Elérhetőségi analízis
Petri hálók dinamikus tulajdonságai

dr. Bartha Tamás

Dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Petri hálók vizsgálata

Vizsgálati lehetőségek

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció
- Állapottér bejárása
  - elérhetőségi gráf analízis
  - dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
- Strukturális tulajdonságok
  - invariáns analízis

egy trajektória bejárása

minden trajektória bejárása
(kimerítő bejárás)

kezdőállapottól független
(bármely kezdőállapotra)

ha mindez nem vezet eredményre

- Algebrai közelítés, részleges döntés

Petri hálók kezdőállapot-függő analízise

- Elérhetőségi analízis
  - az elérhetőségi gráf (állapottér!) konstrukciójával
  - **dinamikus** (viselkedési) tulajdonságok:
    - elérhetőség, fedhetőség, élőség, holtpontmentesség, korlátosság, fairség, megfordíthatóság
  - kezdőállapot-függő
    - nem általános érvényű tulajdonságok

ha az állapottér nem kezelhető

- Redukciós technikák
  - **tulajdonságmegtartó** transzformációk
    - a struktúra (és így az állapottér) szisztematikus csökkentése

Petri hálók kezdőállapot-független analízise

- Kezdőállapot-független tulajdonságok
  - meghatározhatók csak a struktúra alapján
    - vagy univerzális (minden működésre érvényes)
    - vagy egzisztenciális (lehetséges ilyen működés)
  - **strukturális** tulajdonságok
    - strukturális élőség, strukturális korlátosság, vezérelhetőség, konzervativitás, ismételhetőség, konzisztencia
- Invariáns tulajdonságok
  - tüzelési (T-, transition) invariáns
    - lehetséges olyan működés, hogy az állapot újra előálljon
  - hely (P-, place) invariáns
    - minden állapotban igaz és állandó
    - súlyozott tokenösszeg $\Rightarrow$ dinamikus egyensúly

Elérhetőség fogalma, tulajdonságai
Elérhetőségi analízis

Elérhetőség

Elérhetőségi analízis

- Kezdőállapotfüggő dinamikus viselkedés
  - Jelölés (marking) = állapot
  - Tokeneloszlás = állapotváltozó
  - Tüzelés = állapotátmenet
  - Tüzelési sorozatok hatására M_0, M_1, …, M_n állapotsorozat
- Állapotsorozat: trajektória az állapottérben
- M_n állapot *elérhető* az M_0 kiinduló állapotból, ha

$$\boxed{\exists \vec{\sigma} : M_0 \left[\vec{\sigma} > M_n \right.}$$

- Elérhetőségi gráf: állapottér grafikus képe

Elérhetőségi analízis

Az M_0 kiinduló állapotból az N Petri hálóban

– Elérhető állapotok

$$\boxed{R(N, M_0) = \left\{ M \mid \exists \vec{\sigma} : M_0 [\vec{\sigma} > M \right\}}$$

- Állapot bázisú kérdések

– Végrehajtható tüzelési sorozatok

$$\boxed{L(N, M_0) = \left\{ \exists \vec{\sigma} \mid M : M_0 [\vec{\sigma} > M \right\}}$$

- Állapotátmenet (esemény) bázisú kérdések

Elérhetőségi probléma

Petri hálók elérhetőségi problémája:

– M_n állapot elérhető-e valamilyen M_0 kiinduló állapotból

$$\boxed{M_n \overset{?}{\in} R(N, M_0)}$$

Rész-tokeneloszlási probléma:

– helyek egy $P' \subset P$ részhalmazára korlátozva elérhető-e M_n állapot az adott helyekre megadott tokeneloszlással

$$\boxed{\overset{?}{\exists} M \in R(N, M_0) \wedge \forall p \in P' : M\left(p\right) = M_n\left(p\right)}$$

Elérhetőségi probléma megoldhatósága

- Az elérhetőségi probléma eldönthető
  - de exponenciális (hely) komplexitású általános esetben
- Míg az egyenlőségi probléma eldönthetősége általános esetben bizonyítottan nem lehetséges
  - feladat: két Petri háló (N, N’) lehetséges tüzelési sorozatai azonosságának eldöntése

$$\boxed{L(N, M_0) \stackrel{?}{=} L(N', M_0')}$$

  - 1-korlátos (biztos) Petri hálók esetén exponenciális
    - processz algebra, biszimuláció

Petri hálók dinamikus (viselkedési) tulajdonságai

Dinamikus tulajdonságok

- Elérhetőséggel kapcsolatos tulajdonságok
  - Függenek a kiinduló állapottól (kezdő jelöléstől)
    - ⇒ **strukturális** tulajdonságok: kiinduló állapottól <u>függetlenek</u>
  - Nem csak elérhetőségi analízissel határozhatók meg
- Dinamikus tulajdonságok:
  - Korlátosság
  - Élő tulajdonság
    - Holtpontmentesség
  - Megfordíthatóság
  - Visszatérő állapot
  - Fedhetőség
  - Perzisztencia
  - Fair tulajdonság
    - Korlátozott fairség
    - Globális fairség

Dinamikus tulajdonságok: végesség

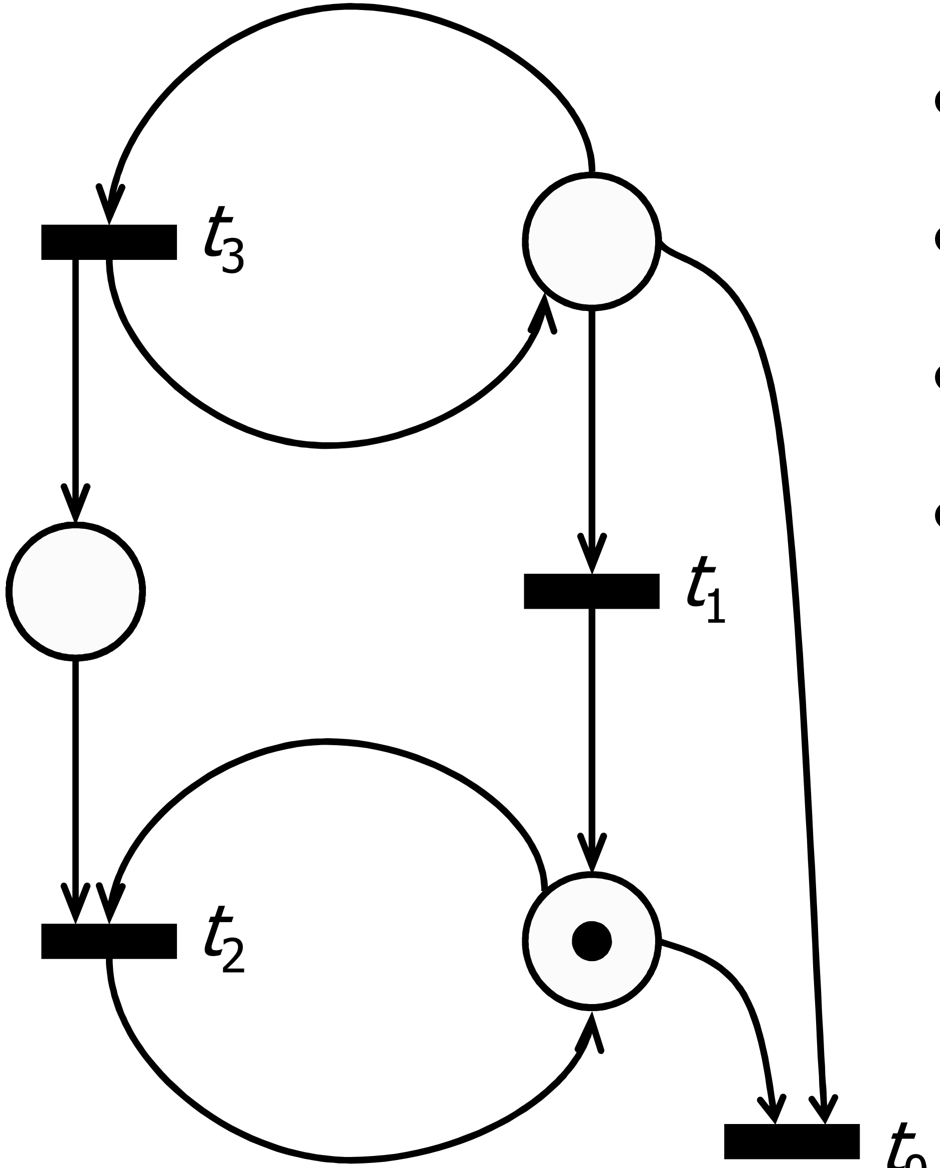
- *k*-korlátosság (korlátosság)
  - bármely állapotban minden helyen helyenként maximum *k* token lehet (M_0 kiinduló állapot függő!)
    - Biztos Petri háló: korlátosság speciális esete ($k = 1$)
  - végesség kifejezése
    - korlátosság $\Leftrightarrow$ véges állapottér
  - erőforrás használat, illetve általános értelemben vett feladatkezelés modellezése
    - (részben) konzervativitás $\overset{?}{\Rightarrow}$ korlátosság
  - a rendszerben a feladatok elvégzése garantált-e?

Dinamikus tulajdonságok: élőség

- Holtpont (deadlock) -mentesség
  - Minden állapotban legalább egy tranzíció tüzelhető
- Élő tulajdonság
  - Tranzíció egyszer/többször/végtelenszer tüzelhet-e?
  - Gyenge élő tulajdonságok egy *t* tranzícióra:
    - L_0-élő (halott): *t* sohasem tüzelhető egyetlen
    - L_1-élő: *t* legalább egyszer tüzelhető valamely
    - L_2-élő: bármely véges $k > 1$ egészre *t* legalább k–szor tüzelhető valamely
    - L_3-élő: *t* végtelen sokszor tüzelhető valamely

    $\vec{\sigma} \in L(N, M_0)$ állapot-trajektóriában
  - L_4-élő: *t* L_1-élő bármely $M_n \in R(N, M_0)$ állapotban

Élő tulajdonság: példa



- t_0 tranzíció: L_0-élő (halott)
- t_1 tranzíció: L_1-élő
- t_2 tranzíció: L_2-élő
- t_3 tranzíció: L_3-élő

Dinamikus tulajdonságok: élőség (folyt.)

- Egy (P, T, M_o) Petri háló L_x-élő
  - ha minden $t \in T$ tranzíció L_x-élő
  - L_4-től L_1-ig az élő tulajdonságok tartalmazzák egymást
- Egy (P, T, M_o) Petri háló élő
  - ha L_4-élő, azaz minden $t \in T$ tranzíció L_4-élő
  - Bejárási úttól függetlenül garantáltan holtpontmentes
    - köztes állapottól függetlenül minden tranzíció újra tüzelhető
    - holtpontmentesség $\Leftarrow$ élőség
  - Bizonyítása költséges lehet
    - szerencsés esetben nem (invariánsok!)
    - ideális rendszert tételez fel

Dinamikus tulajdonságok: ciklikusság

- Megfordíthatóság
  - A kezdőállapot bármely követő állapotból elérhető

$$\boxed{\forall M \in R(N, M_0) \Rightarrow M_0 \in R'(N, M)}$$

  - Gyakran ciklikus működésű hálózat
- Visszatérő állapot
  - Van olyan, a kezdőállapotból elérhető állapot, amely bármely <u>őt</u> követő állapotból elérhető

$$\boxed{\exists M_n \in R(N, M_0) : \forall M \in R'(N, M_n) \Rightarrow M_n \in R''(N, M)}$$

  - Gyakran ciklikus (rész)hálózat inicializáló szekvenciával

Dinamikus tulajdonságok: ciklikusság (folyt.)

- Fedhetőség
  - Létrejön-e korábbi működést magában foglaló állapot?
  - M' állapot fedi M állapotot, ha $M' \in R(N, M_0) \wedge M' \geq M$
    - M állapot fedhető M' állapottal
    - $M' \geq M$ jelentése: $\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}(p)$
      - gyenge fedhetőség esetén az azonos állapot is fed, ha elérhető
      - erős fedhetőség: $\exists p \in P : \mathrm{m}''(p) > \mathrm{m}(p)$
  - μ a t tranzíciót engedélyező minimális tokeneloszlás
    - t akkor és csak akkor nem L_1-élő, ha μ nem fedhető le
      - gyenge fedhetőség elég
    - fordítva: μ lefedhetősége garantálja t L_1-élő voltát

Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás

- Perzisztencia
  - Két tetszőleges engedélyezett tranzíció közül egyik tüzelése sem tiltja le a másik engedélyezettségét
    - engedélyezett tranzíció engedélyezve marad tüzelésig!
  - Rendszerbeli funkcionális dekompozíció megmarad-e?
  - Párhuzamos működések befolyásolják-e egymást?
- Egy (P, T, M_o) Petri háló perzisztens, ha
  - bármely két t_1, $t_2 \in T$ tranzíciója az összes lehetséges tüzelési szekvenciában perzisztens

Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás (folyt.)

- Fair tulajdonság
  - Párhuzamos folyamatok nem tartják-e fel egymást?
  - Valamennyi folyamat végbemegy-e (előbb-utóbb)?
- Nem egységes a fairség definíciója
  - Korlátozott fairség (B-fairség)
  - Globális fairség (korlátlan fairség)
- Egy tüzelési szekvencia korlátozottan fair (B-fair)
  - ha bármely tranzíció maximum korlátos sokszor tüzelhet anélkül, hogy egy másik tranzíció tüzelne
- Egy (P, T, M_o) Petri háló korlátozottan fair (B-fair)
  - ha minden $t \in T$ tranzíció az összes lehetséges tüzelési szekvenciában korlátozottan fair (B-fair)

Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás (folyt.)

- Globális fairség
  - Egy tüzelési szekvencia globálisan fair, ha
    - véges, vagy
    - az összes tranzíció végtelen sokszor szerepel benne
  - Egy (P, T, M_0) Petri háló globálisan (korlátlanul) fair
    - ha a háló összes lehetséges tüzelési szekvenciája globálisan (korlátlanul) fair

Dinamikus tulajdonságok (összefoglalás)

- Korlátosság
- Holtpontmentesség
- Élő tulajdonság
  - L0 élő (halott)
  - L1 élő (1-szer tüzelhető)
  - L2 élő (k-szor tüzelhető)
  - L3 élő (∞-szer tüzelhető)
  - L4 élő (∀ állapotban L1)
- Megfordíthatóság
  - Visszatérő állapot
- Fedhetőség
  - Gyenge fedhetőség
  - Erős fedhetőség
- Perzisztencia
- Fair tulajdonság
  - Korlátozott fairség
  - Globális fairség

Állapottér reprezentációk:
az elérhetőségi és fedési gráf

Állapottér reprezentációk: elérhetőségi gráf

- Elérhetőségi gráf
  - M_0 kezdőállapotból induló állapotgráf
    - csomópontok: állapotok $\rightarrow$ címkézés: tokeneloszlások
    - állapotátmenetek: irányított élek $\rightarrow$ címkézés: tüzelések
    - legfeljebb annyi új csomópont, ahány engedélyezett tranzíció
      - kevesebb, ha prioritásos a Petri háló
    - csomópont, amiből nem indul ki él: holtpont
  - Nem korlátos a Petri háló $\rightarrow$ végtelen sok állapot
    - korlátosság $\Leftrightarrow$ véges állapottér
  - Szélességi típusú bejárás az állapotból tüzelések mentén
    - mélységi bejárás nem korlátos állapottérben rossz ötlet…
    - viszont a részleges sorrendezési redukció mélységi kereséssel

Állapottér reprezentációk: fedési gráf

- Petri háló mérete/bonyolultsága és az állapottér mérete közti korreláció?
  - pl. megállási probléma
- Végesség hiányát kezelni kell
- Fedési gráf: végtelen állapottér esetére is
  - Hasonló felépítés: M_0 kezdőállapot, élek: tüzelések
  - Kritikus részek: token „túlszaporodás”
    - trajektória: $M_0 \ldots M'' \ldots M$, M' és $M'' \leq M'$ $\rightarrow$ fedett állapotok!
    - $p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p)$ $\rightarrow$ fedett helyek (erős fedhetőség)
    - fedett helyekre speciális szimbólum: ω a végtelenség kifejezője

Fedési fa generáló algoritmus

$L_{vizsgálandó} \leftarrow \{ M_0 \}$

`MAIN:` **`if`** $L_{vizsgálandó} \neq \emptyset$

A következő $M \in L_{vizsgálandó}$ állapot kiválasztása

`if` M a gyökértől idáig vezető úton már szerepelt

`then` M-et „régi állapotként” jelöljük

`goto` `MAIN` // ciklus

`if` M-ben nincs engedélyezett tüzelés

`then` M-et „végállapotként” (halott állapot) jelöljük

`goto` `MAIN` // ciklus

Fedési fa generáló algoritmus (folyt.)

`else` // (van *M* -ben engedélyezett tranzíció)

`for all` *t* engedélyezett tranzícióra:

Az *M′* rákövetkező állapot meghatározása: $M\left[\vec{e}_t > M'\right.$

`if` létezik az M_0-tól *M* -ig vezető úton olyan *M″*, amelyet *M′* fed

$$\boxed{M' \neq M'' \wedge \forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}''(p) \wedge \exists p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p)}$$

`then` *M″* fedett állapot:

az *M′* állapotot jelölő tokeneloszlásban
a fedett helyek jelöléseit ω-val helyettesítjük

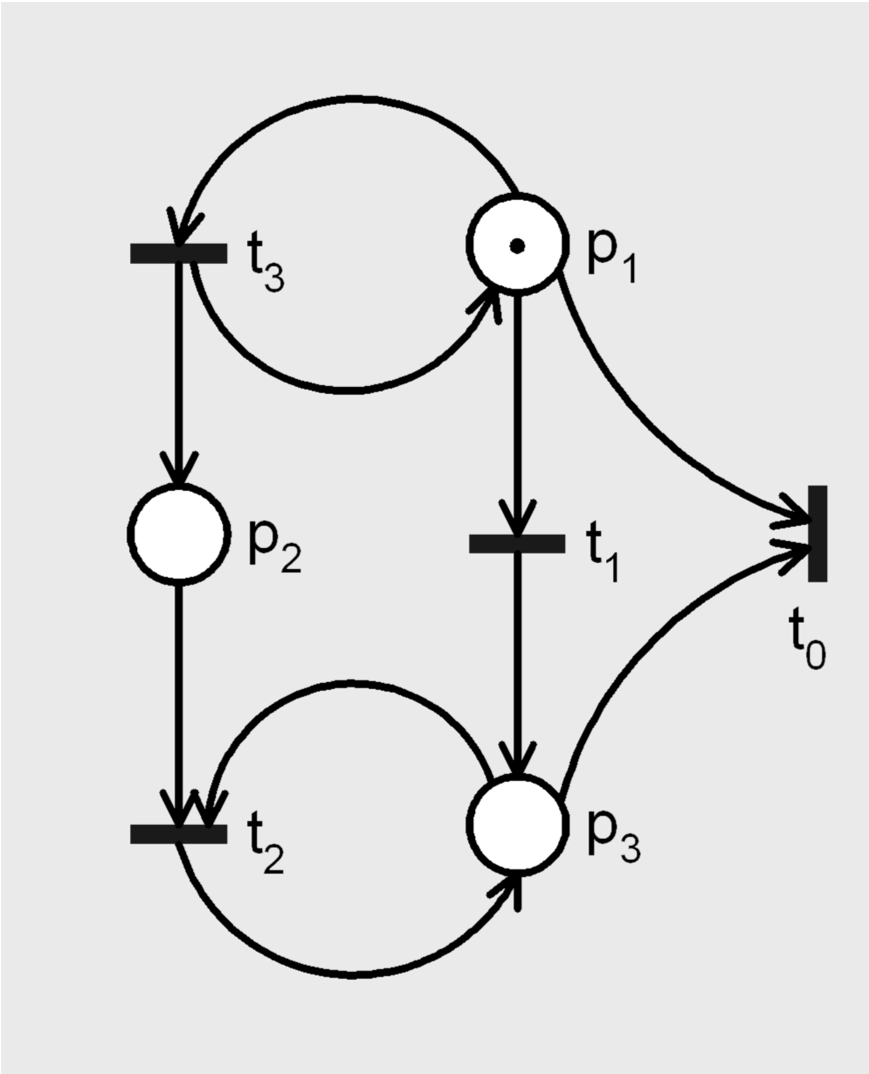
$$\boxed{\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p) \rightarrow \mathrm{m}'(p) = \omega}$$

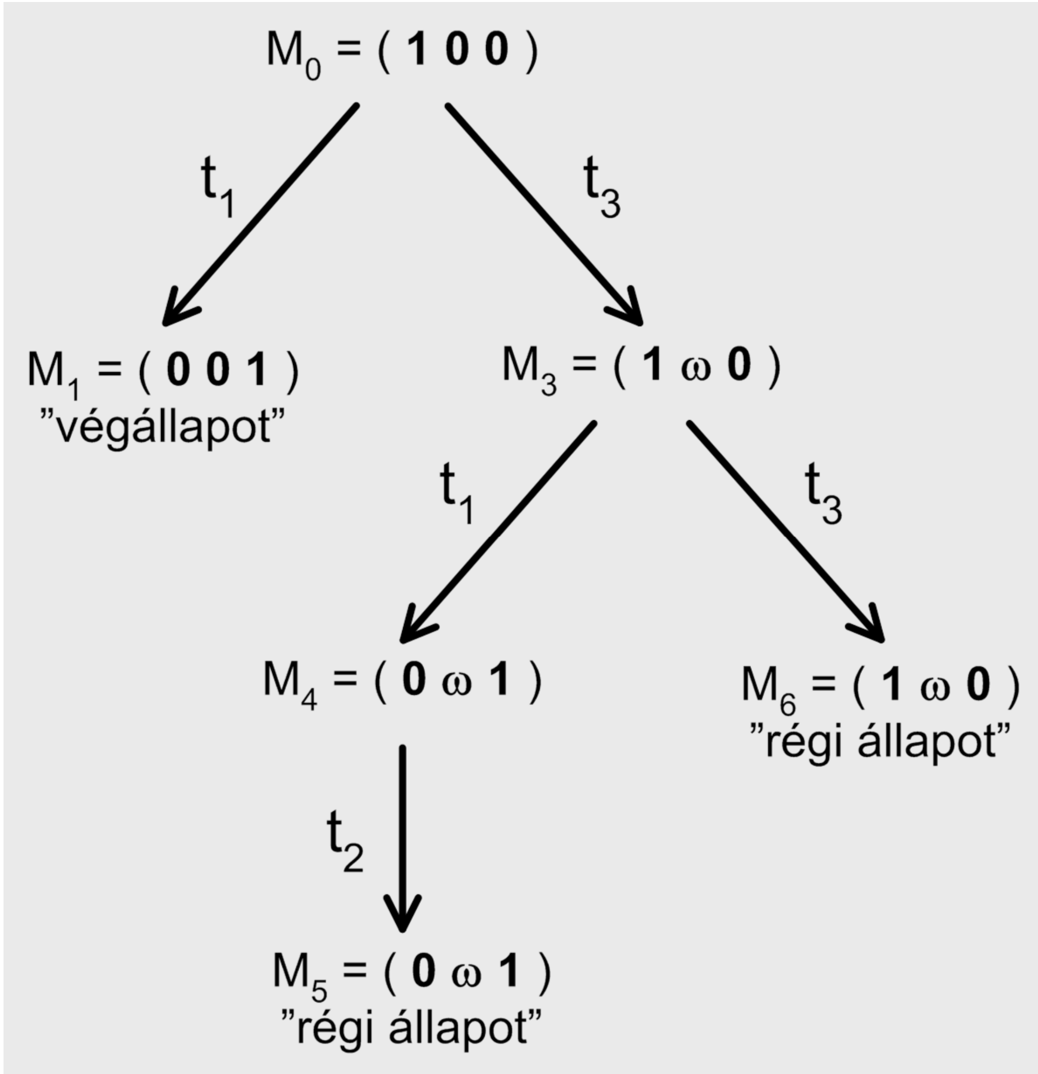
`else` *M′* új állapot: $L_{\text{vizsgálandó}} \leftarrow L_{\text{vizsgálandó}} \cup M'$

M -ből *M′*-höz egy *t* -vel jelölt élet húzunk

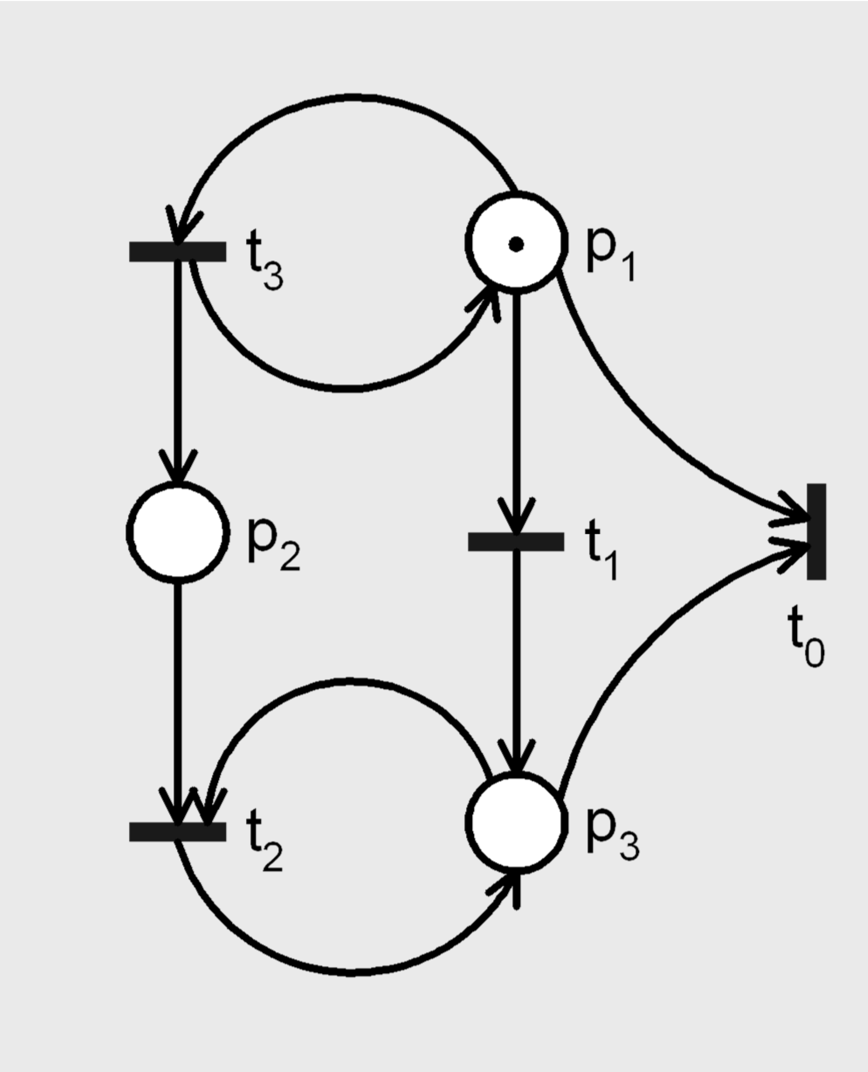
`goto` `MAIN` // ciklus

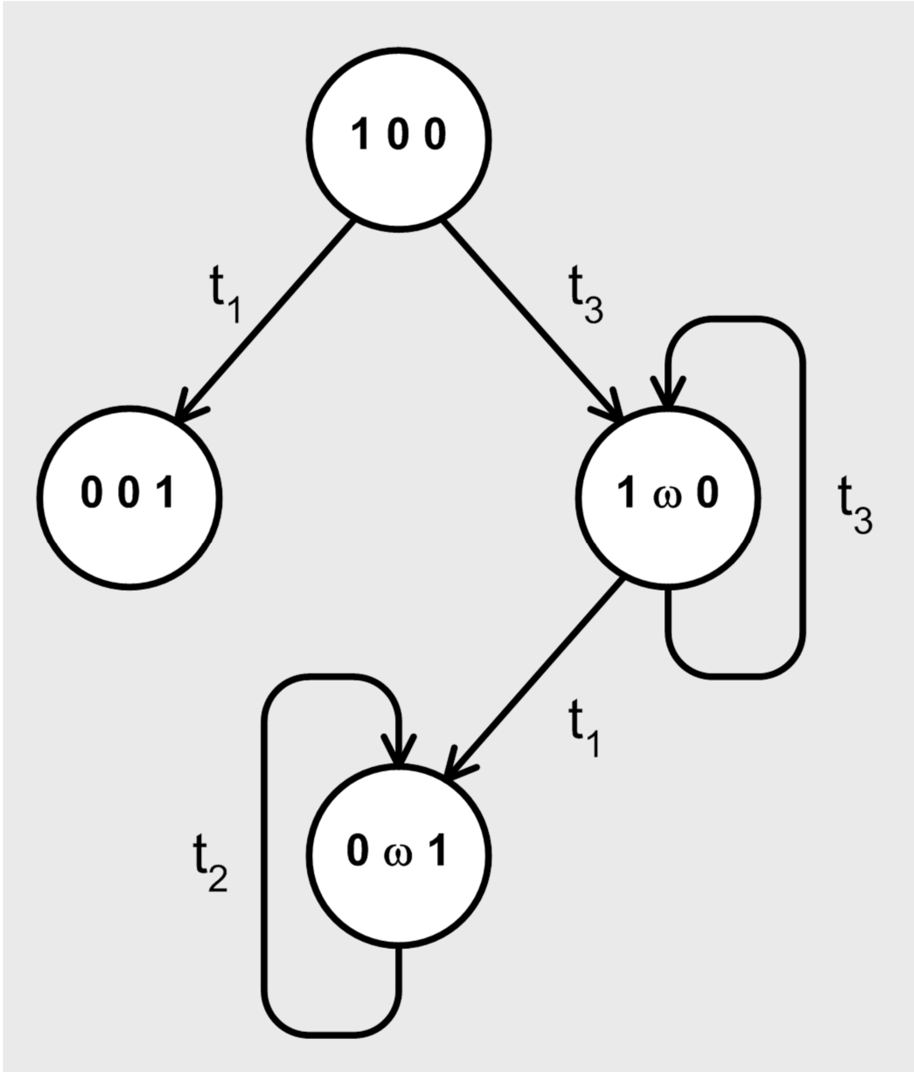
A példa és annak fedési fája





A példa és annak fedési gráfja





Petri hálók fedési fájának analízise

Közvetlenül is leolvasható tulajdonságok:

– Petri háló korlátos ⇔ $R(N, M_0)$ elérhetőségi gráfja véges ⇔ Fedési fában ω nem jelenik meg címkeként

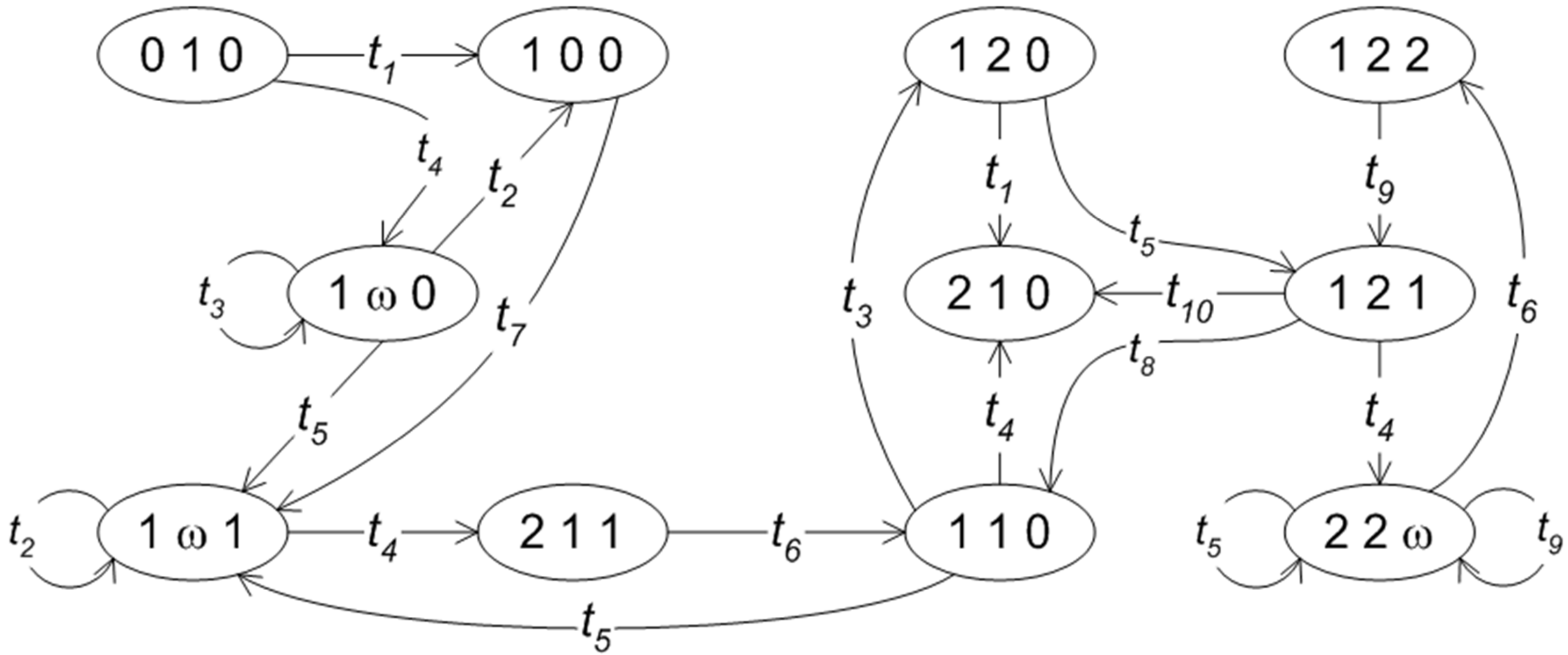
– Petri háló biztonságos ⇔ Csak 0 és 1 jelenik meg csomópont címkeként a fedési fában

– Petri háló egy tranzíciója halott ⇔ tranzícióhoz tartozó tüzelés nem jelenik meg élcímkeként a fedési fában

Dinamikus tulajdonságok vizsgálata az állapotérben

Tipikus feladat

Az ábra egy Petri háló állapotterét mutatja be fedési gráf alakban. A hálóban 10 darab tranzíció található, amelyeket t_1, ..., t_{10} címkékkel jelölünk. Az állapotokat a token eloszlás vektorral címkéztük meg, tehát 0 1 0 jelentése: $m(p_1) = 0$, $m(p_2) = 1$ és $m(p_3) = 0$.



Tipikus kérdések

1. A Petri háló élő?
2. A háló (deadlock) holtpontmentes?
3. t_6 tranzíció L_3-élő?
4. t_7 tranzíció L_2-élő?
5. A (2 2 1) állapot fedhető?
6. A (2 1 0) állapot fedhető?
7. A háló perzisztens?
8. A háló korlátos?
9. A háló megfordítható?
10. A hálóban létezik visszatérő állapot?
11. t_4 és t_6 tranzíció korlátos fair tulajdonságú?
12. t_5 és t_8 tranzíció korlátos fair tulajdonságú?
13. Létezik P-invariáns?
14. Létezik T-invariáns?

Élőség vizsgálata az állapottérben

- Ellenpéldát találni (szinte mindig) a leggyorsabb és legegyszerűbb megoldás!
- Élőség:
  - L_4-élőség
    - végig kell nézni, hogy mindig tüzelhetővé válik-e?
    - minden trajektóriára teljesülnie kell!
  - L_3-élőség (és a többi)
    - elég egy trajektóriát találni, ahol teljesül!
  - A háló akkor élő, ha minden tranzíciója élő!
    - ha találunk akár egy tranzíció esetében ellenpéldát $\rightarrow$ nem élő
  - Ha holtpontmentes, akkor még nem biztos, hogy élő is!

Korlátosság vizsgálata az állapottérben

- Korlátosság:
  - lásd a fedési gráfnál tanultakat!
    - „Petri háló korlátos ⇔ $R(N, M_0)$ elérhetőségi gráfja véges ⇔ fedési fában ω nem jelenik meg állapot címkében”
  - biztosság:
    - „Petri háló biztos ⇔ csak 0 és 1 jelenik meg állapot címkében a fedési fában”

További dinamikus tulajdonságok

- Megfordíthatóság:
  - Az elérhetőségi gráf egyetlen erősen összekötött komponens?
- Visszatérő állapot:
  - Van az elérhetőségi gráfban erősen összekötött komponens?
  - Az adott állapot része ennek?
- Fairség:
  - „Az egyik tranzíció korlátos sokszor tüzelhet, mielőtt a másik tüzelne”
  - Van-e olyan ciklus, amiben az egyik tranzíció benne van és a másik nincs?
    - →van: ellenpélda, hiszen létezik tüzelési szekvencia, amiben korlátlan sokszor tüzel
- Perzisztencia:
  - „A tranzíció mindaddig engedélyezett marad, amíg nem tüzel”
    - → ha több engedélyezett és nem ő tüzelt, akkor a következő állapotban is engedélyezett marad
    - → ha engedélyezett maradt, akkor meg is jelenik élcímkeként (prioritás?)

Dinamikus tulajdonságok analízis eszközökben

- Korlátosság (Boundedness)
- Élő (L_4-élő) tulajdonság (Liveness)
- Holtpont (Deadlock) felderítése
- Visszatérő állapotok (Home States)
- Fedési gráf (Coverability Graph)
- Hely invariánsok (P-Invariants)
- Tüzelési invariánsok (T-Invariants)