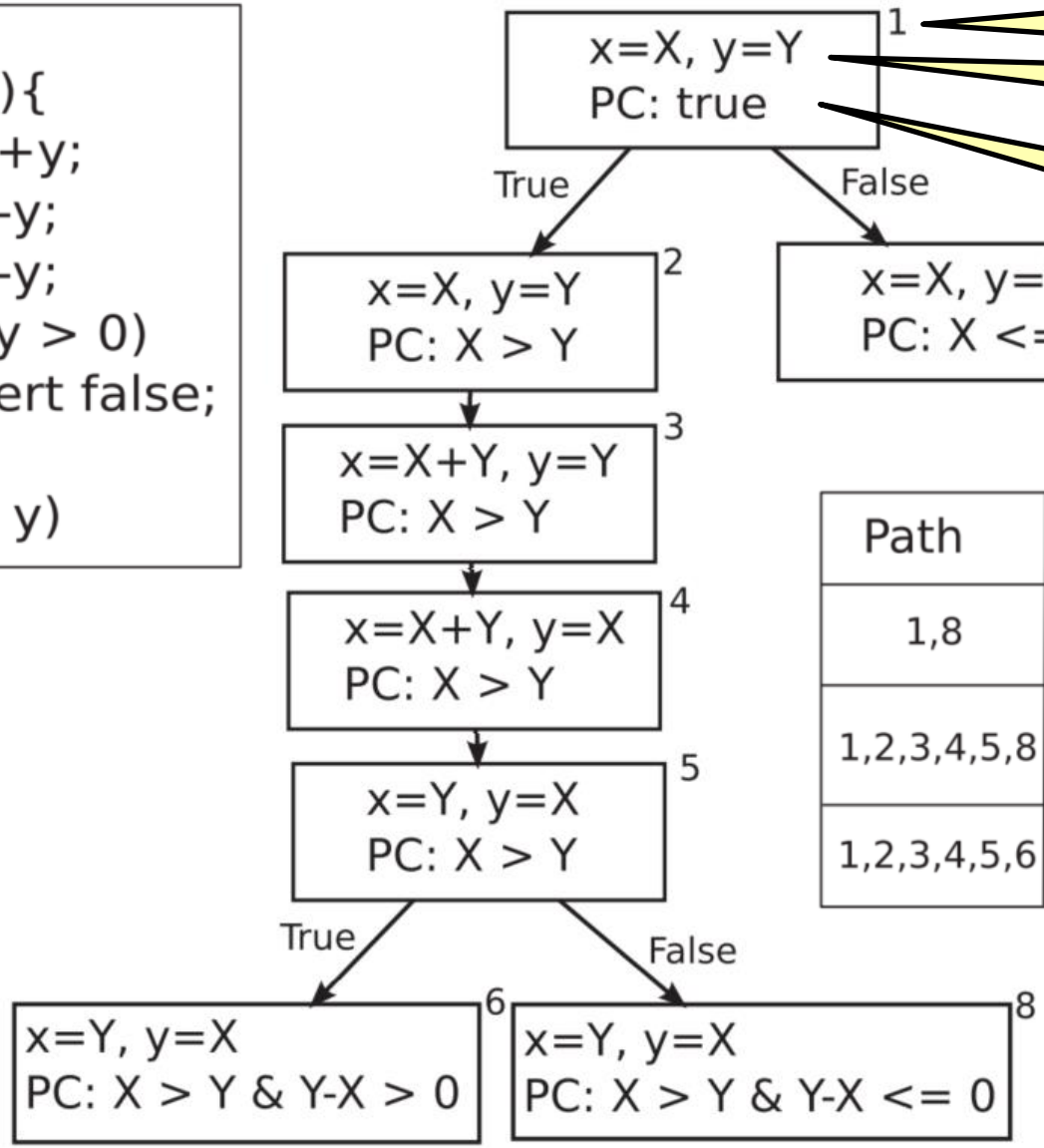
- Alacsony szintű pszeudo-nyelvek:
  - Részleges helyesség ciklusmentes programokra:
    - Visszalépéses számítási indukció
  - Részleges helyesség ciklust tartalmazó programokra:
    - Induktív állítások módszere
  - Helyesség ciklust tartalmazó programokra:
    - Paraméterezett induktív állítások módszere, jól megalapozott halmazból vett paraméterrel
- Következő lépés: Strukturált programnyelvek

Kitekintés: Szimbolikus végrehajtás

- Módszer
  - Programutak felmérése
  - Bejárási feltételek összeállítása az útvonal mentén a forráskódban (byte kódban) talált feltételek alapján
  - Szimbolikus: változókra vonatkozó (logikai) kifejezések használata
- Alkalmazás: Teszt bemenetek generálása a forráskód alapján (ld. később)
  - CSP vagy SMT solverrel bemenetek generálása a bejárási feltételek teljesítéséhez (minden úthoz)
- Kihívások
  - Ciklusok: nagyszámú bejárható útvonal
  - Bonyolult aritmetika támogatása az SMT eszközben
  - Külső függőségek (library-k) kezelése
- Eszközök
  - Java: Symbolic PathFinder (Java PathFinder alapokon)
  - .Net: PEX
  - C: KLEE, CUTE

Kitekintés: Szimbolikus végrehajtás, bejárási feltétel

```
    int x, y;
1   if(x > y){
2     x = x+y;
3     y = x-y;
4     x = x-y;
5     if(x - y > 0)
6       assert false;
7   }
8   print(x, y)
```



Statement ID

Symbolic variables

Path constraint

Path	PC	Program Input
1,8	X <= Y	X=1 Y=1
1,2,3,4,5,8	X>Y & Y-X<=0	X=2 Y=1
1,2,3,4,5,6	X>Y & Y-X>0	none

Helyességbizonyítás strukturált programokra

- Cél a „komponálhatóság”:
  - Ha egy P program P_1 és P_2 szintaktikai egységekből áll, akkor P tulajdonságai P_1 és P_2 tulajdonságai alapján bizonyíthatók
  - Strukturális indukció elve
- Strukturált programok: PLW nyelv

P::= x:=e | skip | P_1; P_2 | if B then P_1 else P_2 fi | while B do P od

- Példa (maradékos osztás):

P_{div}: r:=x; q:=0; while r≥y do r:=r-y; q:=q+1 od

PLW szemantikája

- Konfiguráció: $C_i=(P_i, \sigma_i)$ ahol
  - P_i a szintaktikus folytatás (E az üres folytatás jelölése)
  - σ_i a látható állapot (állapotváltozók)
- Átmenet reláció: $C \rightarrow C'$
  - $(x:=e, \sigma) \rightarrow (E, \sigma[e/x])$
  - $(skip, \sigma) \rightarrow (E, \sigma)$
  - $(P_1; P_2, \sigma) \rightarrow (P_1'; P_2, \sigma')$ ha $(P_1, \sigma) \rightarrow (P_1', \sigma')$
  - (if B then P_1 else P_2 fi, σ) $\rightarrow (P_1, \sigma)$ ha $\sigma[B]$=true
    $\rightarrow (P_2, \sigma)$ ha $\sigma[B]$=false
  - (while B do P od, σ) $\rightarrow$ (P; while B do P od, σ) ha $\sigma[B]$=true
    $\rightarrow (E, \sigma)$ ha $\sigma[B]$=false

Itt az $E;P \equiv P$ azonosság alkalmazható a végén

H dedukciós rendszer részleges helyesség bizonyításához (1)

- Axiómák:
  - ASS: $\{p[e/x]\}\ x:=e\ \{p\}$
  - SKIP: $\{p\}\ \text{skip}\ \{p\}$

Utófeltételként p teljesül, ha előfeltételként p[e/x] teljesül

- Szabályok a szintaktikai struktúrákhoz:
  - SEQ: $$\frac{\{p\}\ P_1\ \{r\} \quad \text{és} \quad \{r\}\ P_2\ \{q\}}{\{p\}\ P_1; P_2\ \{q\}}$$
  - COND: $$\frac{\{p \wedge B\}\ P_1\ \{q\} \quad \text{és} \quad \{p \wedge \neg B\}\ P_2\ \{q\}}{\{p\}\ \text{if } B \text{ then } P_1 \text{ else } P_2 \text{ fi}\ \{q\}}$$
  - REP: $$\frac{\{p \wedge B\}\ P\ \{p\}}{\{p\}\ \text{while } B \text{ do } P \text{ od}\ \{p \wedge \neg B\}}$$

Ha (feltétel) akkor (köv.)

p ciklus invariáns

H dedukciós rendszer részleges helyesség bizonyításához (2)

- Általános szabályok:
  - CONS: $\dfrac{p \Rightarrow p_1 \text{ és } \{p_1\}\ P\ \{q_1\} \text{ és } q_1 \Rightarrow q}{\{p\}\ P\ \{q\}}$
  - AND: $\dfrac{\{p\}\ P\ \{q_1\} \text{ és } \{p\}\ P\ \{q_2\}}{\{p\}\ P\ \{q_1 \wedge q_2\}}$
  - OR: $\dfrac{\{p_1\}\ P\ \{q\} \text{ és } \{p_2\}\ P\ \{q\}}{\{p_1 \vee p_2\}\ P\ \{q\}}$

Előfeltétel bővítés és utófeltétel szűkítés

Utófeltétel részekre bontása

Előfeltétel szétválasztása esetekre

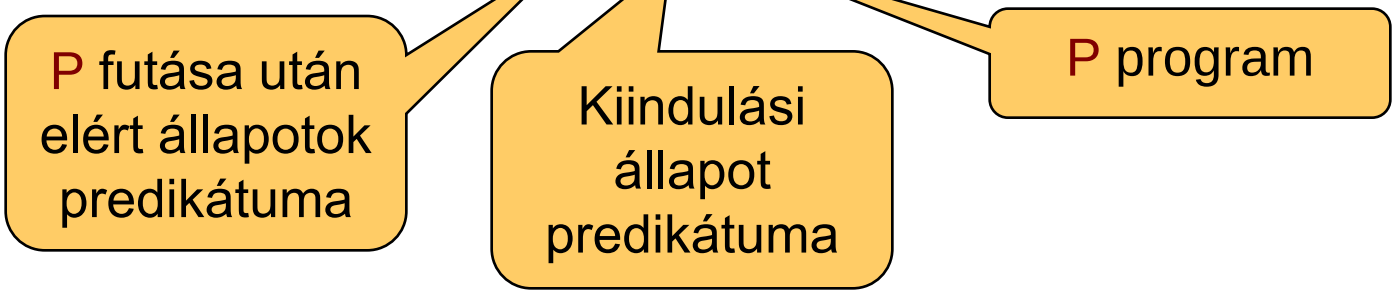
- Domén axiómái és szabályai:
  A tételbizonyítónak ismernie kell

Dedukciós rendszer részleges helyesség bizonyításához (3)

- Egy C állítás bizonyítása: $Tr_I \vdash_H C$ ahol
  - I a domén, Tr_I a domén axiómái és szabályai
  - H a dedukciós rendszer
- Példa az állításra:
  - $\{x \geq 0 \wedge y \geq 0\}\ P_{div}\ \{x = q \cdot y + r \wedge 0 \leq r < y\}$
- Gyakorlati problémák:
  - Domén szabályait a tételbizonyítónak ismernie kell
  - Szabályok alkalmazásához stratégia (vagy keresés) kell
- Jellemzők:
  - Az előbb felvázolt H helyessége bizonyítható
    - $Tr_I \vdash_H \{p\}P\{q\}$ következménye $\models_I \{p\}P\{q\}$
  - H teljessége:
    - Ha a domén axióma- és szabályrendszere kellően bonyolult (elegendően erős): Gödel első nemteljességi tétele érvényes, azaz lehet olyan igaz állítás, ami nem bizonyítható
  - Specifikációs nyelv kifejezőképessége elegendő-e?

Specifikációs nyelv kifejezőképessége

- Definíciók:
  - SL specifikációs nyelv kifejező egy PL programnyelv és I domén esetén, ha
    $\forall p \in SL$, $\forall P \in PL$ esetén $post_I(p,P)$ kifejezhető SL-ben



  - Egy D dedukciós rendszer relatív teljes a részleges helyesség bizonyításához,
    ha $\forall SL$, $\forall PL$, $\forall I$ esetén, ahol SL kifejező PL-re és I-re, fennáll: $\models_I \{p\}P\{q\}$ következménye $Tr_I \vdash_D \{p\}P\{q\}$

H* dedukciós rendszer helyesség bizonyításhoz

- Cél: PLW programok helyességének bizonyítása
  - while B do P od ciklusok befejeződése kérdéses
- Ötlet (itt is): Paraméterezett állítások
  - Jól megalapozott halmaz (pl. n természetes szám)
  - pi(x,n) ciklus invariáns választása kell
- Módosuló REP szabály ebben az esetben:
  - REP*:

$$\frac{pi(x,n) \Rightarrow B \text{ és } \langle pi(x,n)\rangle P \langle pi(x,n-1)\rangle \text{ és } pi(x,0) \Rightarrow \neg B}{\langle \exists n: pi(x,n)\rangle \text{ while } B \text{ do } P \text{ od } \langle pi(x,0)\rangle}$$

  - Többi szabály:
    {…} helyett egyszerűen <…> kell

Aritmetikai kiterjesztés

- A módosult REP* szabály miatt:
  - SL-nek támogatnia kell a jól megalapozott halmaz használatát (itt: természetes számok)
- Tipikus eset: Peano-aritmetika támogatása
  - Természetes számok és +, *, s() műveletek
  - Tételbizonyító erre felkészítve
- Definíciók:
  - SL aritmetikai kiterjesztése SL^+, ha minimális bővítésként a Peano-aritmetikát tartalmazza
  - I domén aritmetikai kiterjesztése I^+, ha minimális bővítésként a Peano-aritmetika doménjét tartalmazza

Aritmetikai helyesség és teljesség

- Aritmetikai helyesség $p,q \in SL^+$ mellett:
  - Tr_{I+} $\mathbf{|-_D}$ <p>P<q> következménye $\mathbf{|=_{I+}}$ <p>P<q>
- Aritmetikai teljesség $p,q \in SL^+$ mellett:
  - $\mathbf{|=_{I+}}$ <p>P<q> következménye Tr_{I+} $\mathbf{|-_D}$ <p>P<q>
- Itt: H* aritmetikai helyessége bizonyítható

Összefoglalás

- Alacsony szintű pszeudo-nyelvek:
  - Részleges helyesség ciklusmentes programokra:
    - Visszalépéses számítási indukció
  - Részleges helyesség ciklust tartalmazó programokra:
    - Induktív állítások módszere
  - Helyesség ciklust tartalmazó programokra:
    - Paraméterezett induktív állítások módszere
- Strukturált programnyelvek (while programok):
  - Részleges helyesség:
    - Dedukciós rendszer (strukturális indukció)
  - Helyesség:
    - Dedukciós rendszer paraméterezett állításokkal
    - Aritmetikai kiterjesztés, aritmetikai helyesség és teljesség

Program helyességbizonyítás a gyakorlatban

Néhány példa:

- Spec# Programming System: C# kiterjesztés
  - Előfeltételek, utófeltételek megadása (metódusokhoz)
  - Objektum invariánsok (pl. adattartományok)
  - Boogie: Az utófeltételek automatikus ellenőrzése
- JML: Java Modelling Language
  - Előfeltételek, utófeltételek, invariánsok megadása
  - ESC/Java2: JML részhalmazhoz automatikus utófeltétel bizonyítás
- SPARK: Ada nyelvi részhalmaz
  - Interaktív tételbizonyítóval támogatott ellenőrzés
- B módszer: Speciális modellezési nyelv és megközelítés
  - Bizonyítandó tételek származtatása és a tételbizonyítás nagy részben automatikus
  - Fókusz: Specifikáció konzisztens finomítása

Eszköz példa: Spec# és Boogie2

Spec# Programming System
Microsoft

Ld: Dmitriy Dunaev referátuma, 2010.

Spec# részletek

```
int day_of_week;

public void newDOW(int day)
requires (day <= 7);
requires (day >= 1);
{
    day_of_week = day;
}
```

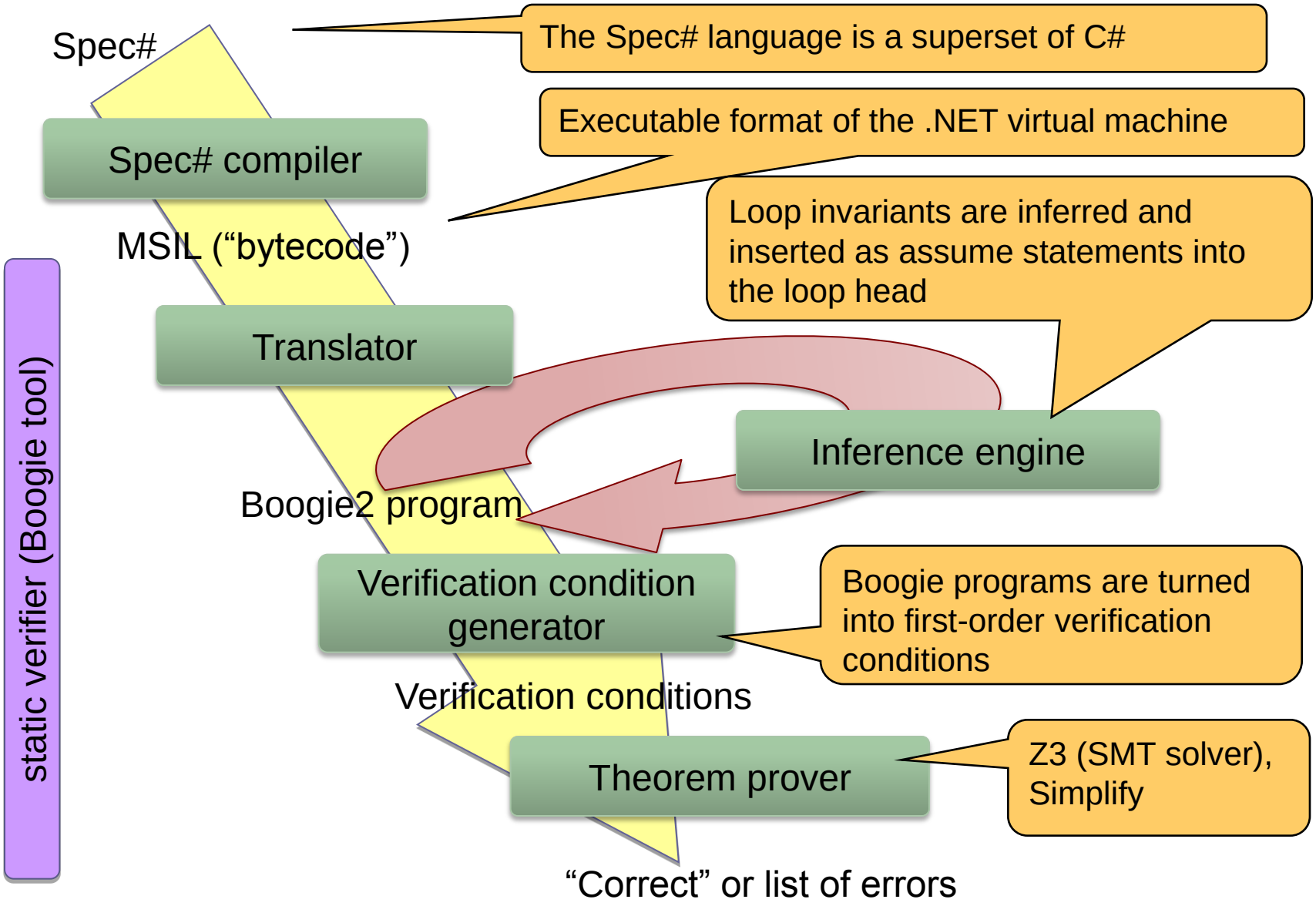
```
class Meeting {
        int day_of_week;
        invariant (1 <= day_of_week);
        invariant (7 > day_of_week);

    void newDOW(int day )
    {
            day_of_week = day;
    }
}
```

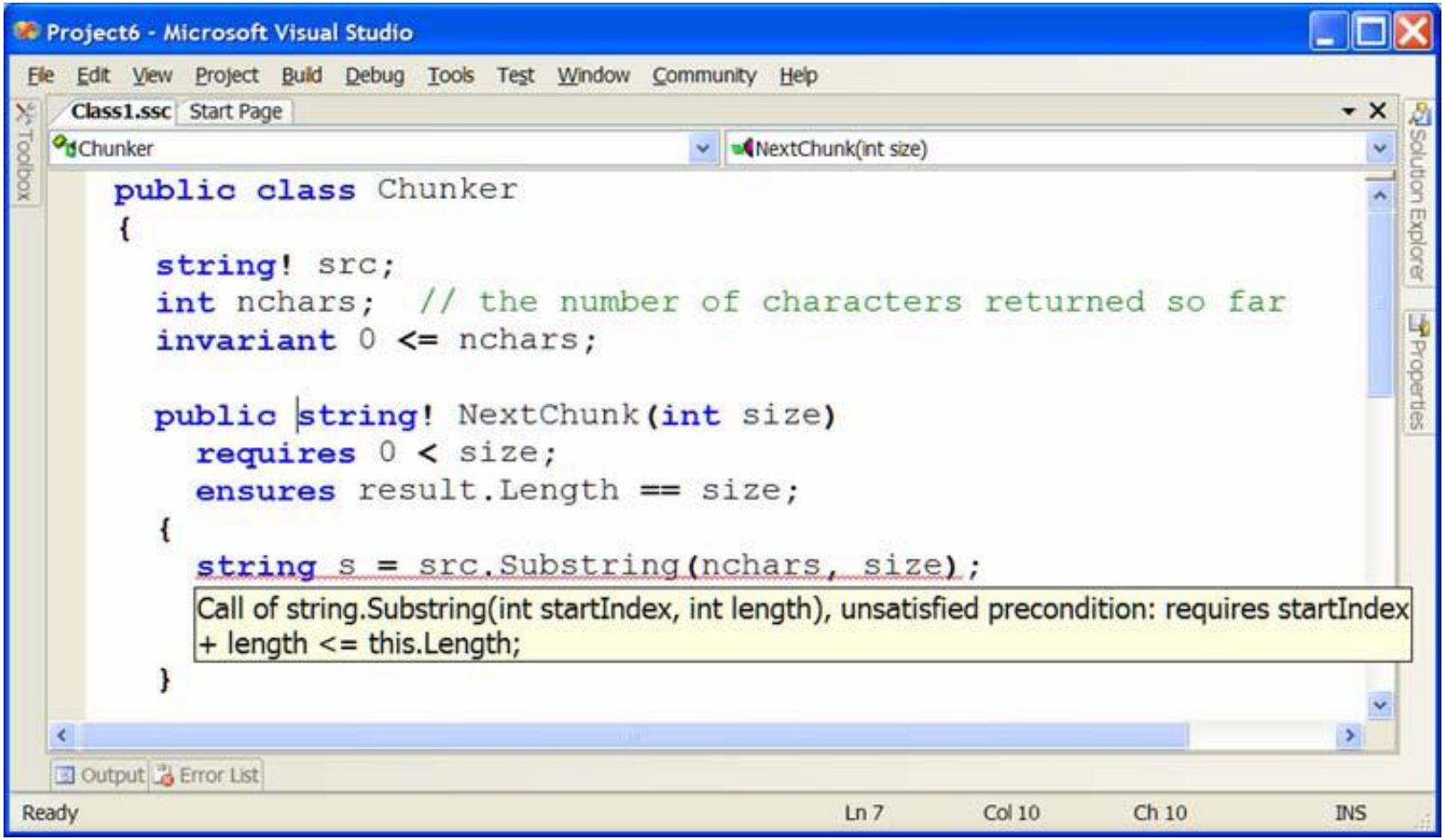
```
static void Swap(int[] a, int i, int j)
requires 0 <= i && i < a.Length;
requires 0 <= j && j < a.Length;
modifies a[i], a[j];
ensures a[i] == old(a[j]);
ensures a[j] == old(a[i]);
{
  int temp;
      temp = a[i];
  a[i] = a[j];
  a[j] = temp;
}
```

- Formal language for API contracts (influenced by JML, AsmL, Eiffel)
- Extends C# with constructs for preconditions, postconditions, invariants

Működés


Spec#
The Spec# language is a superset of C#
Spec# compiler
Executable format of the .NET virtual machine
MSIL (“bytecode”)
Loop invariants are inferred and inserted as assume statements into the loop head
Translator
Inference engine
Boogie2 program
Verification condition generator
Boogie programs are turned into first-order verification conditions
Verification conditions
Theorem prover
Z3 (SMT solver), Simplify
“Correct” or list of errors
static verifier (Boogie tool)

Eszköztámogatás



- Telepítés: .NET, Visual Studio, Spec# compiler, Boogie2, Z3, Simplify