# Petri-hálók tulajdonságai
# A modell viselkedésének ellenőrzése

dr. Bartha Tamás
Dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

# Petri-hálók vizsgálata

# Vizsgálati lehetőségek

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció
- Állapottér bejárása
  - elérhetőségi gráf analízis
  - dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
- Strukturális tulajdonságok
  - invariáns analízis

egy trajektória bejárása

minden trajektória bejárása (kimerítő bejárás)

kezdőállapottól független (bármely kezdőállapotra)

ha mindez nem vezet eredményre

- Algebrai közelítés, részleges döntés

# Petri-hálók kezdőállapot-függő analízise

- Elérhetőségi analízis
  - az elérhetőségi gráf (állapottér!) konstrukciójával
  - **dinamikus** (viselkedési) tulajdonságok:
    - elérhetőség, fedhetőség, élőség, holtpontmentesség, korlátosság, fairség, megfordíthatóság
  - kezdőállapot-függő
    - nem általános érvényű tulajdonságok

ha az állapottér nem kezelhető

- Redukciós technikák
  - **tulajdonságmegtartó** transzformációk
    - a struktúra (és így az állapottér) szisztematikus csökkentése

# Petri-hálók kezdőállapot-független analízise

- Kezdőállapot-független tulajdonságok
  - meghatározhatók csak a struktúra alapján
    - vagy univerzális (minden működésre érvényes)
    - vagy egzisztenciális (lehetséges ilyen működés)
  - **strukturális** tulajdonságok
    - strukturális élőség, strukturális korlátosság, vezérelhetőség, konzervativitás, ismételhetőség, konzisztencia
- Invariáns tulajdonságok
  - tüzelési (T-, transition) invariáns
    - lehetséges olyan működés, hogy az állapot újra előálljon
  - hely (P-, place) invariáns
    - minden állapotban igaz és állandó
    - súlyozott tokenösszeg $\Rightarrow$ dinamikus egyensúly

# Elérhetőség fogalma, tulajdonságai
# Elérhetőségi analízis

# Elérhetőség

## Elérhetőségi analízis

- Kezdőállapotfüggő dinamikus viselkedés
  - Jelölés (marking) = állapot
  - Tokeneloszlás = állapotváltozó
  - Tüzelés = állapotátmenet
  - Tüzelési sorozatok hatására $M_0$, $M_1$, …, $M_n$ állapotsorozat
- Állapotsorozat: trajektória az állapottérben
- $M_n$ állapot *elérhető* az $M_0$ kiinduló állapotból, ha

$$\boxed{\exists \vec{\sigma} : M_0 \left[ \vec{\sigma} > M_n \right.}$$

- Elérhetőségi gráf: állapottér grafikus képe

# Elérhetőségi analízis

Az $M_0$ kiinduló állapotból az $N$ Petri-hálóban

- Elérhető állapotok

$$\boxed{R(N, M_0) = \left\{ M \mid \exists \vec{\sigma} : M_0 [\vec{\sigma} > M \right\}}$$

  - Állapot bázisú kérdések

- Végrehajtható tüzelési sorozatok

$$\boxed{L(N, M_0) = \left\{ \exists \vec{\sigma} \mid M : M_0 [\vec{\sigma} > M \right\}}$$

  - Állapotátmenet (esemény) bázisú kérdések

# Elérhetőségi probléma

## Petri-hálók elérhetőségi problémája:

– $M_n$ állapot elérhető-e valamilyen $M_0$ kiinduló állapotból

$$\boxed{M_n \overset{?}{\in} R(N, M_0)}$$

## Rész-tokeneloszlási probléma:

– helyek egy $P' \subset P$ részhalmazára korlátozva elérhető-e $M_n$ állapot az adott helyekre megadott tokeneloszlással

$$\boxed{\overset{?}{\exists} M \in R(N, M_0) \wedge \forall p \in P' : M(p) = M_n(p)}$$

# Elérhetőségi probléma megoldhatósága

- Az elérhetőségi probléma eldönthető
  - de exponenciális (hely) komplexitású általános esetben
- Míg az egyenlőségi probléma eldönthetősége általános esetben bizonyítottan nem lehetséges
  - feladat: két Petri-háló (N, N’) lehetséges tüzelési sorozatai azonosságának eldöntése

$$\boxed{L(N, M_0) \stackrel{?}{=} L(N', M_0')}$$

  - 1-korlátos (biztos) Petri-hálók esetén exponenciális
    - processz algebra, biszimuláció

# Petri-hálók dinamikus (viselkedési) tulajdonságai

# Dinamikus tulajdonságok

- Elérhetőséggel kapcsolatos tulajdonságok
  - Függenek a kiinduló állapottól (kezdő jelöléstől)
    - $\Rightarrow$ **strukturális** tulajdonságok: kiinduló állapottól <u>függetlenek</u>
  - Nem csak elérhetőségi analízissel határozhatók meg
- Dinamikus tulajdonságok:
  - Korlátosság
  - Élő tulajdonság
    - Holtpontmentesség
  - Megfordíthatóság
  - Visszatérő állapot
  - Fedhetőség
  - Perzisztencia
  - Fair tulajdonság
    - Korlátozott fairség
    - Globális fairség

# Dinamikus tulajdonságok: végesség

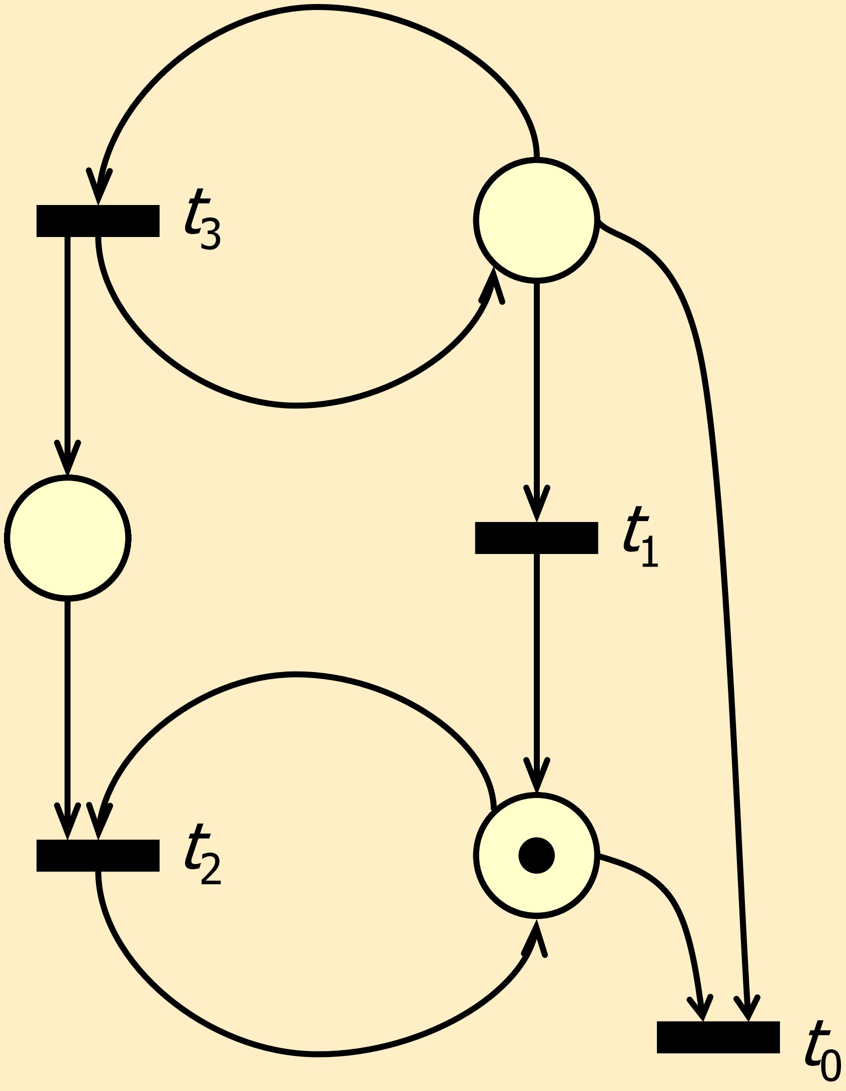
- *k* -korlátosság (korlátosság)
  - bármely állapotban minden helyen helyenként maximum *k* token lehet ($M_0$ kiinduló állapot függő!)
    - Biztos Petri-háló: korlátosság speciális esete ($k = 1$)
  - végesség kifejezése
    - korlátosság $\Leftrightarrow$ véges állapottér
  - erőforrás használat, illetve általános értelemben vett feladatkezelés modellezése
    - (részben) konzervativitás $\overset{?}{\Rightarrow}$ korlátosság
  - a rendszerben a feladatok elvégzése garantált-e?

# Dinamikus tulajdonságok: élőség

- Holtpont (deadlock) -mentesség
  - Minden állapotban legalább egy tranzíció tüzelhető
- Élő tulajdonság
  - Tranzíció egyszer/többször/végtelenszer tüzelhet-e?
  - Gyenge élő tulajdonságok egy $t$ tranzícióra:
    - $L_0$-élő (halott): $t$ sohasem tüzelhető egyetlen
    - $L_1$-élő: $t$ legalább egyszer tüzelhető valamely
    - $L_2$-élő: bármely véges $k > 1$ egészre $t$ legalább $k$–szor tüzelhető valamely
    - $L_3$-élő: $t$ végtelen sokszor tüzelhető valamely

    $\vec{\sigma} \in L(N, M_0)$ állapot-trajektóriában
  - $L_4$-élő: $t$ $L_1$-élő bármely $M_n \in R(N, M_0)$ állapotban

# Élő tulajdonság: példa




- $t_0$ tranzíció: $L_0$-élő (halott)
- $t_1$ tranzíció: $L_1$-élő
- $t_2$ tranzíció: $L_2$-élő
- $t_3$ tranzíció: $L_3$-élő

# Dinamikus tulajdonságok: élőség (folyt.)

- Egy ($P$, $T$, $M_o$) Petri-háló $L_x$-élő
  - ha minden $t \in T$ tranzíció $L_x$-élő
  - $L_4$-től $L_1$-ig az élő tulajdonságok tartalmazzák egymást
- Egy ($P$, $T$, $M_o$) Petri-háló élő
  - ha $L_4$-élő, azaz minden $t \in T$ tranzíció $L_4$-élő
  - Bejárási úttól függetlenül garantáltan holtpontmentes
    - köztes állapottól függetlenül minden tranzíció újra tüzelhető
    - holtpontmentesség $\Leftarrow$ élőség
  - Bizonyítása költséges lehet
    - szerencsés esetben nem (invariánsok!)
    - ideális rendszert tételez fel

# Dinamikus tulajdonságok: ciklikusság

- Megfordíthatóság
  - A kezdőállapot bármely követő állapotból elérhető

$$\boxed{\forall M \in R(N, M_0) \Rightarrow M_0 \in R'(N, M)}$$

  - Gyakran ciklikus működésű hálózat
- Visszatérő állapot
  - Van olyan, a kezdőállapotból elérhető állapot, amely bármely <u>őt</u> követő állapotból elérhető

$$\boxed{\exists M_n \in R(N, M_0) : \forall M \in R'(N, M_n) \Rightarrow M_n \in R''(N, M)}$$

  - Gyakran ciklikus (rész)hálózat inicializáló szekvenciával

# Dinamikus tulajdonságok: ciklikusság (folyt.)

- Fedhetőség
  - Létrejön-e korábbi működést magában foglaló állapot?
  - *M'* állapot fedi *M* állapotot, ha $M' \in R(N, M_0) \wedge M' \geq M$
    - *M* állapot fedhető *M'* állapottal
    - *M'* $\geq$ *M* jelentése: $\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}(p)$
      - gyenge fedhetőség esetén az azonos állapot is fed, ha elérhető
      - erős fedhetőség: $\exists p \in P : \mathrm{m}''(p) > \mathrm{m}(p)$
  - $\mu$ a *t* tranzíciót engedélyező minimális tokeneloszlás
    - *t* akkor és csak akkor nem $L_1$-élő, ha $\mu$ nem fedhető le
      - gyenge fedhetőség elég
    - fordítva: $\mu$ lefedhetősége garantálja *t* $L_1$-élő voltát

# Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás

- Perzisztencia
  - Két tetszőleges engedélyezett tranzíció közül egyik tüzelése sem tiltja le a másik engedélyezettségét
    - engedélyezett tranzíció engedélyezve marad tüzelésig!
  - Rendszerbeli funkcionális dekompozíció megmarad-e?
  - Párhuzamos működések befolyásolják-e egymást?
- Egy $(P, T, M_o)$ Petri-háló perzisztens, ha
  - bármely két $t_1, t_2 \in T$ tranzíciója az összes lehetséges tüzelési szekvenciában perzisztens

# Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás (folyt.)

- Fair tulajdonság
  - Párhuzamos folyamatok nem tartják-e fel egymást?
  - Valamennyi folyamat végbemegy-e (előbb-utóbb)?
- Nem egységes a fairség definíciója
  - Korlátozott fairség (B-fairség)
  - Globális fairség (korlátlan fairség)
- Egy tüzelési szekvencia korlátozottan fair (B-fair)
  - ha bármely tranzíció maximum korlátos sokszor tüzelhet anélkül, hogy egy másik tranzíció tüzelne
- Egy ($P$, $T$, $M_0$) Petri-háló korlátozottan fair (B-fair)
  - ha minden $t \in T$ tranzíció az összes lehetséges tüzelési szekvenciában korlátozottan fair (B-fair)

# Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás (folyt.)

- Globális fairség
  - Egy tüzelési szekvencia globálisan fair, ha
    - véges, vagy
    - az összes tranzíció végtelen sokszor szerepel benne
  - Egy ($P$, $T$, $M_o$) Petri-háló globálisan (korlátlanul) fair
    - ha a háló összes lehetséges tüzelési szekvenciája globálisan (korlátlanul) fair

# Dinamikus tulajdonságok (összefoglalás)

- Korlátosság
- Holtpontmentesség
- Élő tulajdonság
  - L0 élő (halott)
  - L1 élő (1-szer tüzelhető)
  - L2 élő (k-szor tüzelhető)
  - L3 élő (∞-szer tüzelhető)
  - L4 élő (∀ állapotban L1)
- Megfordíthatóság
  - Visszatérő állapot
- Fedhetőség
  - Gyenge fedhetőség
  - Erős fedhetőség
- Perzisztencia
- Fair tulajdonság
  - Korlátozott fairség
  - Globális fairség

# Állapottér reprezentációk: az elérhetőségi és fedési gráf

# Állapottér reprezentációk: elérhetőségi gráf

- Elérhetőségi gráf
  - $M_0$ kezdőállapotból induló állapotgráf
    - csomópontok: állapotok → címkézés: tokeneloszlások
    - állapotátmenetek: irányított élek → címkézés: tüzelések
    - legfeljebb annyi új csomópont, ahány engedélyezett tranzíció
      - kevesebb, ha prioritásos a Petri-háló
    - csomópont, amiből nem indul ki él: holtpont
  - Nem korlátos a Petri-háló → végtelen sok állapot
    - korlátosság ⇔ véges állapottér
  - Szélességi típusú bejárás az állapotból tüzelések mentén
    - mélységi bejárás nem korlátos állapottérben rossz ötlet…
    - viszont a részleges sorrendezési redukció mélységi kereséssel

# Állapottér reprezentációk: fedési gráf

- Petri-háló mérete/bonyolultsága és az állapottér mérete közti korreláció?
  - pl. megállási probléma
- Végesség hiányát kezelni kell
- Fedési gráf: végtelen állapottér esetére is
  - Hasonló felépítés: $M_0$ kezdőállapot, élek: tüzelések
  - Kritikus részek: token „túlszaporodás”
    - trajektória: $M_0 \ldots M'' \ldots M$, $M'$ és $M'' \leq M'$ $\rightarrow$ fedett állapotok!
    - $p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p)$ $\rightarrow$ fedett helyek (erős fedhetőség)
    - fedett helyekre speciális szimbólum: $\omega$ a végtelenség kifejezője

# Fedési fa generáló algoritmus

$L_{\text{vizsgálandó}} \leftarrow \{ M_0 \}$

`MAIN:` **`if`** $L_{\text{vizsgálandó}} \neq \emptyset$

A következő $M \in L_{\text{vizsgálandó}}$ állapot kiválasztása

**`if`** *M* a gyökértől idáig vezető úton már szerepelt

**`then`** *M*-et „régi állapotként” jelöljük

**`goto`** `MAIN` // ciklus

**`if`** *M*-ben nincs engedélyezett tüzelés

**`then`** *M*-et „végállapotként” (halott állapot) jelöljük

**`goto`** `MAIN` // ciklus

# Fedési fa generáló algoritmus (folyt.)

**else** // (van *M*-ben engedélyezett tranzíció)

**for all** *t* engedélyezett tranzícióra:

Az *M′* rákövetkező állapot meghatározása: $M\left[\vec{e}_t > M'\right.$

**if** létezik az $M_0$-tól *M*-ig vezető úton olyan *M″*, amelyet *M′* fed

$$\boxed{M' \neq M'' \wedge \forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}''(p) \wedge \exists p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p)}$$

**then** *M″* fedett állapot:

az *M′* állapotot jelölő tokeneloszlásban
a fedett helyek jelöléseit ω-val helyettesítjük

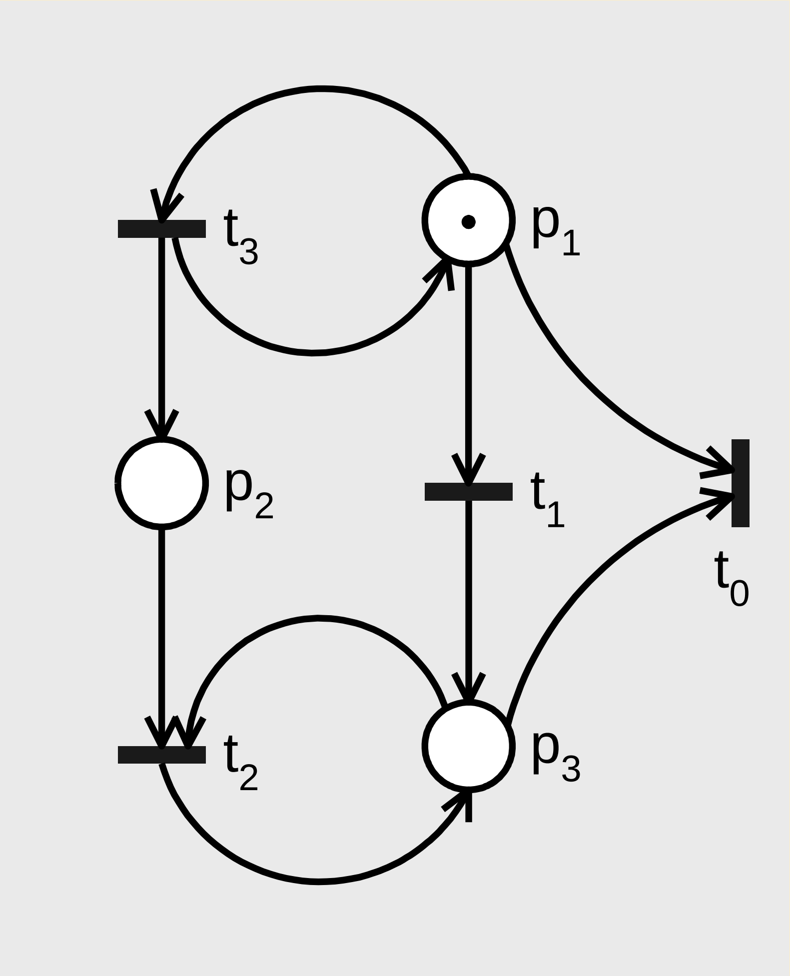
$$\boxed{\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p) \rightarrow \mathrm{m}'(p) = \omega}$$

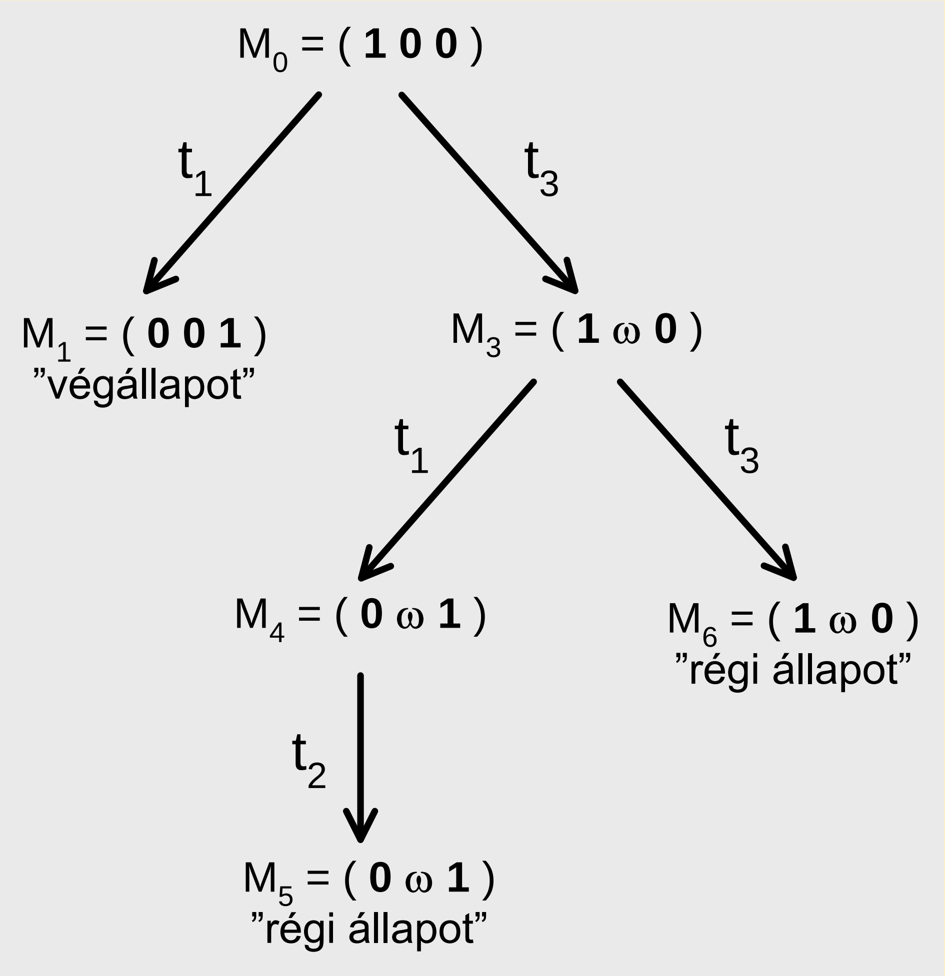
**else** *M′* új állapot: $L_{vizsgálandó} \leftarrow L_{vizsgálandó} \cup M'$

*M*-ből *M′*-höz egy *t*-vel jelölt élet húzunk

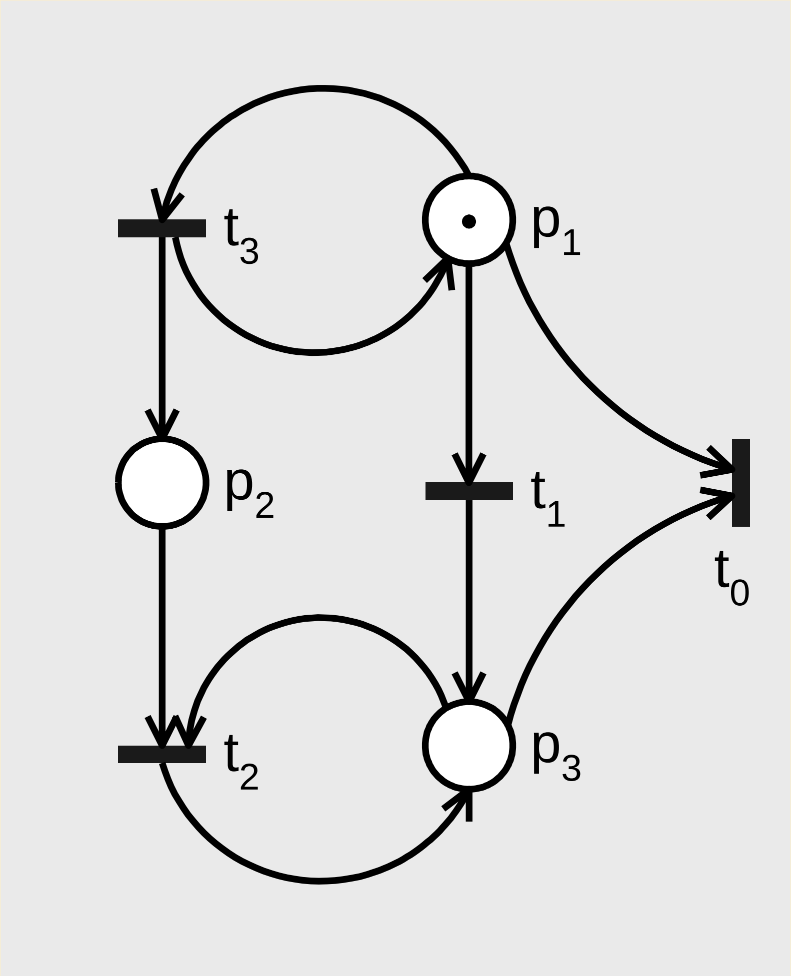
**goto** `MAIN` // ciklus

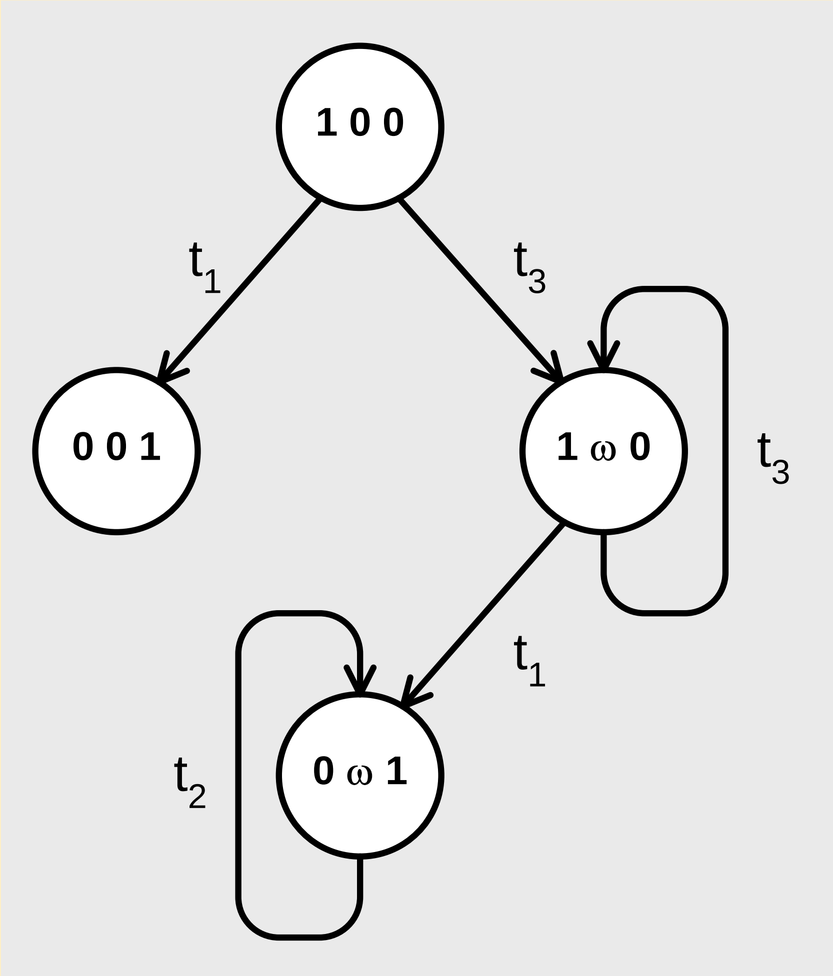
# A példa és annak fedési fája



# A példa és annak fedési gráfja



# Petri-hálók fedési fájának analízise

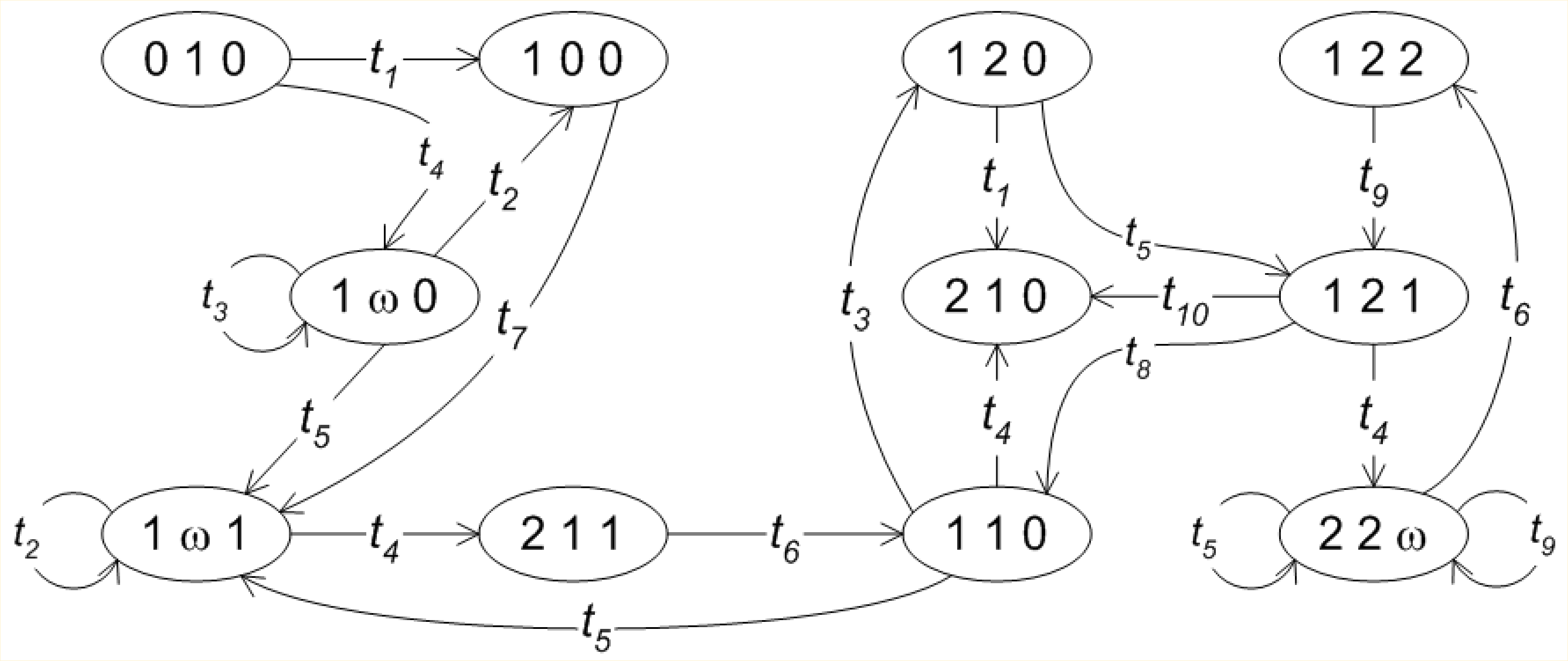
## Közvetlenül is leolvasható tulajdonságok:

- Petri-háló korlátos ⇔ $R(N, M_0)$ elérhetőségi gráfja véges ⇔ Fedési fában $\omega$ nem jelenik meg címkeként
- Petri-háló biztonságos ⇔ Csak 0 és 1 jelenik meg csomópont címkeként a fedési fában
- Petri-háló egy tranzíciója halott ⇔ tranzícióhoz tartozó tüzelés nem jelenik meg élcímkeként a fedési fában

# Dinamikus tulajdonságok vizsgálata az állapotérben

# Tipikus feladat

Az ábra egy Petri-háló állapotterét mutatja be fedési gráf alakban. A hálóban 10 darab tranzíció található, amelyeket $t_1$, ..., $t_{10}$ címkékkel jelölünk. Az állapotokat a token eloszlás vektorral címkéztük meg, tehát 0 1 0 jelentése: m($p_1$) = 0, m($p_2$) = 1 és m($p_3$) = 0.



# Tipikus kérdések

1. A Petri-háló élő?
2. A háló (deadlock) holtpontmentes?
3. $t_6$ tranzíció $L_3$-élő?
4. $t_7$ tranzíció $L_2$-élő?
5. A (2 2 1) állapot fedhető?
6. A (2 1 0) állapot fedhető?
7. A háló perzisztens?
8. A háló korlátos?
9. A háló megfordítható?
10. A hálóban létezik visszatérő állapot?
11. $t_4$ és $t_6$ tranzíció korlátos fair tulajdonságú?
12. $t_5$ és $t_8$ tranzíció korlátos fair tulajdonságú?
13. Létezik P-invariáns?
14. Létezik T-invariáns?

# Élőség vizsgálata az állapottérben

- Ellenpéldát találni (szinte mindig) a leggyorsabb és legegyszerűbb megoldás!
- Élőség:
  - $L_4$-élőség
    - végig kell nézni, hogy mindig tüzelhetővé válik-e?
    - minden trajektóriára teljesülnie kell!
  - $L_3$-élőség (és a többi)
    - elég egy trajektóriát találni, ahol teljesül!
  - A háló akkor élő, ha minden tranzíciója élő!
    - ha találunk akár egy tranzíció esetében ellenpéldát $\rightarrow$ nem élő
  - Ha holtpontmentes, akkor még nem biztos, hogy élő is!

# Korlátosság vizsgálata az állapottérben

- Korlátosság:
  - lásd a fedési gráfnál tanultakat!
    - „Petri-háló korlátos ⇔ $R(N, M_0)$ elérhetőségi gráfja véges ⇔ fedési fában $\omega$ nem jelenik meg állapot címkében”
  - biztosság:
    - „Petri-háló biztos ⇔ csak 0 és 1 jelenik meg állapot címkében a fedési fában”

# További dinamikus tulajdonságok

- Megfordíthatóság:
  - Az elérhetőségi gráf egyetlen erősen összekötött komponens?
- Visszatérő állapot:
  - Van az elérhetőségi gráfban erősen összekötött komponens?
  - Az adott állapot része ennek?
- Fairség:
  - „Az egyik tranzíció korlátos sokszor tüzelhet, mielőtt a másik tüzelne”
  - Van-e olyan ciklus, amiben az egyik tranzíció benne van és a másik nincs?
    - →van: ellenpélda, hiszen létezik tüzelési szekvencia, amiben korlátlan sokszor tüzel
- Perzisztencia:
  - „A tranzíció mindaddig engedélyezett marad, amíg nem tüzel”
    - →ha több engedélyezett és nem ő tüzelt, akkor a következő állapotban is engedélyezett marad
    - →ha engedélyezett maradt, akkor meg is jelenik élcímkeként (prioritás?)

# Petri-hálók strukturális tulajdonságai

# Strukturális tulajdonságok

## Petri-hálók kezdőállapot-független tulajdonságai:

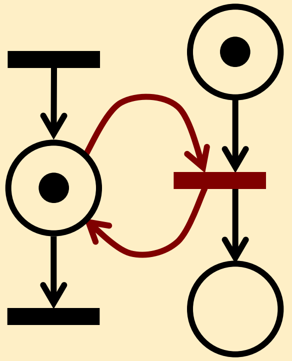
- Strukturális korlátosság
- Vezérelhetőség
- Konzervativitás
  - Hely invariáns,
    P- (place) invariáns
- Strukturális élőség
- Ismételhetőség
- Konzisztencia
  - Tüzelési invariáns,
    T- (transition) invariáns

Csak a háló struktúra határozza meg őket:

- vagy $\forall$ korlátos kezdő tokeneloszlásra igazak,
- vagy $\exists$ olyan korlátos kezdő tokeneloszlás, amire igazak

# Állapotegyenlet

- Petri-háló dinamikája: tokenek áramlanak
  - Kirchhoff egyenletekhez hasonló egyensúlyi egyenletek
- Előfeltétel (egyértelműség): tiszta Petri-háló
  - Nincs olyan átmenet, amely egyazon helynek egyszerre bemenő és kimenő átmenete: $\forall t \in T : \bullet t \cap t \bullet = \emptyset$
  - Hurokél
    - a tüzeléskor a tokeneloszlás nem változik, de
    - a tüzelési feltételben szerepet játszik



# Állapotegyenlet

- Tüzelési szekvencia: $M_{i_0}\left[\vec{\sigma} > M_{i_n}\right.$

$$\boxed{\vec{\sigma} = \left\langle M_{i_0} t_{i_1} M_{i_1} \ldots t_{i_n} M_{i_n} \right\rangle = \left\langle t_{i_1} \ldots t_{i_n} \right\rangle}$$

- **Engedélyezés:**
  - $t_{i,j}$ átmenet minden $p \in \bullet t_{i,j}$ bemenő helyén **elég** token

$$\boxed{\forall t_{i_j} \in \vec{\sigma}, \forall p \in \bullet t_{i_j} : M_{i_{j-1}}(p) \geq w^{-}(p, t_{i_j}) = \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}} \vec{e}_{i_j}}$$

# Állapottrajektóriák

- **Állapotátmenet:**
  - $t_{i,j}$ átmenet engedélyezett $\rightarrow$ tüzel
    - minden $p \in \bullet t_{i,j}$ bemenő helyéről $w^{-}(p, t_{i,j})$ tokent vesz el
    - minden $p \in t_{i,j}\bullet$ kimenő helyére $w^{+}(p, t_{i,j})$ tokent tesz ki

$$\boxed{M_{i_j} = M_{i_{j-1}} - \mathbf{W}^{-\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j} + \mathbf{W}^{+\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j} = M_{i_{j-1}} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j}}$$

    - összeadva és átrendezve:

$$\boxed{M_{i_0} [\vec{\sigma} > M_{i_n} \Rightarrow M_{i_n} - M_{i_0} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T}$$

- **Tüzelési szám vektor**: az egyes tranzíciók tüzeléseinek száma a tüzelési szekvenciában

# Állapotegyenlet levezetése

$$M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1}$$

$$M_2 = M_1 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} = \overbrace{M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2}}^{M_1 \text{ behelyettesítésével}}$$

$$\ldots$$

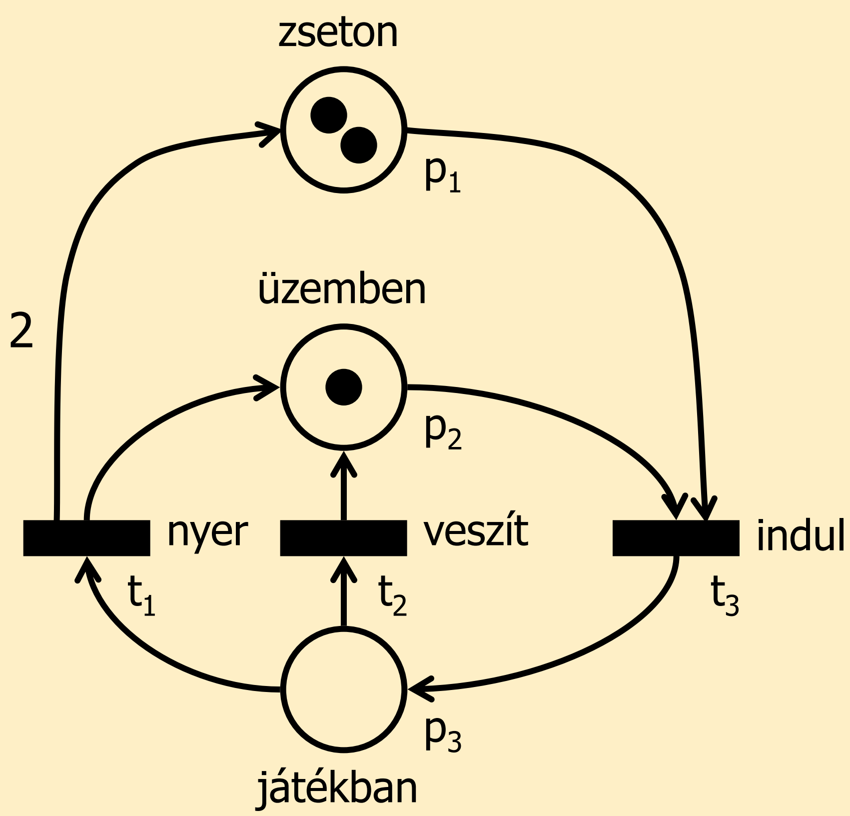
$$M_{n+1} = M_n + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_{n+1}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} + \ldots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_{n+1}}$$

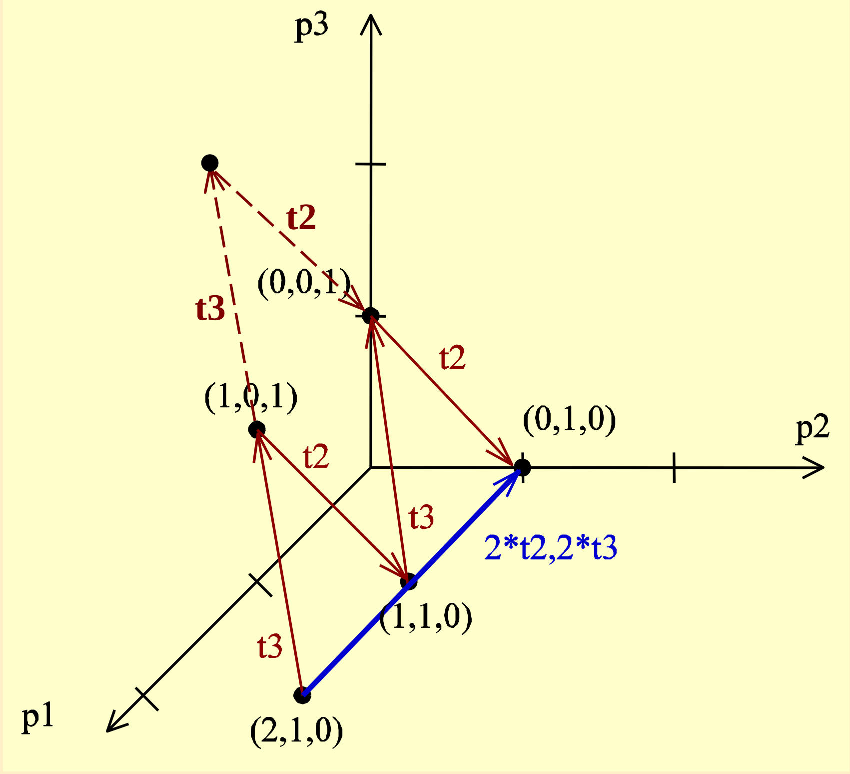
$$\ldots \qquad \Downarrow$$

$$M_m = M_0 + \underbrace{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} + \ldots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_m}}_{\text{összevonva}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{m}\vec{e}_{t_i}$$

$$M_m = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T \Rightarrow \boxed{M_m - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T}$$

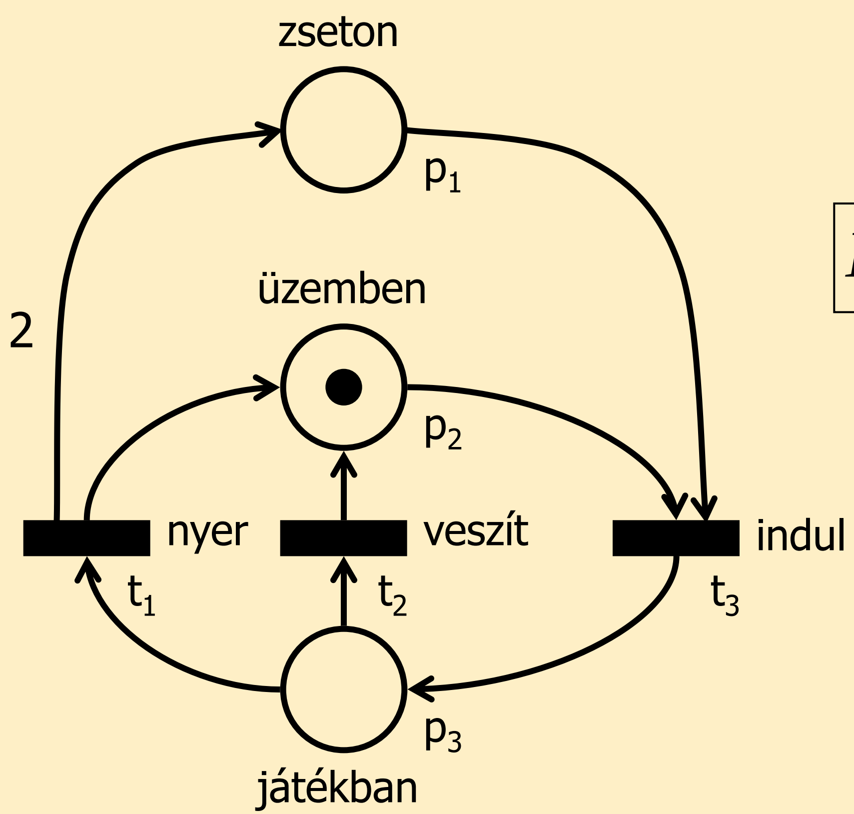
# Állapotegyenlet és elérhetőség




- A **tüzelési szám vektor**ban kevesebb az információ, mint a **tüzelési szekvenciá**ban!

# Állapotegyenlet és elérhetőség




- Tokenmérleg teljesülése a tüzelésnek csak a **szükséges** feltétele!

$$\boxed{M_{i_0}\left[\vec{\sigma} > M_{i_n} \Rightarrow M_{i_n} - M_{i_0} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T\right.}$$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{p_1} \\ \mathbf{p_2} \\ \mathbf{p_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{t_1} & \mathbf{t_2} & \mathbf{t_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{(1,1,0)^{\mathrm{T}} - (0,1,0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot (1,0,1)^{\mathrm{T}}}$$

$t_1$ és $t_3$ sem nem tüzelhető a (0,1,0) kezdőállapotban!

# Invariánsok fogalma
# Tüzelési és hely invariáns

# Tüzelési, avagy T-invariáns

A $\sigma$ tüzelési szekvencia végrehajtása nem változtatja meg a tokeneloszlást:

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0}$$

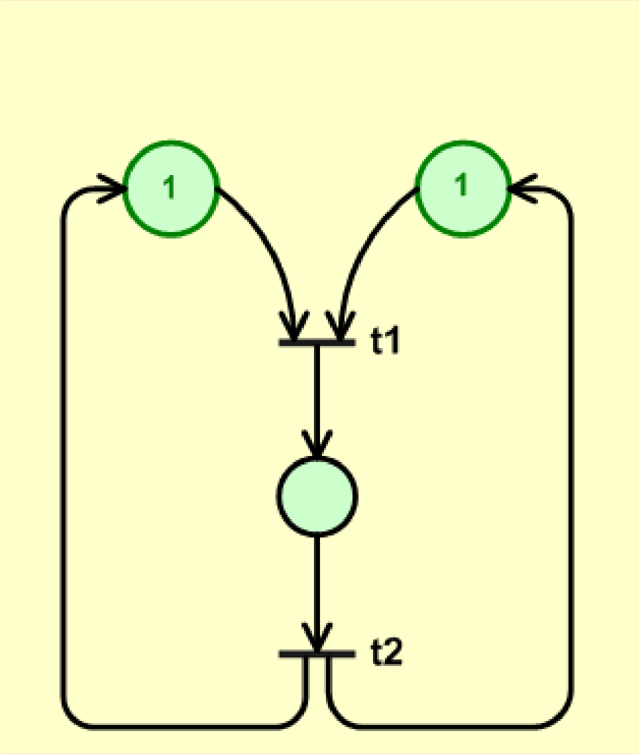
- Ciklus az állapottérben: $M_i\left[\vec{\sigma}_T > M_i\right.$
  - ha $\sigma_T$ szekvencia az $M_i$ állapotból végrehajtható!

$$\boxed{\forall t_{i_j} \in \vec{\sigma}, \forall p \in \left\{\bullet t_{i_j}\right\} : m_{i_{j-1}}\left(p\right) \geq w^-\left(p, t_{i_j}\right) = \mathbf{W}^{-\mathrm{T}} \cdot \vec{e}_{i_j}}$$

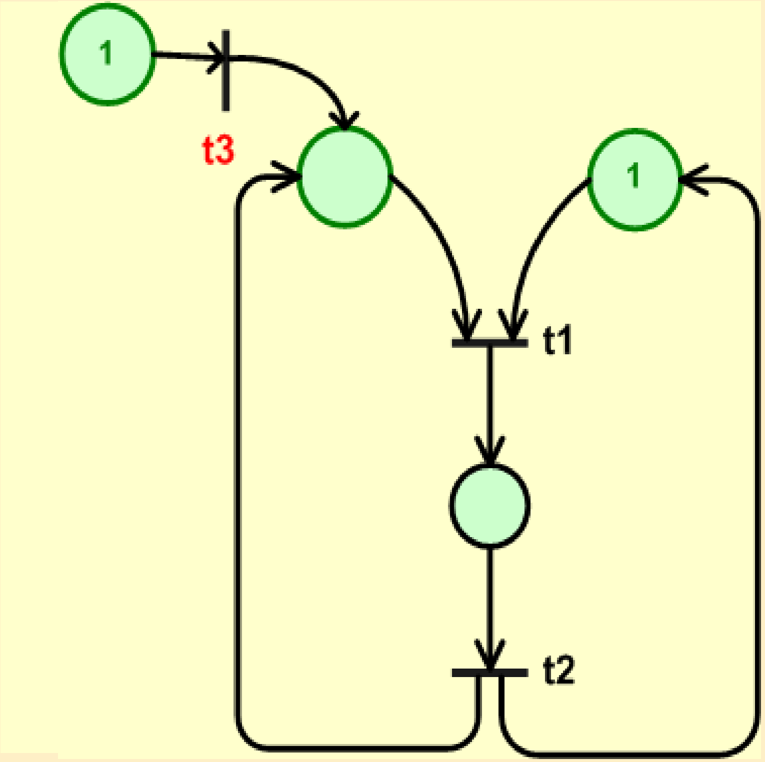
- Megjegyzés: bármely $\sigma$ tüzelési szekvenciához található olyan $M_0$ kezdőállapot, amelyből $\sigma$ végrehajtható
  - Pl. $M_0 \geq \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}}\vec{\sigma}$ esetén induláskor annyira „teletömött”, hogy a $\sigma$ tüzelési szekvencia által termelt tokenekre már nincs szükség!

# Példa T-invariánsra

$t_1 - t_2$ után a tokeneloszlás ugyanez




$t_3 - t_1 - t_2$ tüzelési szekvencia nem ismételhető



# T-invariánsok halmaza

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0}$$

**Homogén, lineáris** egyenletrendszer

- egy megoldás többszöröse is megoldás
  - ha tüzelhető, akkor többször is befutja a ciklust
- megoldás összege is megoldás
  - ha tüzelhető, akkor több ciklus kombinációját futja be
- megoldások lineáris kombinációi is megoldások

Keressünk **BÁZIST**!

- az összes megoldást előállító minimális halmaz

# Minimális T-invariáns

- A $\sigma$ tüzelési szekvencia $\sup(\sigma)$ **alapja**
  - azon átmenetek $T' = \{t_i \mid \sigma_i > 0\}$ részhalmaza, amelyek $\sigma$ szekvenciában előfordulnak
- A $\sigma_T$ tüzelési invariáns **minimális alapú**
  - ha nincs olyan T-invariáns, amelynek alapja $\sigma_T$ alapjának valódi részhalmaza, vagy
  - ha részhalmaza azonos, annak tüzelési számai kisebbek

$$\boxed{\forall \sigma_T^1 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sigma_T^1 = 0 \Rightarrow \left(\sigma_T^1 \geq \sigma_T\right) \vee \left(\sup(\sigma_T) \not\subseteq \sup(\sigma_T^1)\right)}$$

# Hely, avagy P-invariáns

A $\mu_P$ súlyvektor által kijelölt helyeken a tokenek súlyozott összege nem változik:

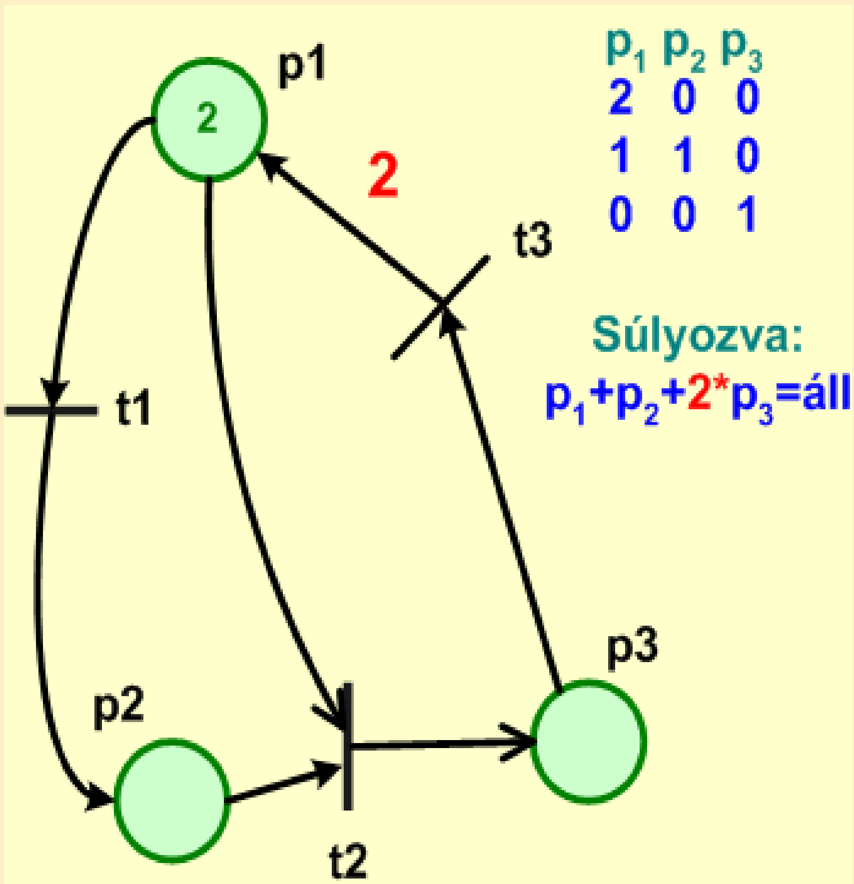
$$\boxed{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \text{állandó}}$$

– A tokenek (egy része) a helyek egy részhalmazában kering (pl. erőforrások nem fogynak, nem keletkeznek)

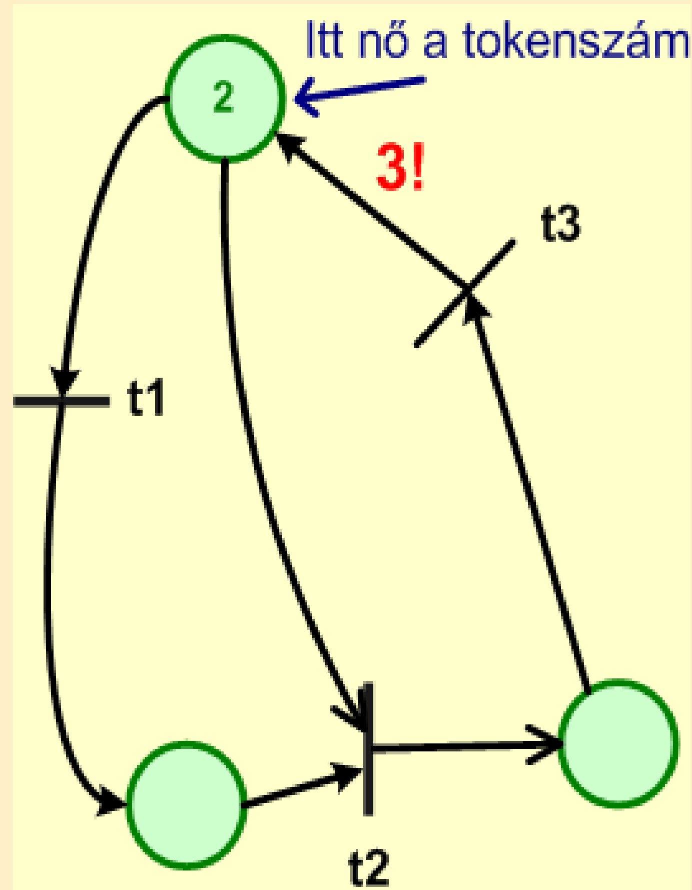
$$\left.\begin{aligned} & M = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \\ & \underbrace{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_0}_{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_0 = \text{állandó}} + \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \\ & \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \underset{\forall \vec{\sigma}}{\equiv} 0 \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\mathbf{W} \vec{\mu}_P = 0}$$

# Példa P-invariánsra

P-invariáns $p_1$, $p_2$, $p_3$-ra:




NEM P-invariáns:

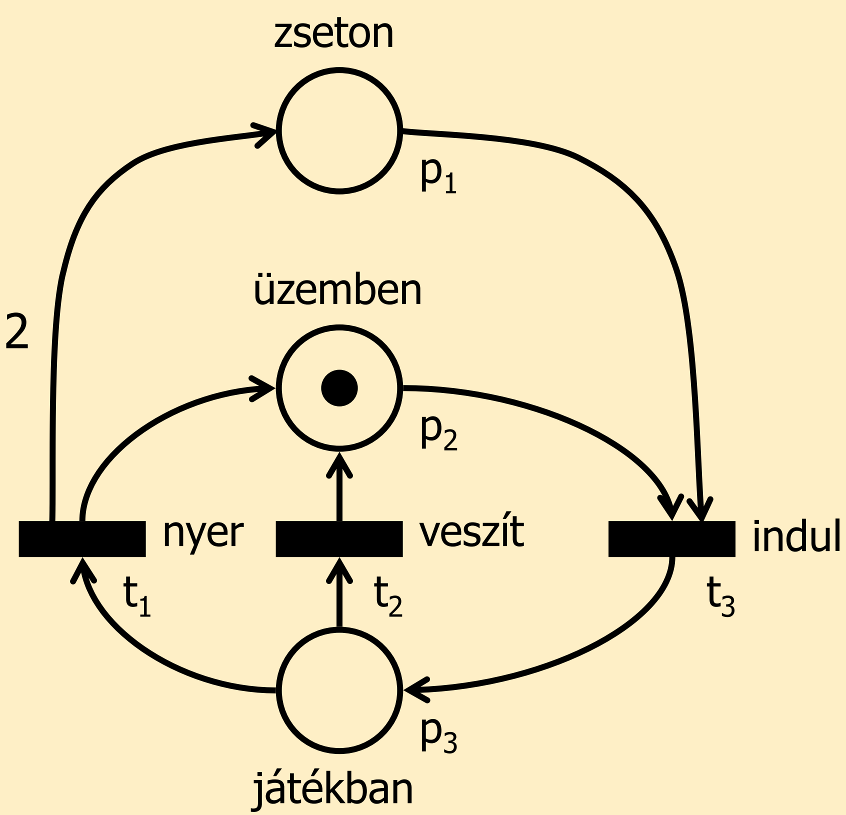


# Invariánsok alkalmazásai

- T-invariánsok alkalmazásai
  - Termelési folyamat meghatározása
  - Szabályalapú rendszerek, diagnosztikai problémák
  - Dinamikus tulajdonságok
    - ciklikusan tüzelhető ➲ megfordíthatóság, visszatérő állapot
    - később is tüzelhető ➲ élő tulajdonság, holtpontmentesség
- P-invariánsok alkalmazásai
  - Véges automaták keresése $\rightarrow$ dekompozíció
  - Dinamikus tulajdonságok
    - token nem vész el ➲ élő tulajdonság, holtpontmentesség
    - token nem termelődik ➲ korlátosság

# Invariánsok számítása

# Van-e a példában invariáns?




- P-invariáns: $\mathbf{W} \cdot \mu_P = 0$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c|ccc|l} & t_1 & t_2 & t_3 & \\ p_1 & 2 & 0 & -1 & \\ p_2 & 1 & 1 & -1 & \times 1 \\ p_3 & -1 & -1 & 1 & \times 1 \end{array}$$

$$\mathbf{W} \cdot (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} = 0$$

- T-invariáns: $\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma_T = 0$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c|ccc|} & t_1 & t_2 & t_3 \\ p_1 & 2 & 0 & -1 \\ p_2 & 1 & 1 & -1 \\ p_3 & -1 & -1 & 1 \\ & \times 1 & \times 1 & \times 2 \end{array}$$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot (1, 1, 2)^{\mathrm{T}} = 0$$

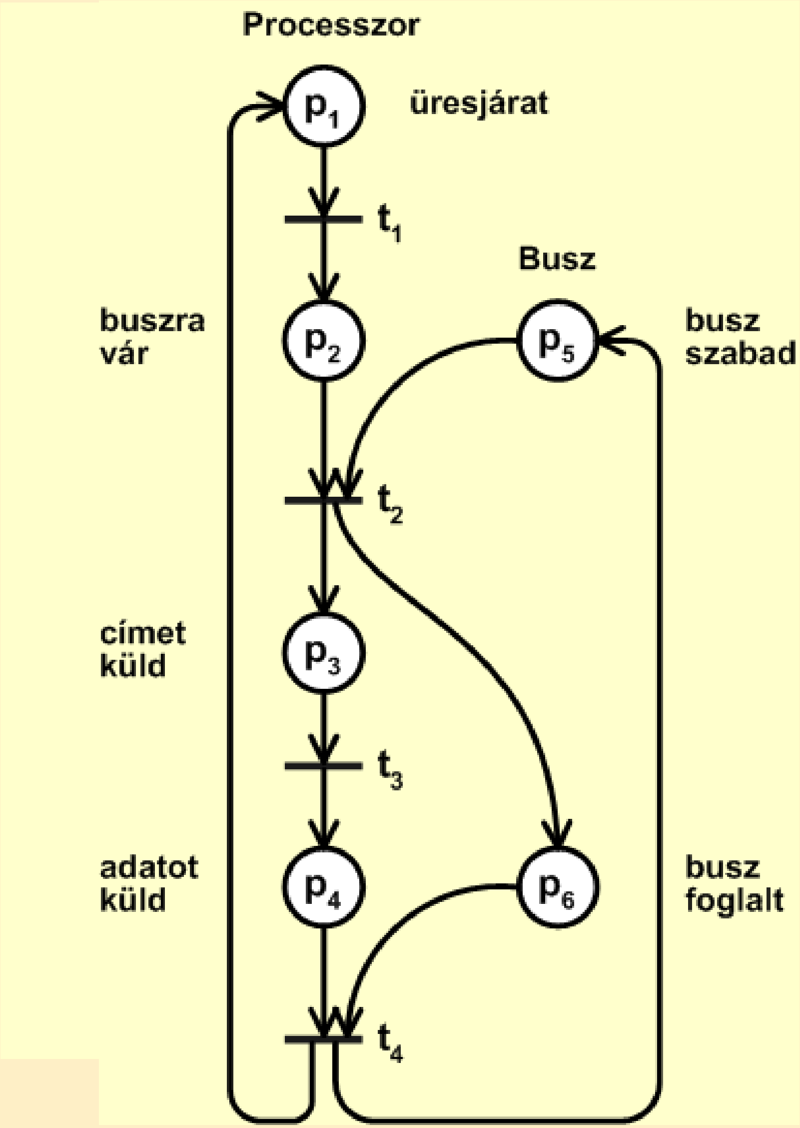
# Megoldási módszerek

## Kérdések:

- $\sigma_T$ bázis komponenseinek értelmezési tartománya?
- a lineáris kombinációk együtthatóinak értelmezési tartománya?

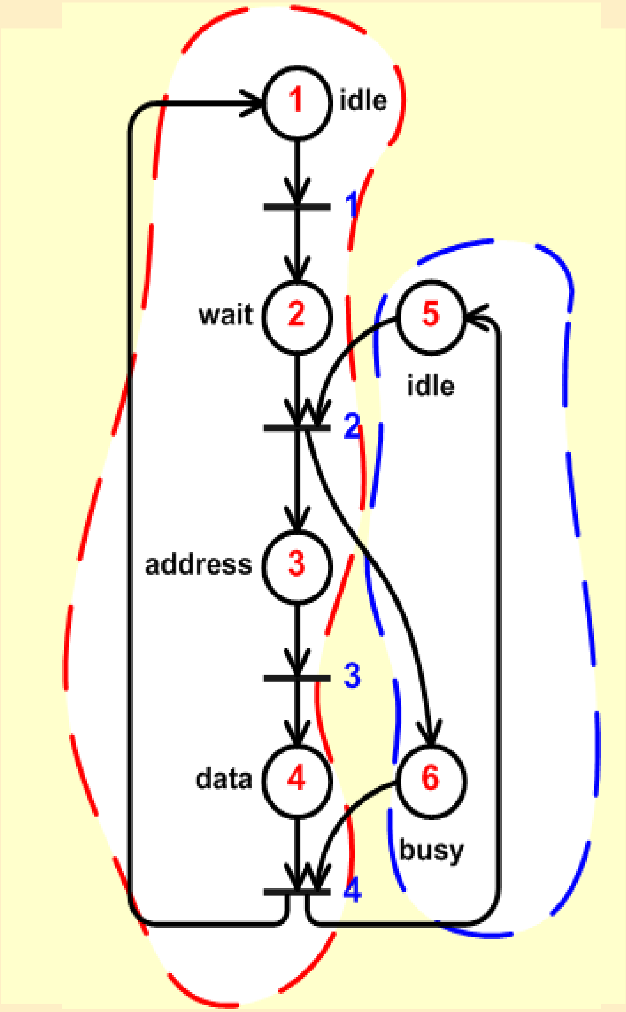
| Szint | Tartomány | Együttható | Lineárisan független? | Egyértelmű? | Algoritmus |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x \in \mathbf{Z}$ | $\mathbf{Q}$ | Igen | Nem | Gauss elimináció |
| 2 | $x \in \mathbf{Z}$ | $\mathbf{Z}$ | Igen | Nem | Hermite redukció |
| 3 | $x \in \mathbf{N}_0$ | $\mathbf{Q}_0$ | Nem biztos | Igen | Martinez-Silva |
| 4 | $x \in \mathbf{N}_0$ | $\mathbf{N}_0$ | Nem biztos | Igen | Pascoletti |
| 5 | $x \in \mathbf{B}$ | $\mathbf{B}$ | Nem biztos | Igen | Jaxy |

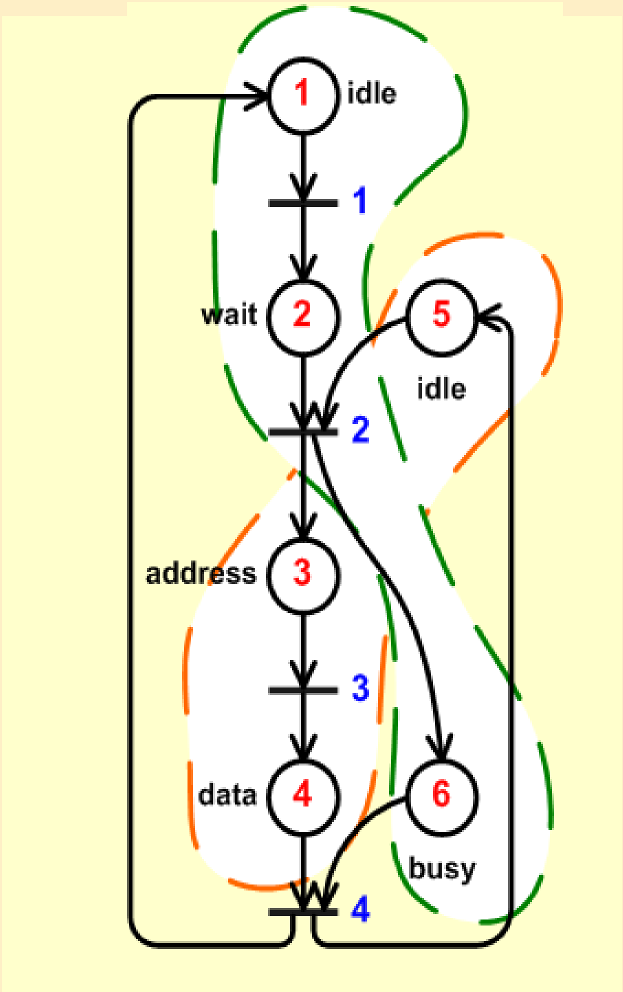
# Példa: processzor adatátvitel




- Processzor
  - várakozik (idle - üresjárat)
  - busz hozzáférési jogot kér
  - címet tesz ki a címbuszra
  - adatot tesz ki az adatbuszra
- Busz(ok)
  - szabad (nem használja senki)
  - foglalt (processzor/periféria)
- Petri-háló
  - $n$ = 4 darab átmenet
  - $m$ = 6 darab hely

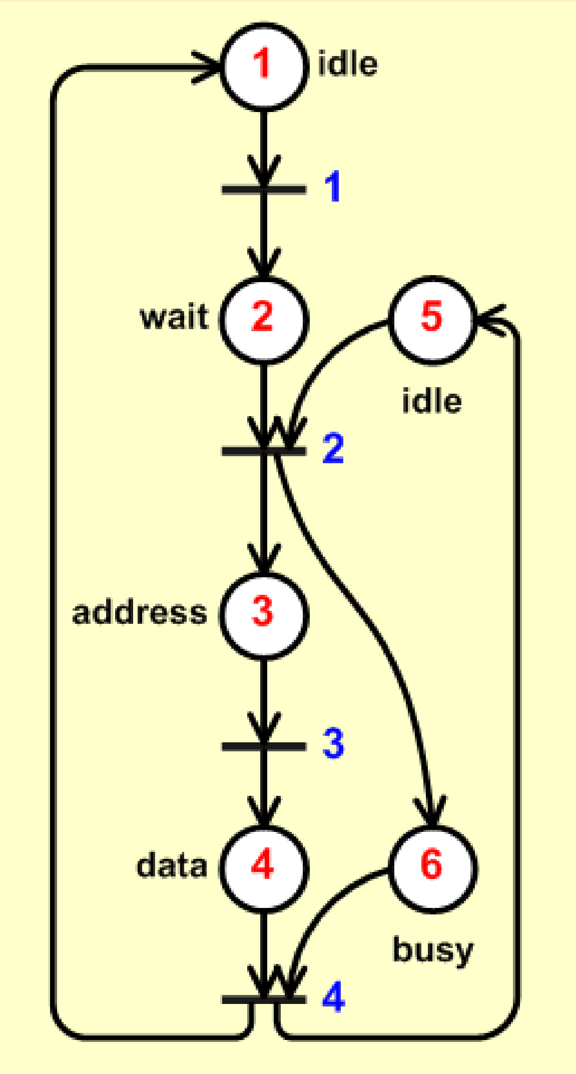
# Keressük meg fejben a megoldást!




Négy P invariáns található

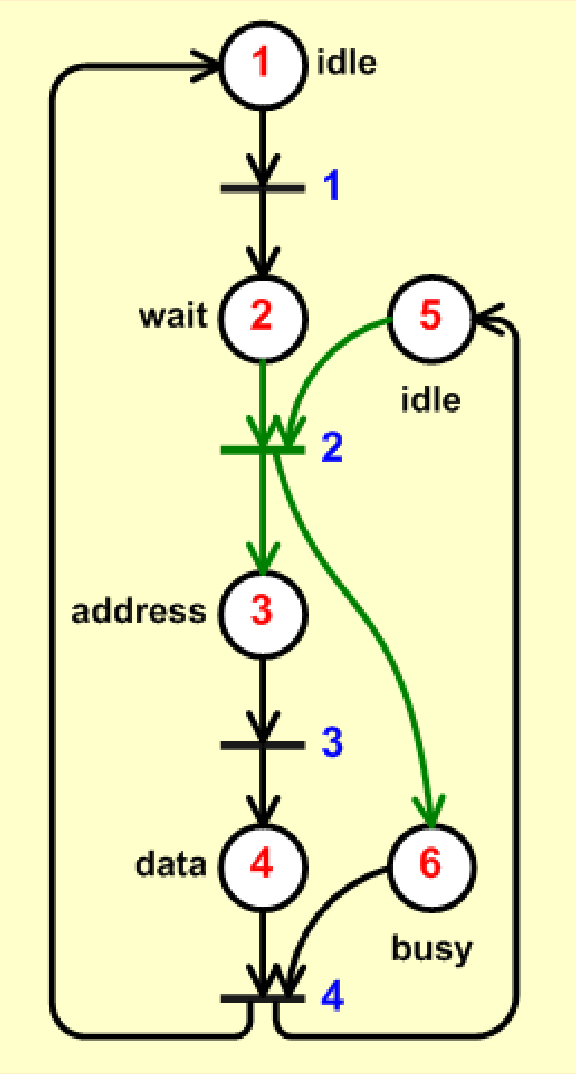
# Szomszédossági mátrixok




$$
W^{-} = \begin{array}{cccccc|c}
p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & t_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & t_4
\end{array}
$$

$$
W^{+} = \begin{array}{cccccc|c}
p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & t_2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t_3 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t_4
\end{array}
$$

# Szomszédossági mátrixok




$$
W^T = \begin{array}{cccc|c} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ \end{array}
$$

$$
W^T = \left[ \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \end{array} \right]
$$

# Martinez-Silva algoritmus: inicializálás

$i \leftarrow 1$

$T_i \leftarrow \{ t \in T \}$

$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{W}^\mathsf{T}$, $\mathbf{D} \leftarrow \mathbf{1}_n$ // $n = |P|$

$\mathbf{Q}_i \leftarrow [\mathbf{D} \mid \mathbf{A}]$ // egységmátrix + szomszédossági mátrix

$L_p \leftarrow$ a $\mathbf{Q}_i$ mátrix $p$. sora

$T_1 = \{ t_1, t_2, t_3, t_4 \}$

$$\mathbf{Q_1} = \left[\begin{array}{cccccc:cccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \end{array}\right]$$

# Martinez-Silva algoritmus: ciklus

**while** $\mathbf{A_i} \neq 0$

    **if** $t_j \in T_i$ // válasszunk egy eddig nem vizsgált oszlopot

    $T_{i+1} \leftarrow T_i \setminus \{ t_j \}$

    $L_{delete} \leftarrow \varnothing$

    $\mathbf{Q}_{i+1} \leftarrow \mathbf{Q}_i$

    **for all** $u, v : \mathrm{A_i}(u, j) \neq 0 \wedge \mathrm{A_i}(v, j) \neq 0 \wedge$
$\exists \lambda_u, \lambda_v \in \infty^+ : \lambda_u \mathrm{A_i}(u, j) + \lambda_v \mathrm{A_i}(v, j) = 0$

        $\mathbf{Q}_{i+1}$-hez adjuk hozzá a $\lambda_u L_u + \lambda_v L_v$ sort

        $L_{delete} \leftarrow L_{delete} \cup \{ L_u, L_v \}$

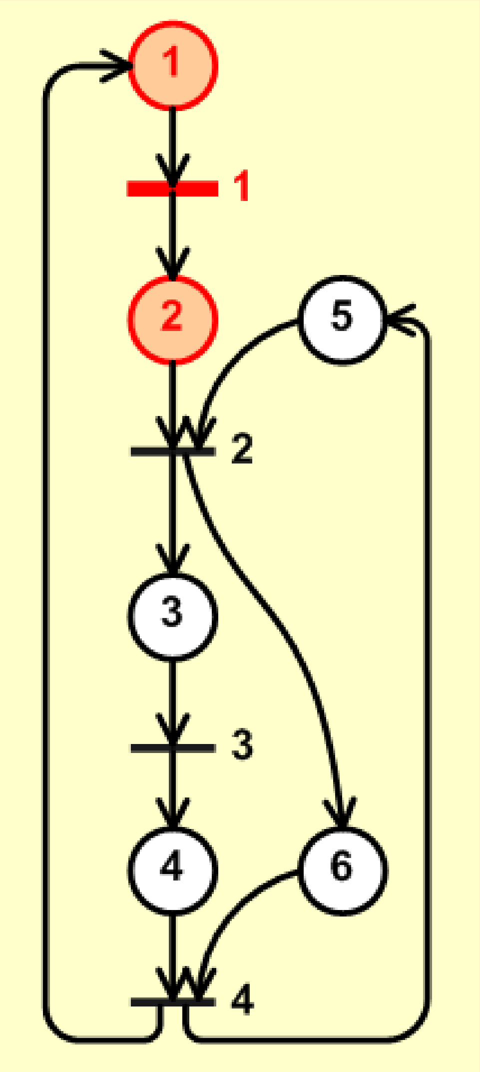
    **end for**

    $\mathbf{Q}_{i+1}$-ből töröljük az $L_{delete}$ halmazbeli sorokat

    $i \leftarrow i + 1$

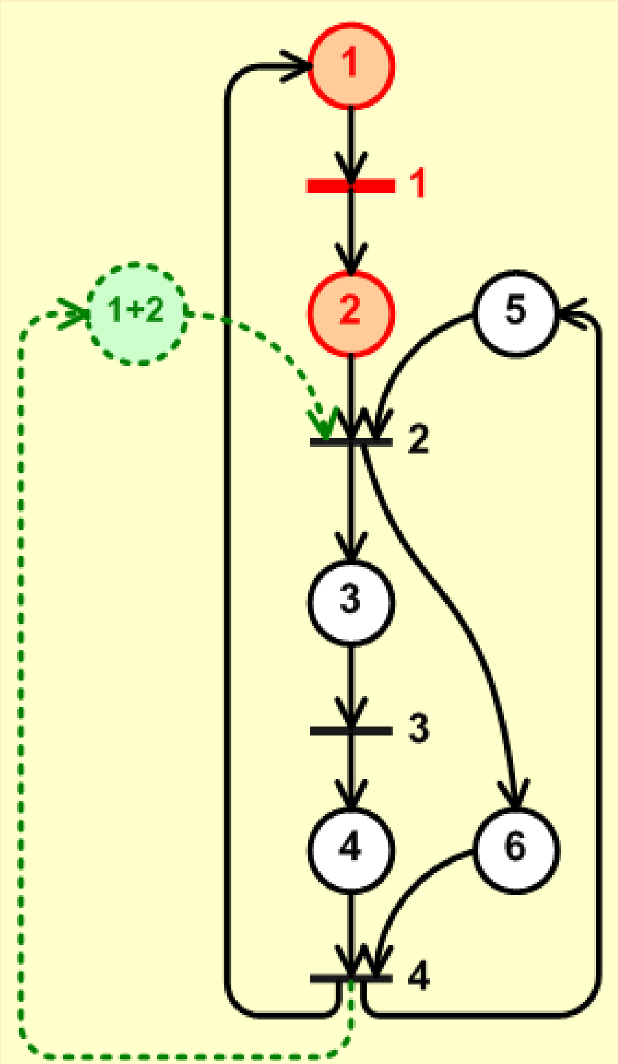
end while

# Martinez-Silva algoritmus: 1-1. lépés




$$Q_1 = \begin{array}{cccccc|cccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \end{array}$$

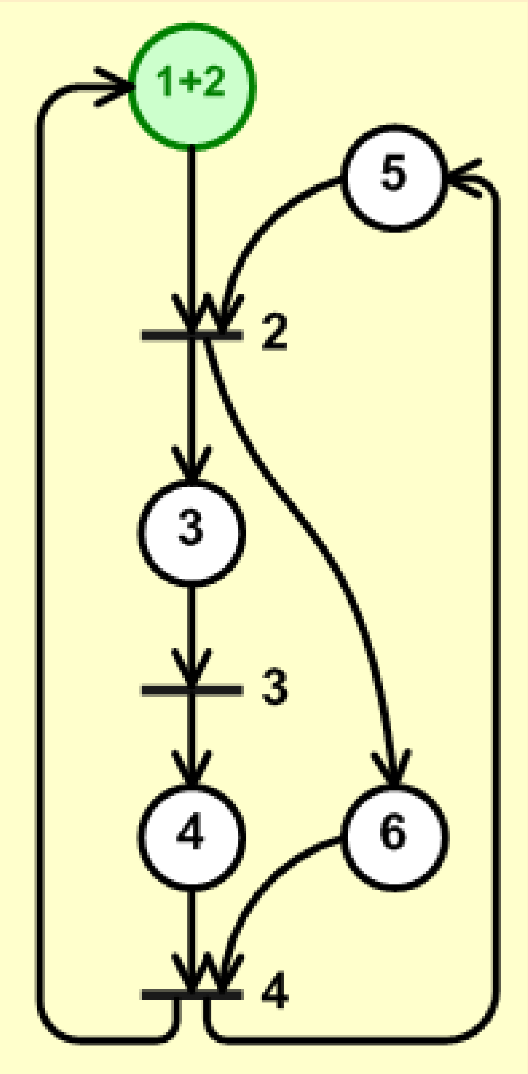
# Martinez-Silva algoritmus: 1-2. lépés




$$
Q_1 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}
$$

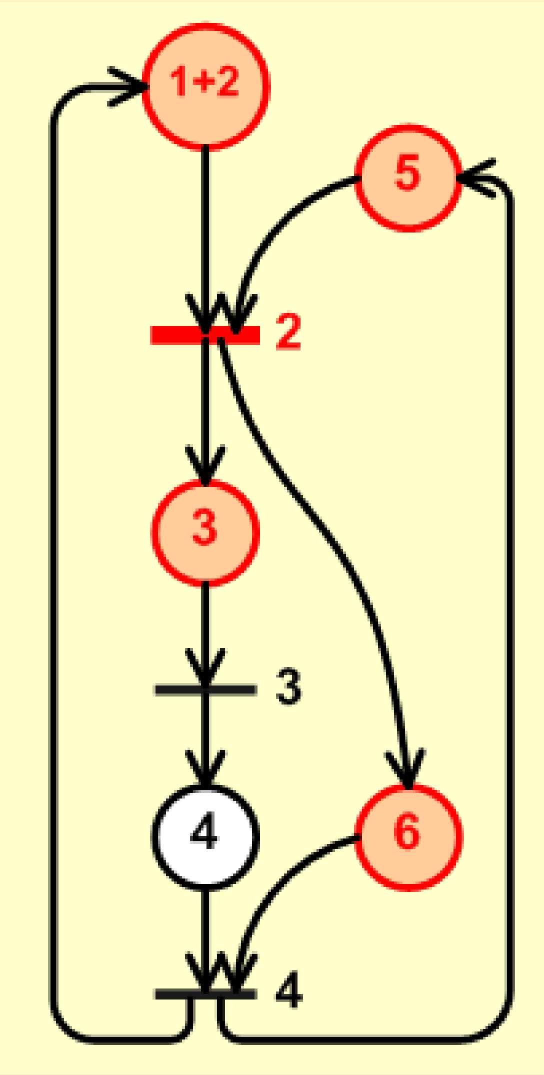
$$
Q_1' = \left[\begin{array}{cccccc|c|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{array}
$$

# Martinez-Silva algoritmus: 1. részeredmény




$$Q_1'' = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{array} \end{array}$$

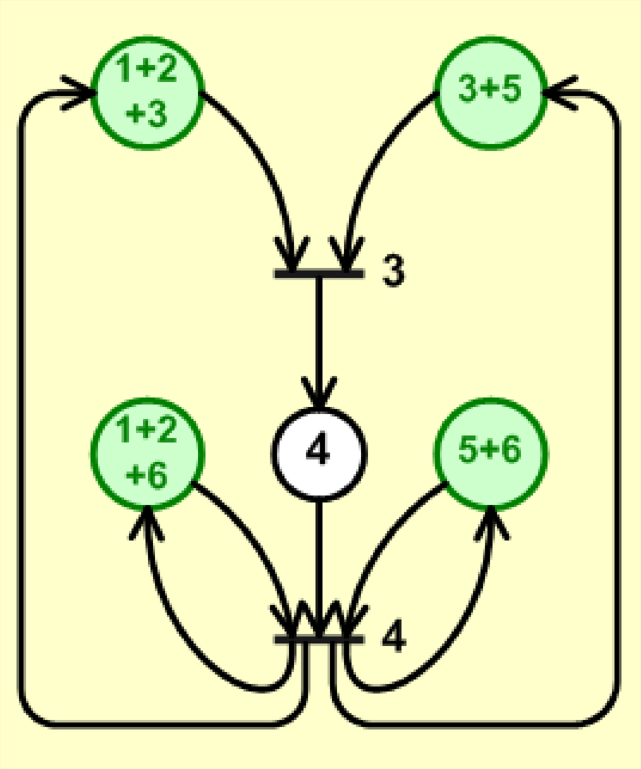
# Martinez-Silva algoritmus: 2-1, 2-2. lépés




$$
Q_2 = \begin{array}{cc}
\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{matrix} & \\
\left[\begin{array}{cccccc:cccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right] &
\begin{matrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{matrix}
\end{array}
$$

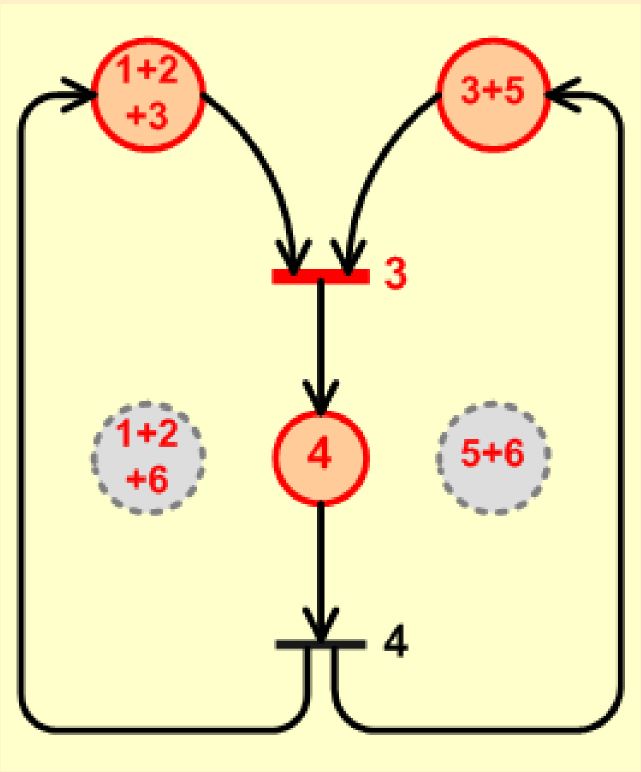
$$
Q_2' = \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] &
\begin{matrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \end{matrix}
\end{array}
$$

# Martinez-Silva algoritmus: 2. részeredmény




$$Q_2'' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc:cccc|l} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{1+2+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{3+5} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5+6} \end{array}\right]$$

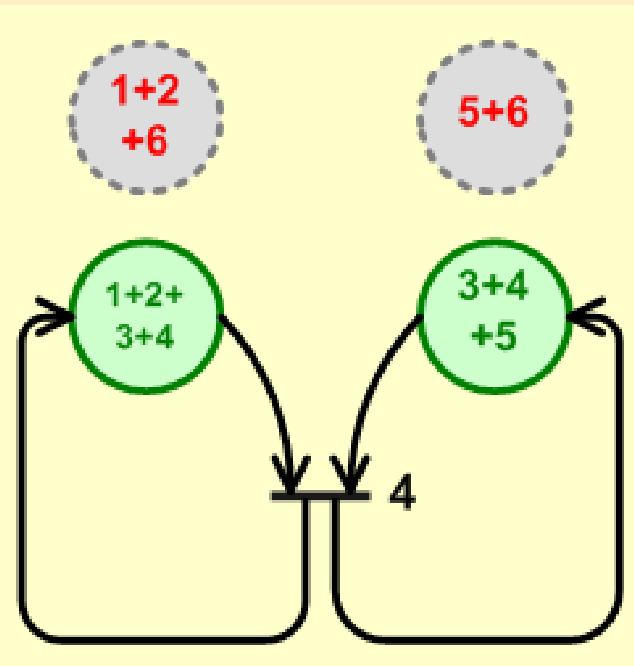
# Martinez-Silva algoritmus: 3-1, 3-2. lépés




$$Q_3 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc:cccc l} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{1+2+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{3+5} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5+6} \end{array}\right]$$

$$Q_3' = \left[\begin{array}{cccccccccc l} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{1+2+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{3+5} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5+6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+3+4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{3+4+5} \end{array}\right]$$

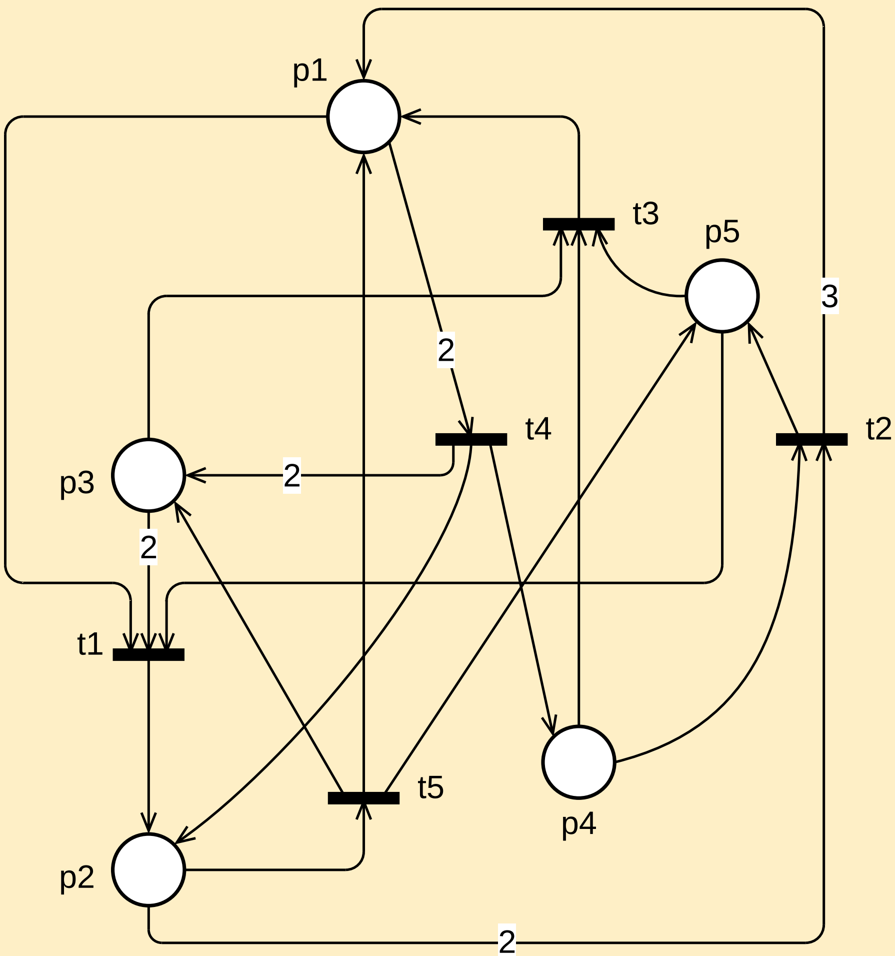
# Martinez-Silva algoritmus: végeredmény




$$Q_3'' = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] & \begin{array}{l} p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \\ p_{1+2+3+4} \\ p_{3+4+5} \end{array}
\end{array}$$

- Invariánsok:
  - a végső $Q_m = [D_m|0]$ mátrix alapján a $D_m$ mátrix soraiban található együtthatók
- Kiszámított P (hely) -invariánsok:
  1. $m(p_1)+m(p_2)+m(p_6) = 1$
  2. $m(p_5)+m(p_6) = 1$
  3. $m(p_1)+m(p_2)+m(p_3)+m(p_4) = 1$
  4. $m(p_3)+m(p_4)+m(p_5) = 1$

# Összetettebb példa




Kiindulás

| | | | | | | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | -2 | 0 | -1 | $s_{11}$ | X (törölni) |
| $t_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | -2 | 0 | -1 | 1 | $s_{12}$ | X |
| $t_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 | $s_{13}$ | X |
| $t_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | 1 | 2 | 1 | 0 | $s_{14}$ | |
| $t_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 | $s_{15}$ | X |

1. lépés (5. oszlop szerint dolgozunk)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | -1 | -2 | -1 | 0 | (11+12) |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | -2 | -1 | -2 | 0 | (12+13) |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | (11+15) |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | -1 | 0 | (13+15) |

(törlés és újrarendezés)

2. lépés előtt

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | 1 | 2 | 1 | 0 | $s_{21}$ | X |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | -1 | -2 | -1 | 0 | $s_{22}$ | X |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | -2 | -1 | -2 | 0 | $s_{23}$ | X |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | $s_{24}$ | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | -1 | 0 | $s_{25}$ | X |

2. lépés előtt (4. oszlop szerint dolgozunk)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | (21+22) |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | (21+25) |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | (2*21+23) |

(törlés és újrarendezés)

3. lépés előtt

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | $s_{31}$ | X |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $s_{32}$ | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | $s_{33}$ | X |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | $s_{34}$ | X |

3. lépés (3. oszlop szerint dolgozunk)

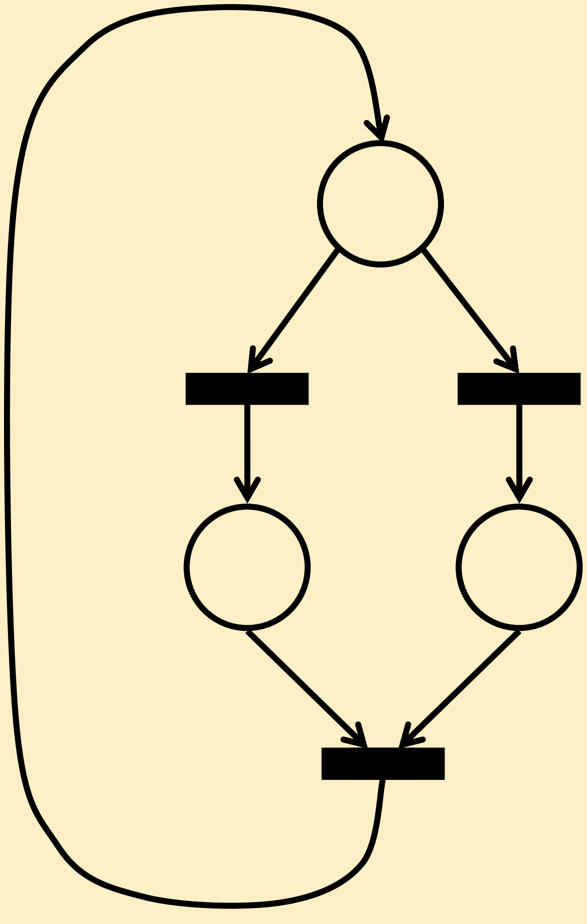
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | (2*31+33) |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | | (3*31+34) |

# További strukturális tulajdonságok

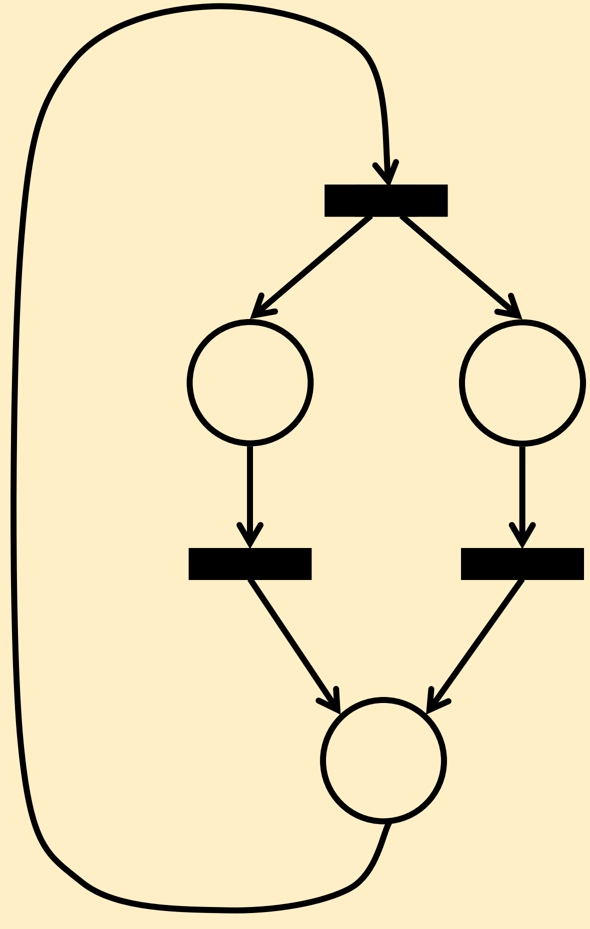
# Strukturális élőség

- Egy *N* Petri-háló strukturálisan élő, ha létezik olyan $M_0$ kezdőállapota, amelyben $(N, M_0)$ ($L_4$-)élő
  - Szükséges feltétel: erősen összekötött gráf struktúra
  - Jelölt gráfok: egy $(G, M_0)$ jelölt gráf a.cs.a. élő, ha $M_0$ állapotban minden G-beli irányított körben van legalább egy token $\rightarrow$ minden jelölt gráf strukturálisan élő
  - FC hálók: egy szabad választású háló strukturálisan élő, ha minden *N*–beli szifon tartalmaz csapdát
  - Általános (közönséges) Petri-hálókra a strukturálisan élőség jellemzése (még) nem ismert

# Strukturális élőség, korlátosság?



nincs élő jelölése



nincs nemüres biztos jelölése

# Vezérelhetőség

- Egy *N* Petri-háló teljesen vezérelhető, ha bármely korlátos $M_0$ kezdőállapot esetén:

$$\boxed{\forall M_i, M_j : M_i, M_j \in R(N, M_0) \Rightarrow M_i \in R(N, M_j) \wedge M_j \in R(N, M_i)}$$

  – azaz bármely állapot elérhető bármely más állapotból

- Elégséges feltétel: $\boxed{\mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}) = m}$

  – mert $M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \rightarrow \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = \Delta M$

  – rangfeltétel: $\mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \mid \Delta M) = m$

  ahol $m$ a helyek száma.

- Ue. szükséges feltétel is jelölt gráfok esetén

# Strukturális korlátosság

- Egy *N* Petri-háló strukturálisan korlátos, ha bármely korlátos $M_0$ kezdőállapotra korlátos marad
- Feltétele: létezik egy $m$ pozitív komponensű $\vec{\mu}$

$$\boxed{\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \le 0}$$

- Szükségesség: $M \in R(N, M_0) \rightarrow M = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}, \vec{\sigma} \ge 0$
  - átrendezve: $M^{\mathrm{T}}\vec{\mu} = M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu} + \underbrace{\vec{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\vec{\mu}}_{\mathbf{W}\vec{\mu}\le 0, \vec{\sigma}\ge 0}$ ← felhasználjuk a feltételt

    (belső szorzat)
  - felső korlát: $M^{\mathrm{T}}\vec{\mu} \le M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu} \Rightarrow M(p) \le \dfrac{M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu}}{\mu_p}$

# Strukturális korlátosság: elégségesség

- $\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\mu} \leq 0$ feltétel elégséges is, mert
  - egyébként $\exists \vec{\sigma} \geq 0 \colon \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$

    $$\exists M, M_0 : M - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 \rightarrow M \underset{\neq}{\geq} M_0$$
  - ekkor megfelelő $M_0$ választásával $\vec{\sigma}$ tetszőlegesen sokszor végrehajtható és $N$ nem korlátos

# Lineáris mátrixegyenlőtlenségek

vagy az egyik, vagy a másik megoldható

| *Lemma* | $\text{Rendszer}_1$ | $\oplus$ $\text{Rendszer}_2$ |
|---|---|---|
| Minkowski-Farkas | $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} \vec{b}$, $\vec{\sigma}$ tetszőleges | $\mathbf{W}\vec{\mu} = 0, \vec{\mu} \geq 0, \vec{\mu}^{\mathrm{T}}\vec{b} > 0$ |
| Minkowski-Farkas | $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} \vec{b}, \vec{\sigma} \geq 0$ | $\mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0, \vec{\mu} \geq 0, \vec{\mu}^{\mathrm{T}}\vec{b} > 0$ |
| Stiemke | $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$, $\vec{\sigma}$ tetszőleges<br>$\rightarrow$ nem konzervatív | $\mathbf{W}\vec{\mu} = 0, \vec{\mu} > 0$<br>$\rightarrow$ konzervatív |
| Farkas | $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0, \vec{\sigma} \geq 0$<br>$\rightarrow$ nem strukturálisan korlátos | $\mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0, \vec{\mu} > 0$<br>$\rightarrow$ strukturálisan korlátos |

# Konzervativitás

- Egy *N* Petri-háló (részlegesen) konzervatív, ha bármely korlátos $M_0$ és $M \in R(N, M_0)$ állapotra minden (néhány) $p \in P$ helyhez található egy $\mu_p$ pozitív egész súlytényező, hogy $M\vec{\mu} = M_0\vec{\mu} = \text{állandó}$
- Szükséges és elégséges feltétel: $\boxed{\exists \vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}\vec{\mu} = 0}$

# Ismételhetőség

- Egy *N* Petri-háló (részlegesen) ismételhető, ha létezik olyan $M_0$ kezdőállapot és $M_0$-ből induló $\sigma$ tüzelési szekvencia, hogy minden (néhány) $t \in T$ tranzíció végtelen sokszor tüzel $\sigma$-ban
- Szükséges és elégséges feltétel: $\boxed{\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0}$
  - Bizonyítás: $\exists \vec{\sigma} > 0 \colon \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0$

    $\exists M, M_0 : M - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0 \to M \geq M_0$
  - ekkor megfelelő $M_0$ választásával $\vec{\sigma}$ tetszőlegesen sokszor végrehajtható

# Konzisztencia

- Egy *N* Petri-háló (részlegesen) konzisztens, ha létezik olyan $M_0$ kezdőállapot és $M_0$-ből induló és $M_0$-ba visszavezető $\sigma$ tüzelési szekvencia, hogy minden (néhány) $t \in T$ tranzíció legalább egyszer tüzel $\sigma$-ban
- Szükséges és elégséges feltétel: $\boxed{\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} = 0}$
  - Bizonyítás: ismételhetőség feltételénél látott módon

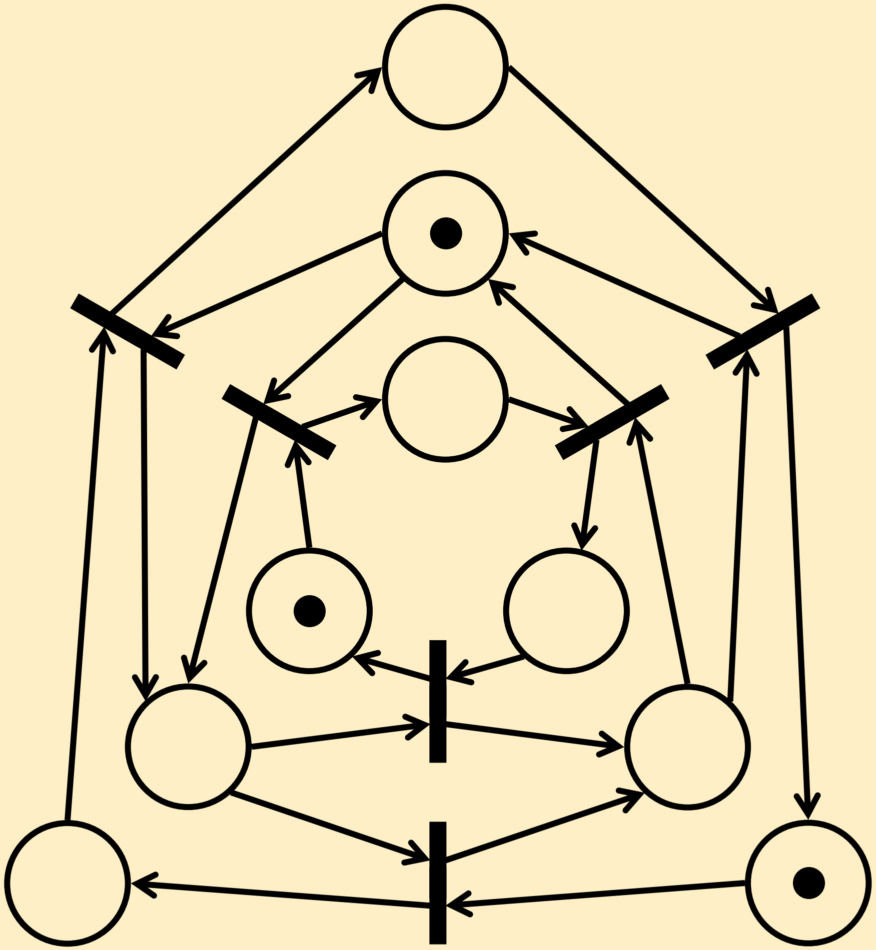
# Strukturális B-fairség

- Két tranzíció strukturálisan B-fair, ha bármely $M_0$ kezdőállapot esetén B-fair (korlátos fair) relációban állnak.
- Egy *N* Petri-háló B-fair, ha bármely két tranzíciója esetén a B-fair reláció teljesül
- Egy *N* Petri-háló strukturálisan B-fair, ha bármely $M_0$ kezdőállapotra a háló B-fair
  - B-fair reláció ekvivalencia reláció $\rightarrow$ tranzíciókat ekvivalencia osztályokba csoportosítja
  - Strukturális B-fair reláció $\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ B-fair reláció

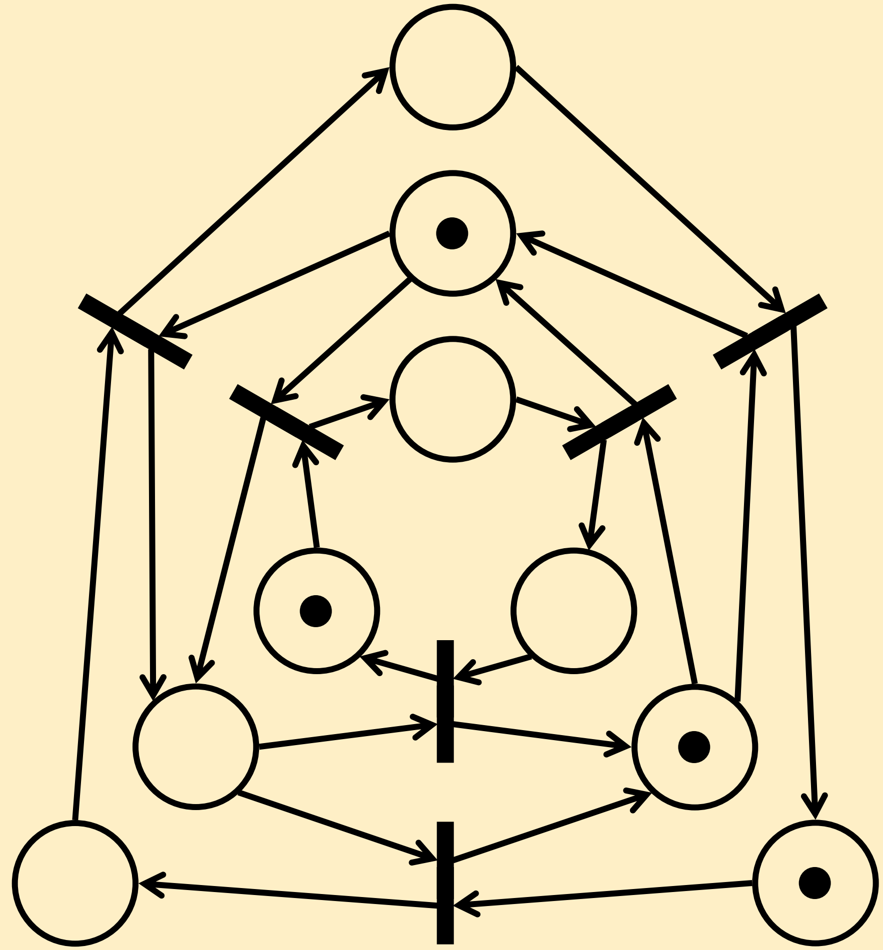
# Strukturális B-fairség feltétele

- Egy strukturálisan korlátos Petri-háló a.cs.a. strukturálisan B-fair, ha
  - konzisztens és <u>csak egy</u> minimális nemnegatív T-invariánsa van, vagy
  - nem konzisztens és nincs minimális nemnegatív T-invariánsa
- Minden erősen összekötött jelölt gráf strukturálisan B-fair

# B-fair, de nem strukturálisan B-fair háló



élő és B-fair $M_0$



élő, de nem B-fair $M_0$

# Petri-hálók strukturális és dinamikus tulajdonságai közti összefüggések

# Petri-háló tulajdonságok

Dinamikus tulajdonságok:

- Élőség
- Holtpontmentesség
- Korlátosság
- Megfordíthatóság
  - Visszatérő állapot
- Perzisztencia
- Globális fair reláció
  - B-fair (korlátos fair) reláció

Strukturális tulajdonságok:

- Strukturális élőség
- Vezérelhetőség
- Strukturális korlátosság
- Konzervativitás
  - P-invariáns (hely)
- Ismételhetőség
  - T-invariáns (tüzelési)
- Konzisztencia
- Strukturális B-fair reláció

# Holtpontmentesség $\rightarrow$ T-invariáns

- Ha $(N, M_0)$ Petri-háló <u>korlátos</u> és holtpontmentes: $\Rightarrow \exists\, \vec{\sigma}_T$ tüzelhető T-invariáns, melyre $\boxed{\vec{\sigma}_T \underset{\neq}{\geq} 0}$
- Bizonyítás:
  - korlátosság $\Rightarrow$ véges állapottér
  - holtpontmentesség $\Rightarrow \exists$ legalább egy $M_0$-ból induló $\vec{\sigma}_T$ végtelen tüzelési szekvencia
  - végesség $\Rightarrow \exists$ legalább egy $M' \in R(N, M_0)$ ismétlődő állapot $\Rightarrow$ az $M' \xrightarrow{\vec{\sigma}_T} M'$ szekvencia T-invariáns

- Következmény: ha nincsen ilyen T-invariáns, a hálózat **minden úton elakad** (nincs ciklusa)

# Élőség $\rightarrow$ T-invariáns

- Ha $(N, M_0)$ Petri-háló élő és korlátos $\Rightarrow \exists$ tüzelhető $\vec{\sigma}_T$ T-invariánsa, melyre $\boxed{\forall t \in T : \vec{\sigma}_T(t) > 0}$
- Bizonyítás:
  - élő $\Rightarrow \forall\, t \in T$ tranzíció $\forall\, M \in R(N, M_0)$ állapotban $L_1$-élő
    - $\exists$ trajektória, hogy minden tranzíció végtelen sokszor
  - korlátos és holtpontmentes $\Rightarrow \exists$ tüzelhető T-invariáns
  - indirekt: tegyük fel, hogy $\exists\, t_i \in T$ tranzíció, ami nem eleme egyetlen T-invariánsnak sem
    - $S \subseteq R(N, M_0)$ azon állapotok halmaza, melyekből $t_i$ kimenő él
    - $S$ véges elemű: $t_i$ véges sokszor tüzelhető anélkül, hogy kétszer azonos állapotból indulnánk $\Rightarrow$ a Petri-háló nem élő!

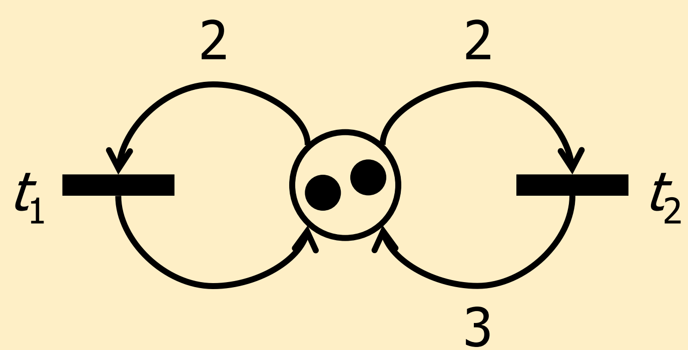
# Másik gondolatmenet

- Ha $PN(N, M_0)$ élő
  - $\exists$ olyan tüzelési szekvencia, amelyikben $\forall\, t \in T$ tranzíció végtelen sokszor előfordul
  - Pl: $M_0 \xrightarrow{\ldots t_1} M_1 \xrightarrow{\ldots t_2} \ldots \xrightarrow{\ldots t_n} M_n \xrightarrow{\ldots t_1} \ldots$
  - $\exists$ olyan véges szakaszok, amikben $\forall\, t \in T$ tranzíció előfordul
  - végesség $\Rightarrow$ az ezek által bejárt állapotok között $\exists$ legalább egy $M'$ ismétlődő állapot
  - A $\vec{\sigma}_T : M' \to M'$ szekvencia T-invariáns, amelyben $\forall\, t \in T$ tranzíció előfordul
  - Erre $\vec{\sigma}_T > 0$

# Következmény

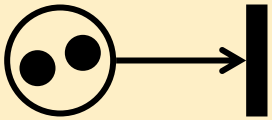
- Ha korlátos Petri-hálóban nincs ilyen T-invariáns $\Rightarrow$ **a háló nem élő!**
- Bizonyítás (a korábbi gondolatmenettel):
  - ha egy $t \in T$ tranzíció nincs benne egyetlen T-invariánsban sem $\Rightarrow$ nincs benne egyetlen ciklusban sem $\Rightarrow$ csak véges sokszor tüzelhet
- A tétel megfordítása (hálónak $\exists$ tüzelhető, $\forall t \in T$ tranzíciót lefedő T-invariánsa $\Rightarrow$ élő) **nem igaz**!

ellenpélda:



# P-invariáns $\rightarrow$ Korlátosság

- Ha $(N, M_0)$ Petri-hálónak $\exists$ minden helyet lefedő P-invariánsa $\Rightarrow$ a háló korlátos
- Bizonyítás:
  - $\exists$ minden helyet lefedő P-invariáns $\Rightarrow \exists \vec{\mu} > 0 : \mathbf{W}\vec{\mu} = 0$
  - teljesül a strukturális korlátosság feltétele: $\boxed{\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0}$
- A tétel megfordítása (korlátosságból következik a P-invariánsok léte) triviálisan nem igaz!



# Összefüggőség → Invariáns

- Minden összefüggő Petri-háló, amelynek van
  - egy pozitív (minden tranzíciót fedő) T-invariánsa és
  - egy pozitív (minden helyet fedő) P-invariánsa

  erősen összefüggő
- Petri-háló élő és korlátos ⇒ erősen összefüggő
  - gráf erős összefüggősége szükséges, de nem elégséges
  - létezik olyan erősen összefüggő Petri-háló, amelynek
    - nincs korlátos kezdőállapota, amellyel élő
    - nincs nemüres kezdőállapota, amellyel korlátos

vagy