Petri hálók strukturális és dinamikus tulajdonságai közti összefüggések

dr. Bartha Tamás

Dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Vizsgálati lehetőségek

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció
- Állapottér bejárása
  - elérhetőségi gráf analízis
  - dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
- Strukturális tulajdonságok
  - invariáns analízis

egy trajektória bejárása

minden trajektória bejárása
(kimerítő bejárás)

kezdőállapottól független
(bármely kezdőállapotra)

ha mindez nem vezet eredményre

- Algebrai közelítés, részleges döntés

Petri háló tulajdonságok

Dinamikus tulajdonságok:

- Élőség
- Holtpontmentesség
- Korlátosság
- Megfordíthatóság
  - Visszatérő állapot
- Perzisztencia
- Globális fair reláció
  - B-fair (korlátos fair) reláció

Strukturális tulajdonságok:

- Strukturális élőség
- Vezérelhetőség
- Strukturális korlátosság
- Konzervativitás
  - P-invariáns (hely)
- Ismételhetőség
  - T-invariáns (tüzelési)
- Konzisztencia
- Strukturális B-fair reláció

Holtpontmentesség $\rightarrow$ T-invariáns

- Ha (N, M_0) Petri háló <u>korlátos</u> és holtpontmentes: $\Rightarrow \exists \vec{\sigma}_T$ tüzelhető T-invariáns, melyre $\boxed{\vec{\sigma}_T \underset{\neq}{\geq} 0}$
- Bizonyítás:
  - korlátosság $\Rightarrow$ véges állapottér
  - holtpontmentesség $\Rightarrow \exists$ legalább egy M_0-ból induló $\vec{\sigma}_T$ végtelen tüzelési szekvencia
  - végesség $\Rightarrow \exists$ legalább egy $M' \in R(N, M_0)$ ismétlődő állapot $\Rightarrow$ az $M' \xrightarrow{\vec{\sigma}_T} M'$ szekvencia T-invariáns

- Következmény: ha nincsen ilyen T-invariáns, a hálózat **minden úton elakad** (nincs ciklusa)

Élőség $\rightarrow$ T-invariáns

- Ha (N, M_0) Petri háló élő és korlátos $\Rightarrow \exists$ tüzelhető $\vec{\sigma}_T$ T-invariánsa, melyre $\boxed{\forall t \in T : \vec{\sigma}_T(t) > 0}$
- Bizonyítás:
  - élő $\Rightarrow \forall\, t \in T$ tranzíció $\forall\, M \in R(N, M_0)$ állapotban L_1-élő
    - $\exists$ trajektória, hogy minden tranzíció végtelen sokszor
  - korlátos és holtpontmentes $\Rightarrow \exists$ tüzelhető T-invariáns
  - indirekt: tegyük fel, hogy $\exists\, t_i \in T$ tranzíció, ami nem eleme egyetlen T-invariánsnak sem
    - $S \subseteq R(N, M_0)$ azon állapotok halmaza, melyekből t_i kimenő él
    - S véges elemű: t_i véges sokszor tüzelhető anélkül, hogy kétszer azonos állapotból indulnánk $\Rightarrow$ a Petri háló nem élő!

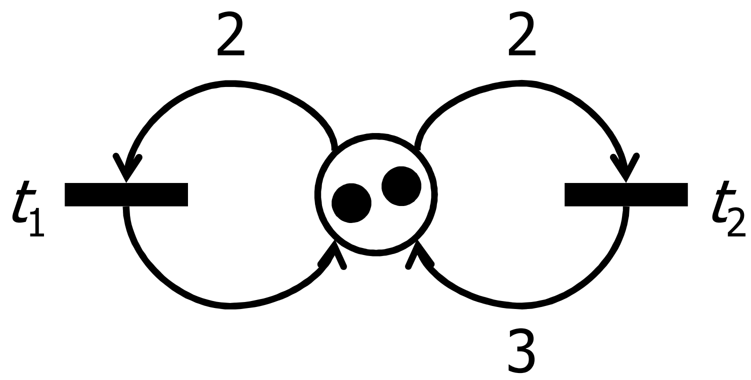
Másik gondolatmenet

- Ha $PN(N, M_0)$ élő
  - $\exists$ olyan tüzelési szekvencia, amelyikben $\forall\, t \in T$ tranzíció végtelen sokszor előfordul
  - Pl: $M_0 \xrightarrow{\ldots t_1} M_1 \xrightarrow{\ldots t_2} \ldots \xrightarrow{\ldots t_n} M_n \xrightarrow{\ldots t_1} \ldots$
  - $\exists$ olyan véges szakaszok, amikben $\forall\, t \in T$ tranzíció előfordul
  - végesség $\Rightarrow$ az ezek által bejárt állapotok között $\exists$ legalább egy M' ismétlődő állapot
  - A $\vec{\sigma}_T : M' \to M'$ szekvencia T-invariáns, amelyben $\forall\, t \in T$ tranzíció előfordul
  - Erre $\vec{\sigma}_T > 0$

Következmény

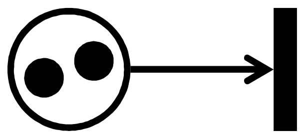
- Ha korlátos Petri hálóban nincs ilyen T-invariáns $\Rightarrow$ **a háló nem élő!**
- Bizonyítás (a korábbi gondolatmenettel):
  - ha egy $t \in T$ tranzíció nincs benne egyetlen T-invariánsban sem $\Rightarrow$ nincs benne egyetlen ciklusban sem $\Rightarrow$ csak véges sokszor tüzelhet
- A tétel megfordítása (hálónak $\exists$ tüzelhető, $\forall t \in T$ tranzíciót lefedő T-invariánsa $\Rightarrow$ élő) **nem igaz**!

ellenpélda:



P-invariáns $\rightarrow$ Korlátosság

- Ha (N, M_0) Petri hálónak $\exists$ minden helyet lefedő P-invariánsa $\Rightarrow$ a háló korlátos
- Bizonyítás:
  - $\exists$ minden helyet lefedő P-invariáns $\Rightarrow \exists \vec{\mu} > 0 : \mathbf{W}\vec{\mu} = 0$
  - teljesül a strukturális korlátosság feltétele: $\boxed{\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0}$
- A tétel megfordítása (korlátosságból következik a P-invariánsok léte) triviálisan nem igaz!



Összefüggőség $\rightarrow$ Invariáns

- Minden összefüggő Petri háló, amelynek van
  - egy pozitív (minden tranzíciót fedő) T-invariánsa és
  - egy pozitív (minden helyet fedő) P-invariánsa

  erősen összefüggő
- Petri háló élő és korlátos $\Rightarrow$ erősen összefüggő
  - gráf erős összefüggősége szükséges, de nem elégséges
  - létezik olyan erősen összefüggő Petri háló, amelynek
    - nincs korlátos kezdőállapota, amellyel élő
    - nincs nemüres kezdőállapota, amellyel korlátos

    vagy