Petri hálók: alapfogalmak, kiterjesztések

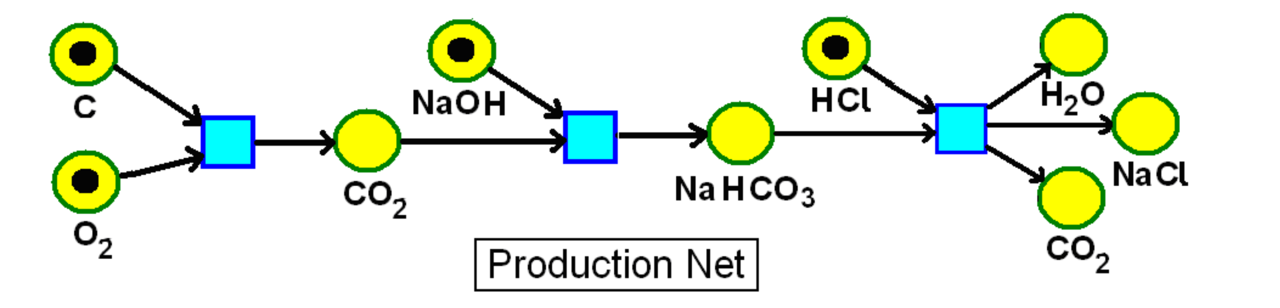
dr. Bartha Tamás

Dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Petri háló: Mi az?

- A Petri hálók „eredete”
  - Carl Adam Petri: német matematikus, 1926–
  - a jelölésrendszert 1939-ben, 13 évesen találta ki
  - eredetileg kémiai folyamatok leírására szánta



  - a matematikai alapokat a doktori disszertációjában dolgozta ki 1962-ben (két hét alatt)
    - C. A. Petri: Kommunikation mit Automaten. Schriften des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn Nr. 2, 1962

Petri háló: Mire használható?

Petri hálók alkalmazási köre

- konkurrens,
- aszinkron,
- elosztott,
- párhuzamos,
- nemdeterminisztikus
- sztochasztikus

és/vagy

rendszerek modellezése.

- Vannak más formalizmusok, pl. állapotgépek (automaták). Akkor minek egy másik?
  - Kompakt módon fejezi ki az állapotot
  - Szemléletesen fejezi ki a szinkronizációt

⇒ Tömörebb, átláthatóbb modellek

A Petri hálók alapvető tulajdonságai

- Egyidejűleg:
  - grafikus → áttekinthetőség (+hierarchia)
  - matematikai reprezentáció → precizitás, egyértelműség
- Struktúrával fejezi ki:
  - vezérlési struktúra
  - adatstruktúra
- Előnyök/hátrányok:
  - \+ más ábrázolásmódok is kiteríthetőek Petri hálóvá
  - – egyszerű feladathoz is nagy Petri háló tartozhat
    - → pl. megoldó módszer automatikusan generált modellekhez

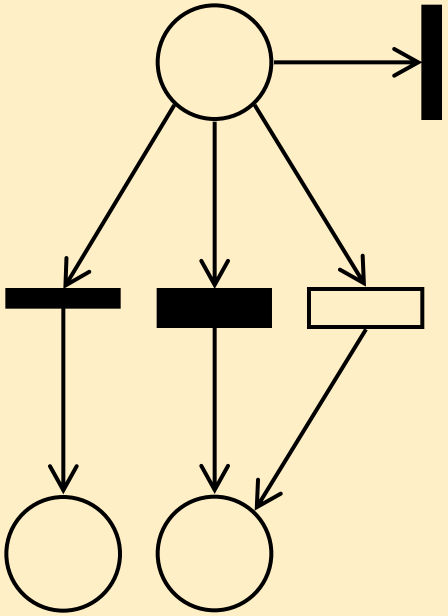
Petri hálók felépítése, működése

Petri hálók struktúrája

Strukturálisan: irányított, súlyozott, páros gráf

- Két típusú csomópont:
  - hely: $p \in P$ jelölése: kör
  - tranzíció: $t \in T$ jelölése: téglalap
- Irányított élek:
  - hely $\rightarrow$ tranzíció
  - tranzíció $\rightarrow$ hely

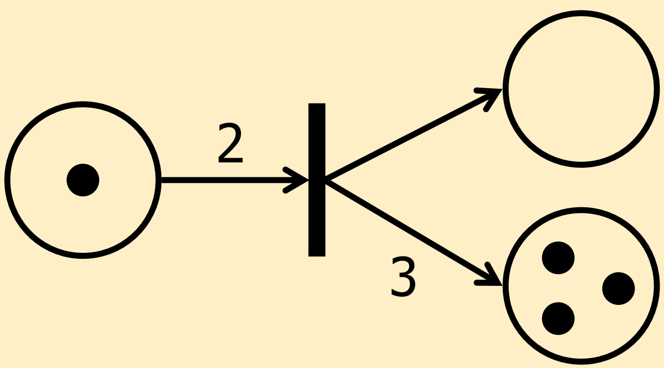
  páros gráf!
  - $e \in E : (P \times T) \cup (T \times P)$



Petri háló állapota

Állapot:

- Állapotjelölő: token
  - token jelölése: fekete pötty a hely körébe rajzolva
- Hely állapota: benne levő tokenek száma
- Hálózat állapota: az egyes helyek állapotainak összessége
  - Állapotvektor: a $\pi = |P|$ komponensű M token eloszlás vektor
  - Az m_i komponense a p_i helyen található tokenek száma
    - „p_i–t m_i token jelöli”

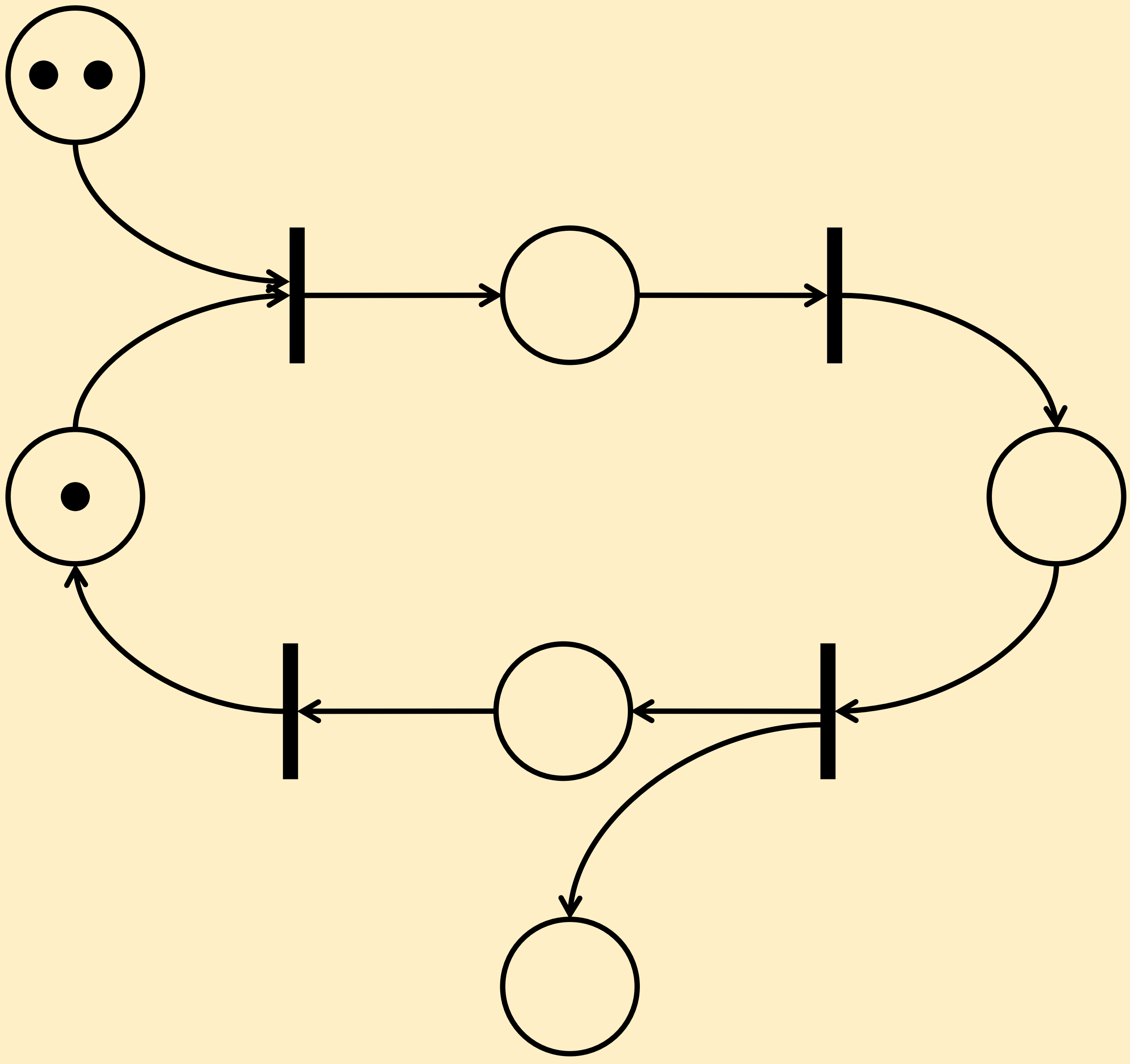


Petri háló működ(tet)ése, dinamika

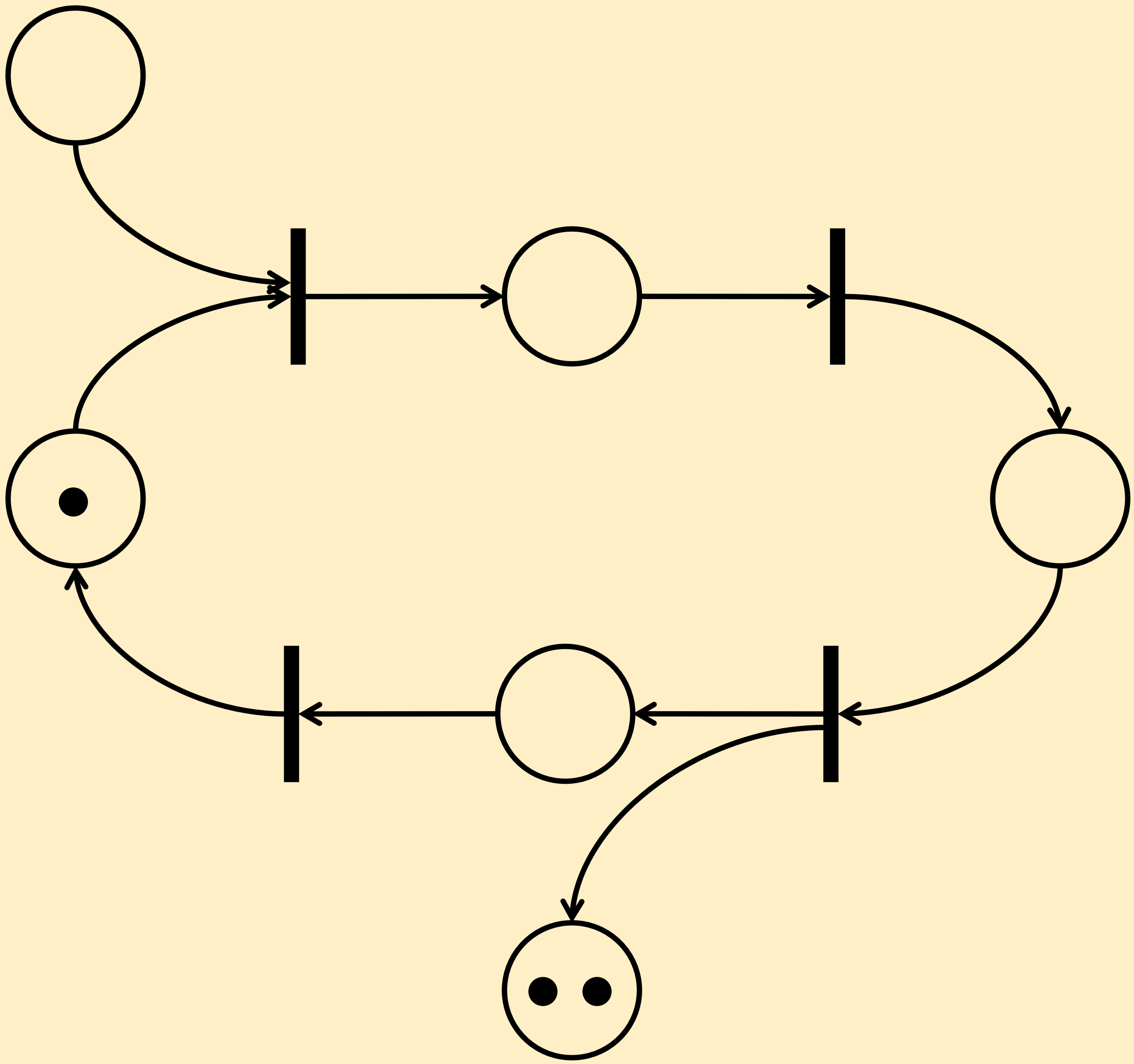
Állapotváltás:

- Állapot megváltozása: tranzíciók „tüzelése”
  - engedélyezettség vizsgálata
  - tüzelés végrehajtása
    - tokenek elvétele a bemeneti helyekről
    - tokenek kirakása a kimeneti helyekre
  - megváltozott token eloszlás vektor: új állapot
- Engedélyezettség: feltételek teljesülnek-e?
  - feltétel: bemeneti helyek / tokenek / bemenő élek
    - bemeneti helyeken van-e elég token?
    - minden egyszeres él egy tokent „szállít”

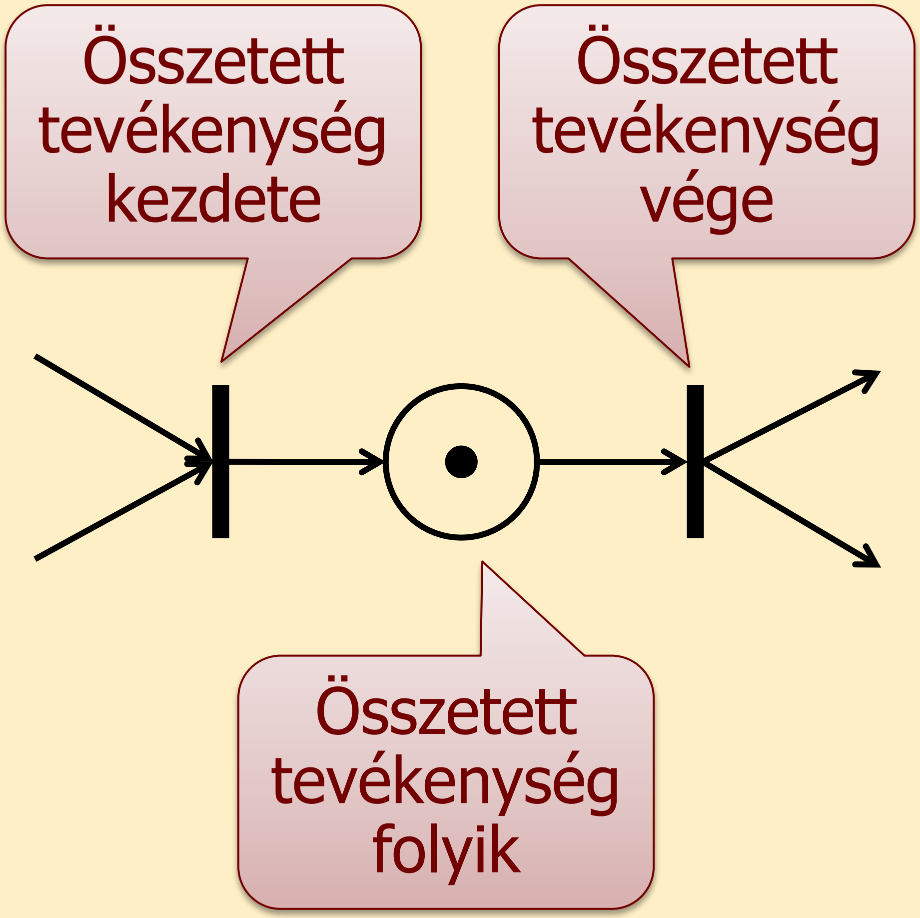
Egyszerű példa



Egyszerű példa

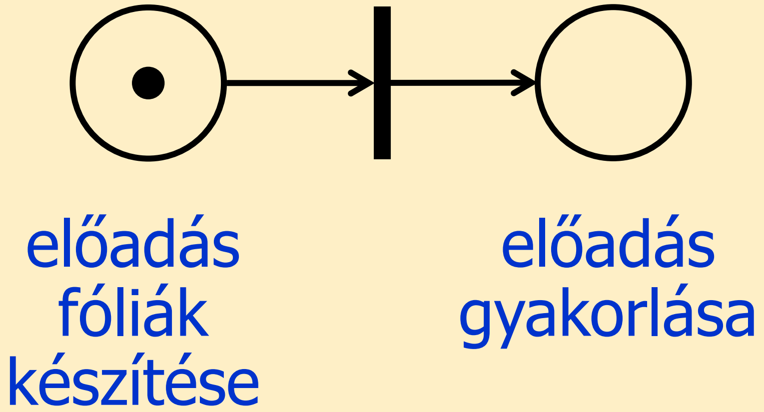


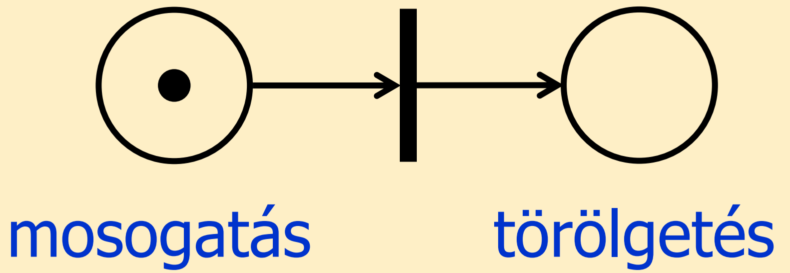
Petri hálók jellemzői



Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események

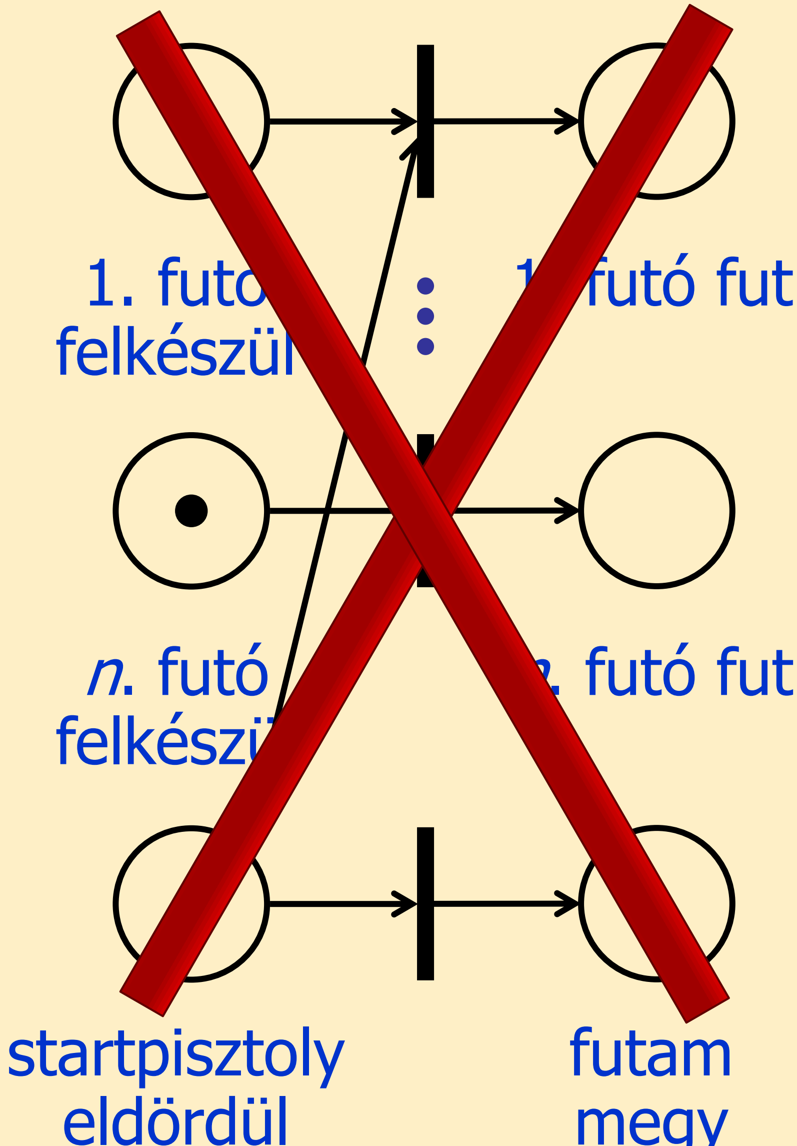
Petri hálók jellemzői

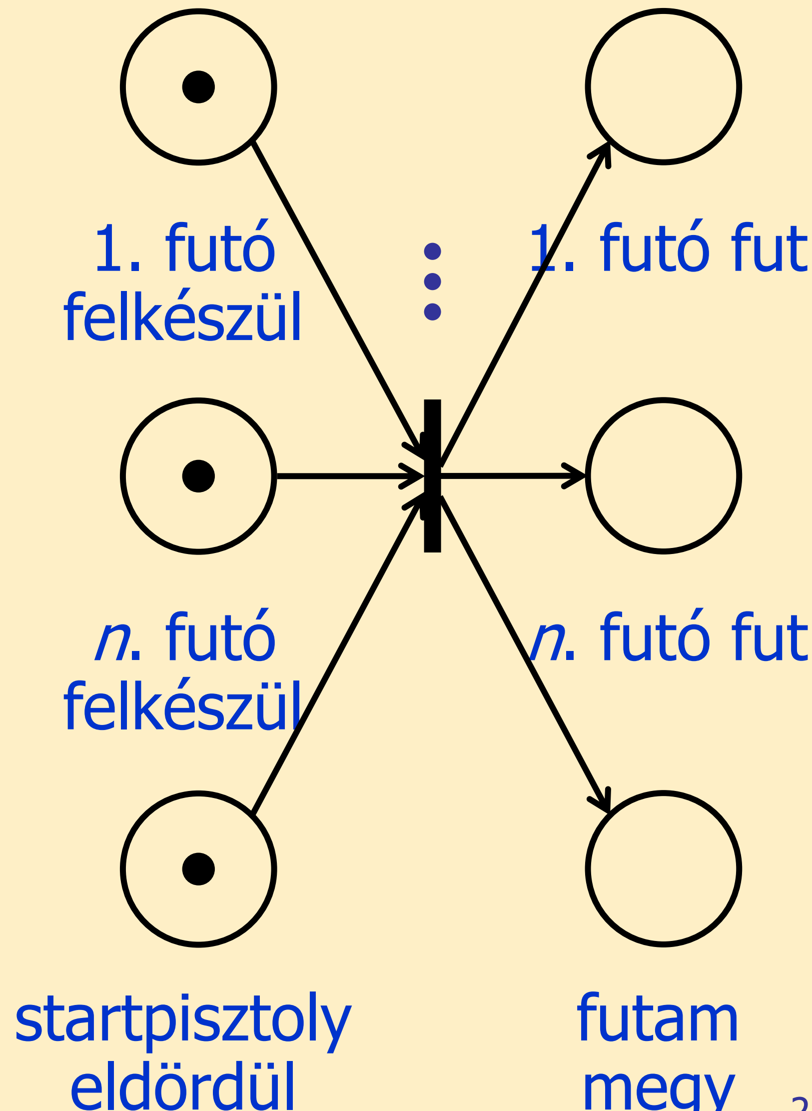




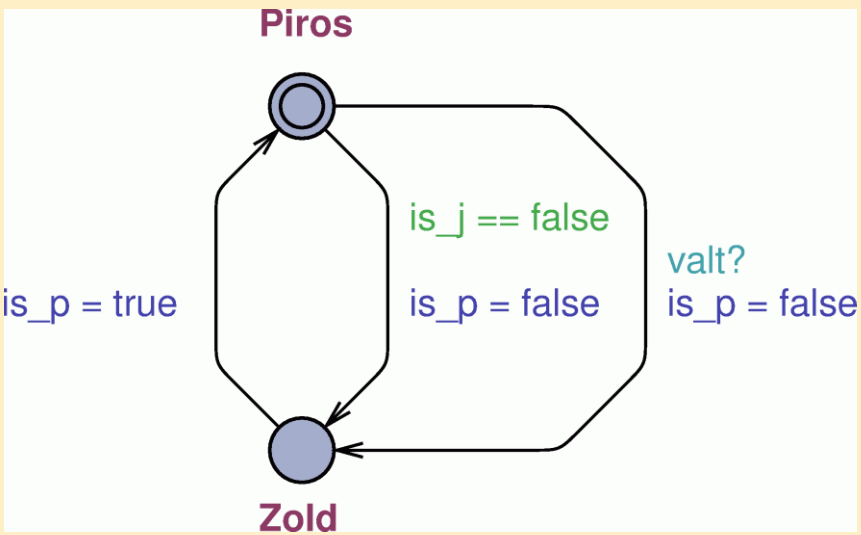
Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	események szekvenciája / függetlensége

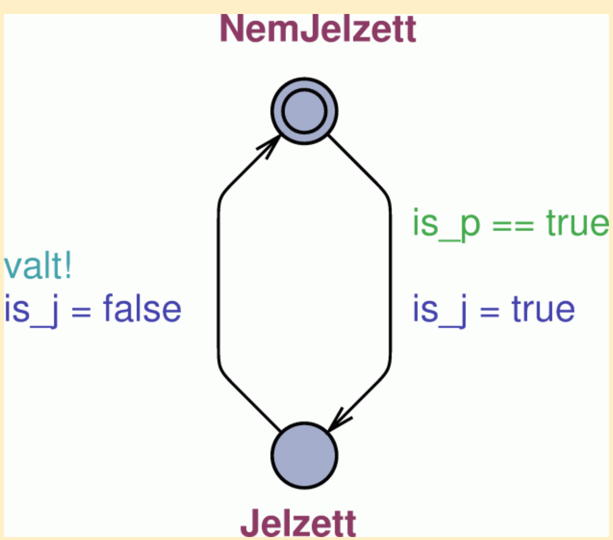
Egyidejűség, szinkronizáció



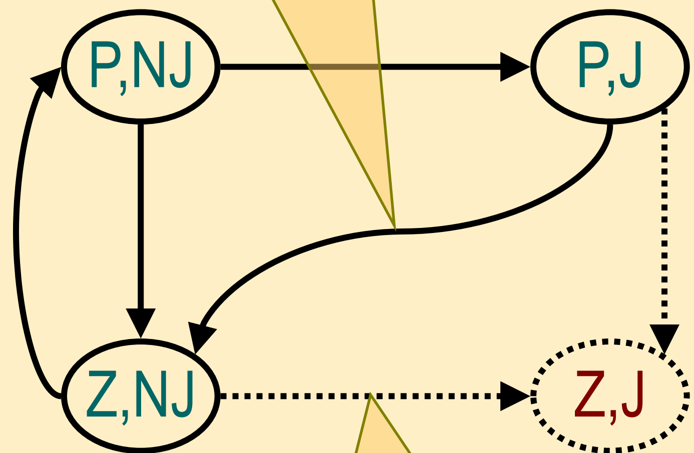


Példa: gyalogos lámpa jelzőgombbal



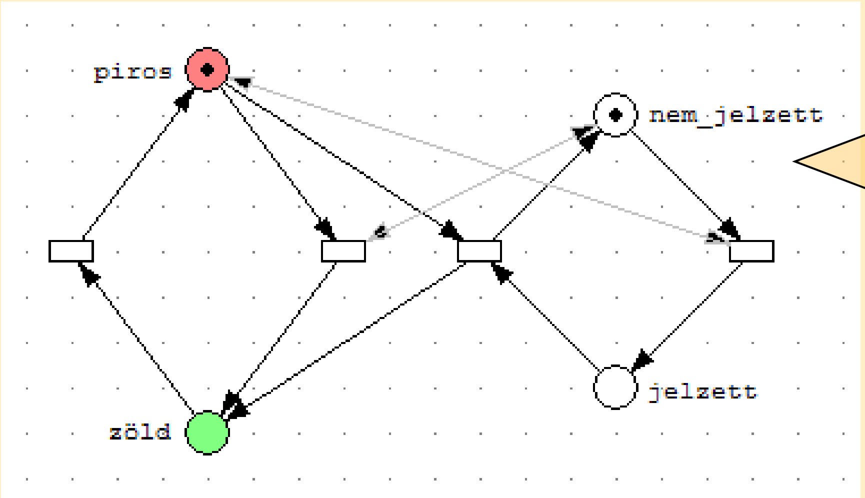


- Szinkronizáció (valt!, valt?)



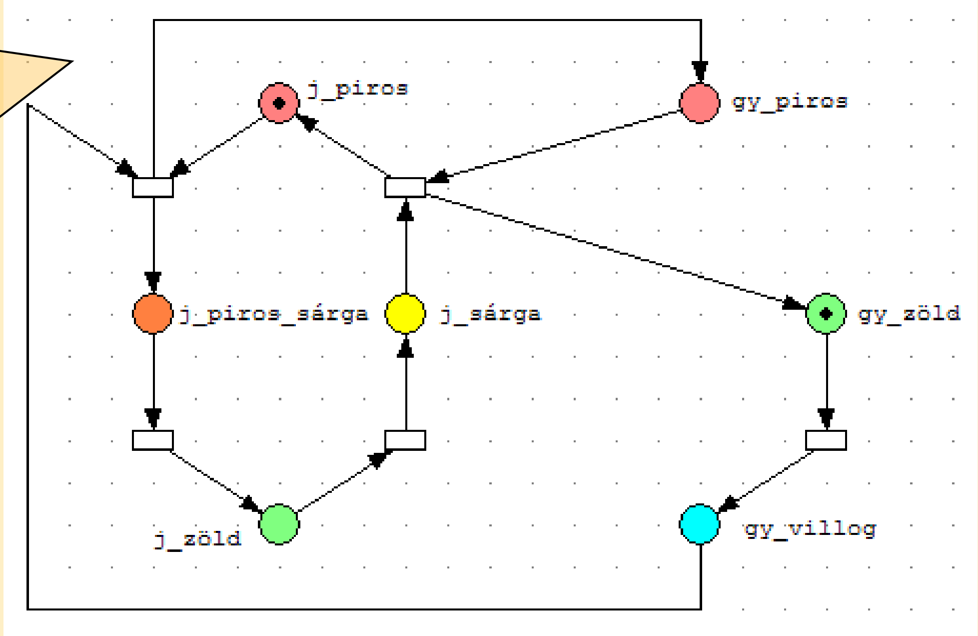
- Korlátozó feltétel (is_p == true)

Egyszerű modellek: szinkronizáció

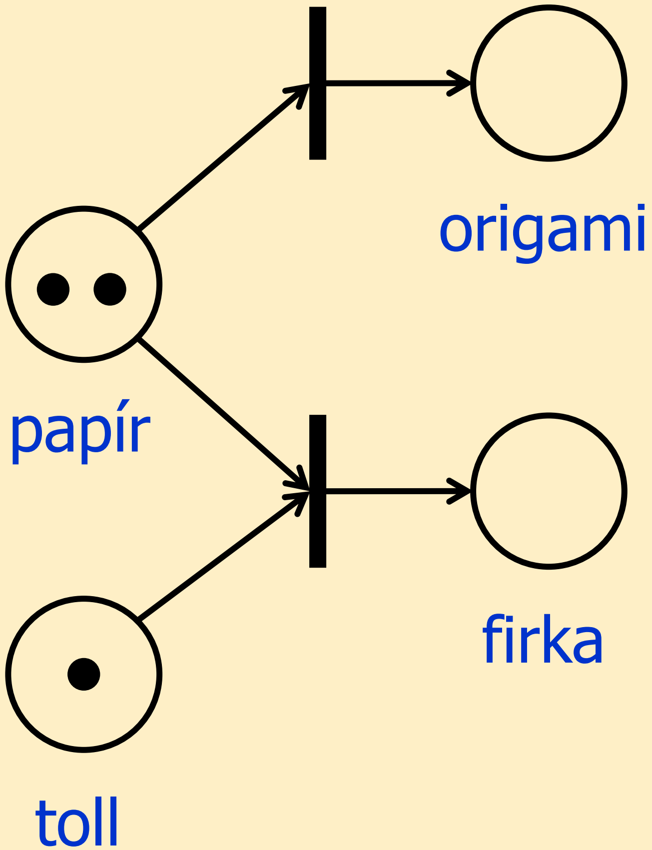


- Gyalogos átkelőhely lámpával és nyomógombbal

- Kereszteződés forgalmi és gyalogos átkelőhely lámpával

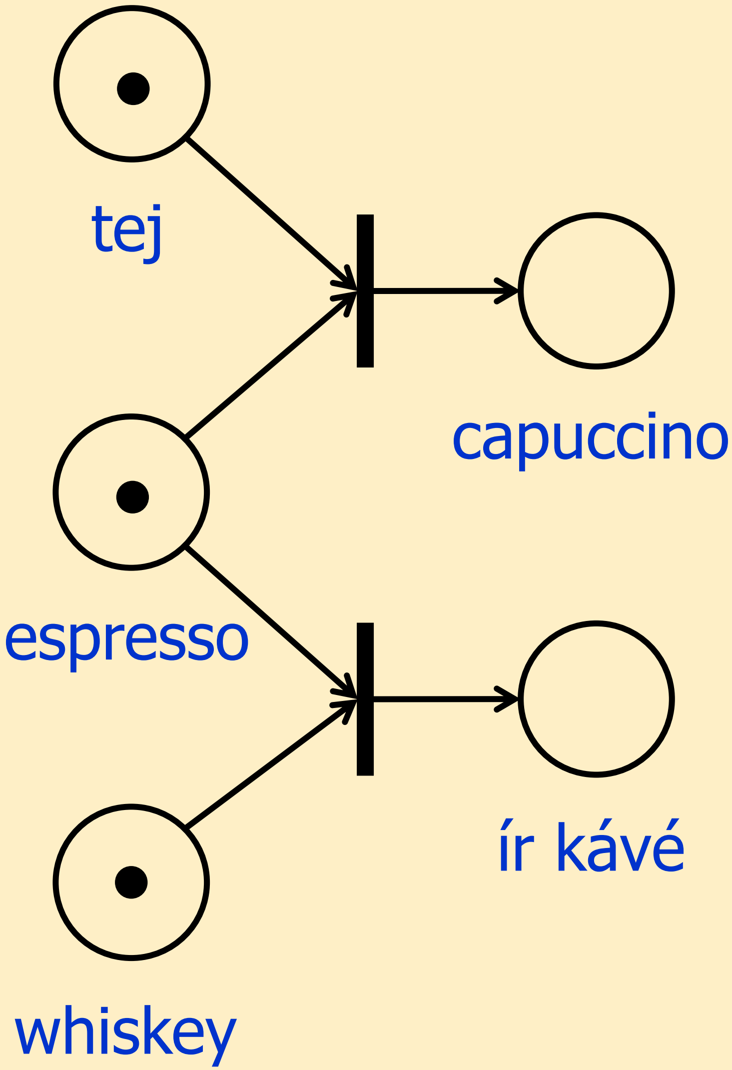


Petri hálók jellemzői



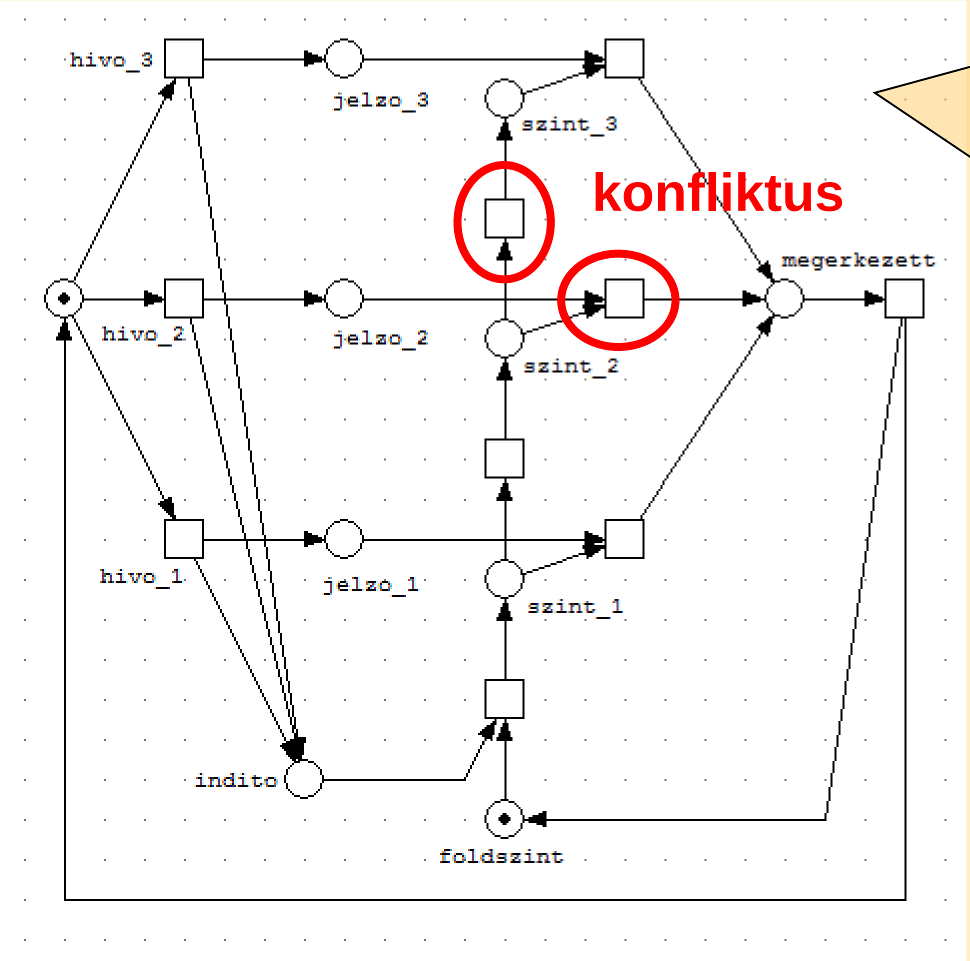
Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	események szekvenciája / függetlensége
nem-determinizmus	konkurencia

Petri hálók jellemzői

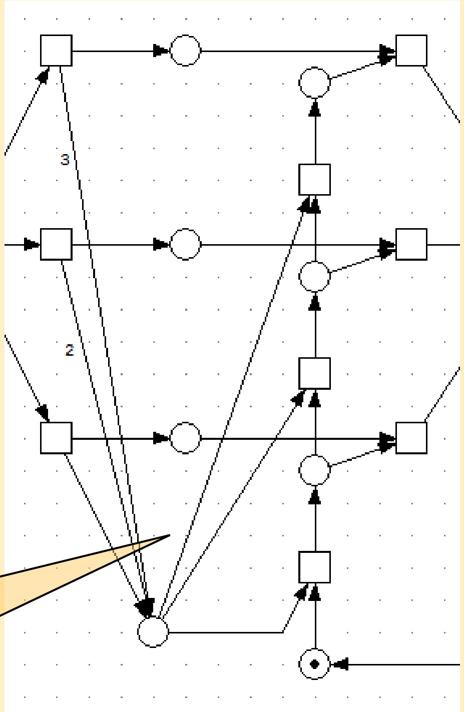


Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	események szekvenciája / függetlensége
nem-determinizmus	konkurencia
két tranzíció nem tüzel egyszerre	konfliktus

Egyszerű modellek: konfliktus

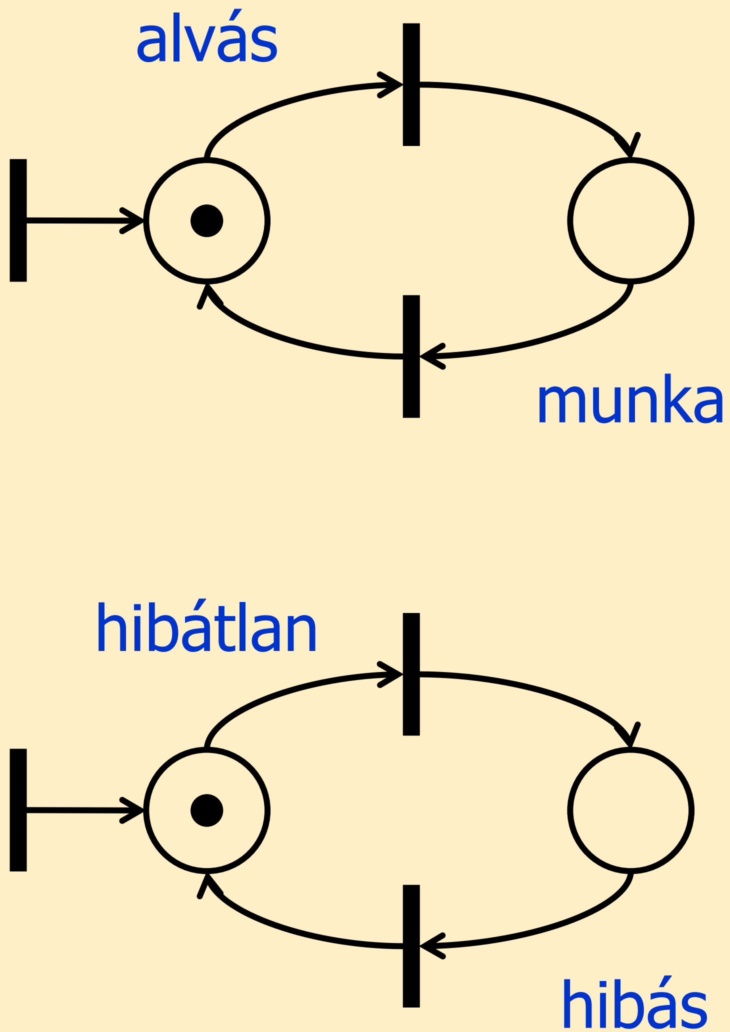


- Ételift modellje. Három szintről hívhatják, az adott szinten megáll.
- A modell hibás.



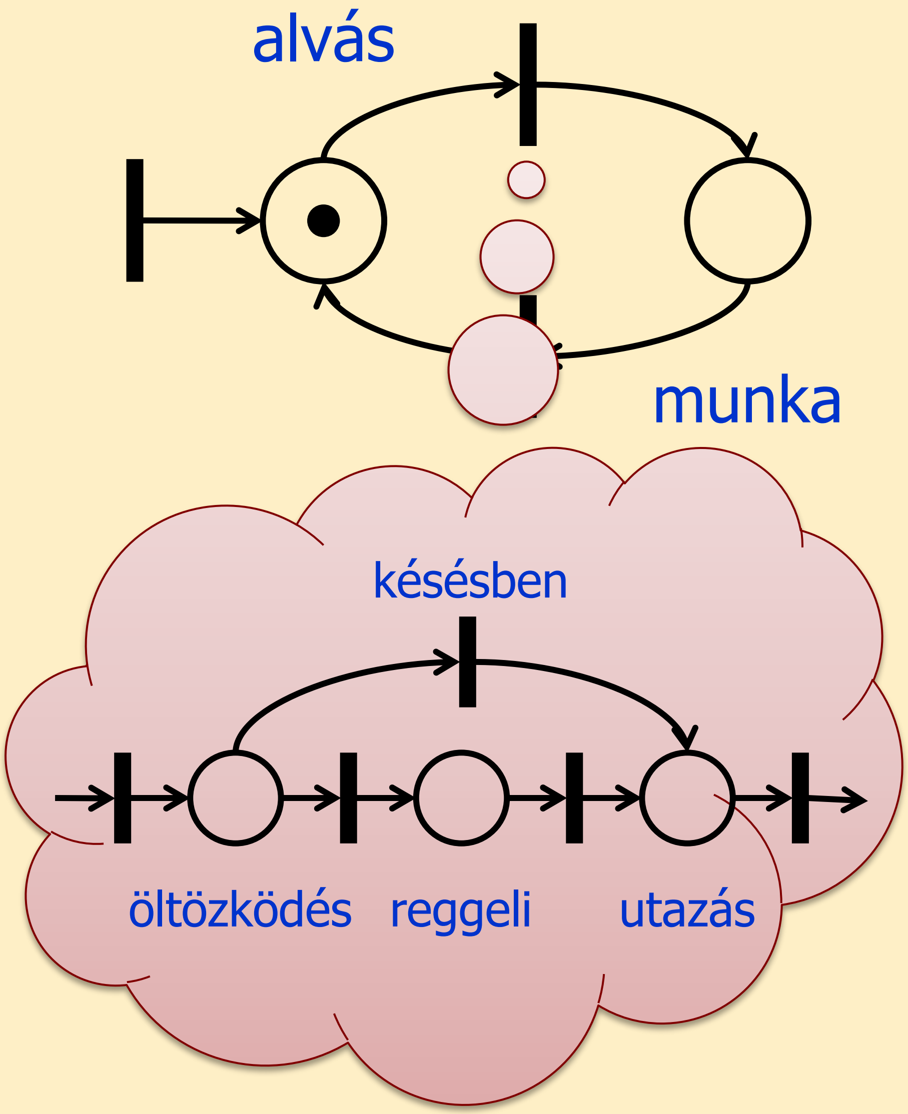
- A modell javítása

Petri hálók jellemzői



Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	események szekvenciája / függetlensége
nem-determinizmus	konkurencia
két tranzíció nem tüzel egyszerre	konfliktus
neminterpretált	absztrakt tulajdonságok

Petri hálók jellemzői

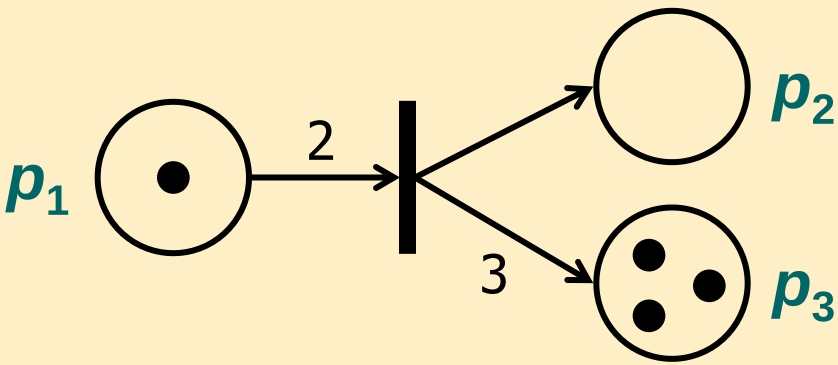


Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali" tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	események szekvenciája / függetlensége
nem-determinizmus	konkurencia
két tranzíció nem tüzel egyszerre	konfliktus
neminterpretált	absztrakt tulajdonságok
absztrakció és finomítás	hierarchikus modellezés

Állapotvektor: token eloszlás vektor

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\pi \end{bmatrix}$$

- Kezdőállapot: M_0 kezdő token elosztás
- Példa:

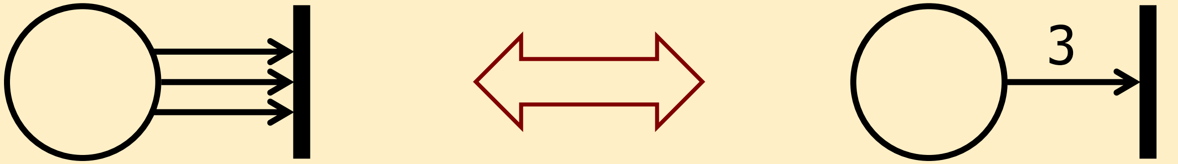


$$\begin{array}{cl} M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \end{array} \end{array}$$

Többszörös élek

Élsúly:

- Bármely $e \in E$ élhez $w^*(e) \in \mathbf{N}^+$ súlyt lehet rendelni
- A $w^*(e)$ súlyú e él ugyanaz, mint w_e darab párhuzamos él
- Nem rajzolunk párhuzamos éleket, élsúlyt használunk
- Nem szokás feltüntetni az egyszeres súlyokat



Alapfogalmak összefoglalása

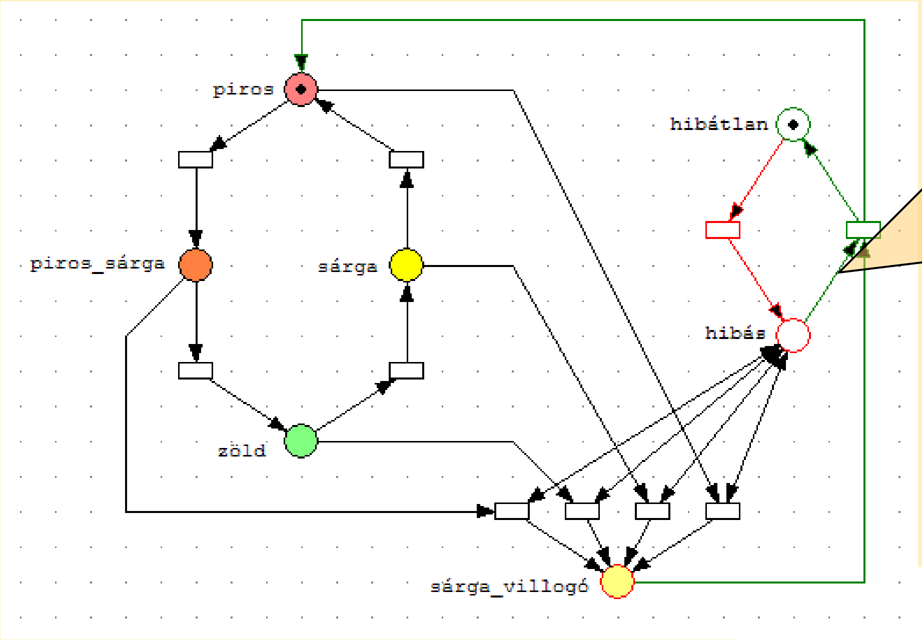
Petri háló:

- Nemdeterminisztikus véges automata
- Állapotvektor: token eloszlás vektor
- Állapotátmeneti függvény: tranzíciók

Felépítés:

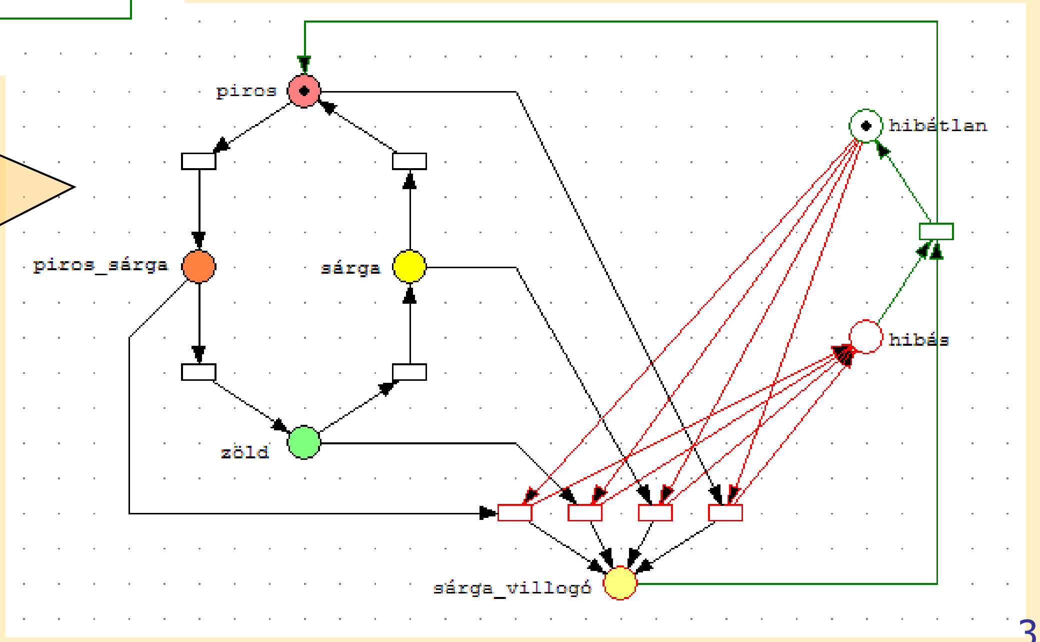
- egy-egy hely egy-egy logikai feltétel
- Petri háló struktúrája követi a feladat logikai dekompozícióját

Egyszerű modellek: szinkronizáció és állapotváltozó



- Kereszteződés forgalmi lámpával, meghibásodhat
- Állapotvezérelt

- Kereszteződés forgalmi lámpával, meghibásodhat
- Eseményvezérelt



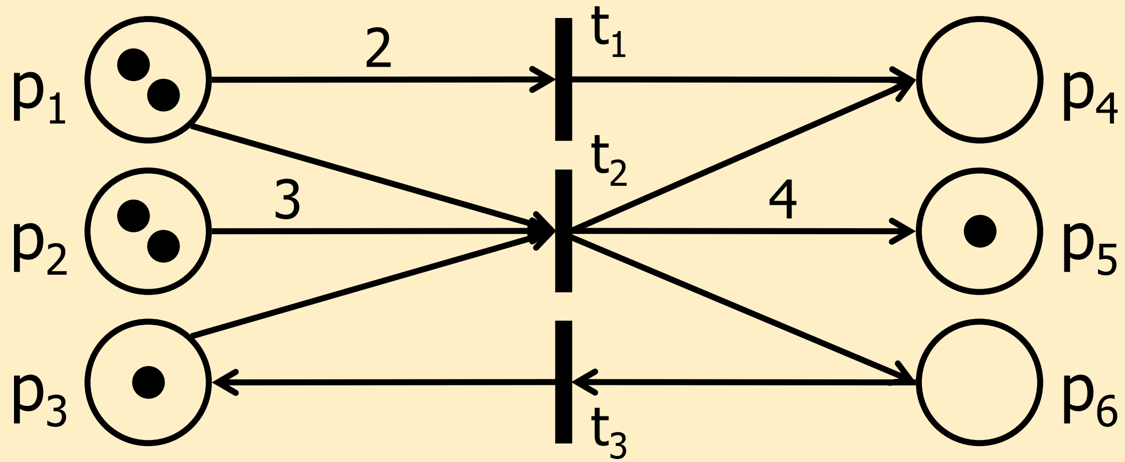
Topológia

- $n \in (P \cup T)$ csomópont $\bullet n$ ősei és $n\bullet$ utódai:
  - $t \in T$ ősei a bemeneti helyei: $\bullet t = \{p \mid (p,t) \in E\}$
  - $t \in T$ utódai a kimeneti helyei: $t\bullet = \{p \mid (t,p) \in E\}$
  - $p \in P$ ősei a bemeneti tranzíciói: $\bullet p = \{t \mid (t,p) \in E\}$
  - $p \in P$ utódai a kimeneti tranzíciói: $p\bullet = \{t \mid (p,t) \in E\}$
- Csomópontok $P' \subseteq P$ és tranzíciók $T' \subseteq T$ részhalmazára:

$$\bullet P' = \bigcup_{p \in P'} \bullet p \qquad \bullet T' = \bigcup_{t \in T'} \bullet t$$

$$P'\bullet = \bigcup_{p \in P'} p\bullet \qquad T'\bullet = \bigcup_{t \in T'} t\bullet$$

Topológia példa



$\bullet p_1 = \varnothing$

$\bullet p_2 = \varnothing$

$\bullet p_3 = \{t_3\}$

$\bullet p_4 = \{t_1, t_2\}$

$\bullet p_5 = \{t_2\}$

$\bullet p_6 = \{t_2\}$

$p_1 \bullet = \{t_1, t_2\}$

$p_2 \bullet = \{t_2\}$

$p_3 \bullet = \{t_2\}$

$p_4 \bullet = \varnothing$

$p_5 \bullet = \varnothing$

$p_6 \bullet = \{t_3\}$

$\bullet t_1 = \{p_1\}$

$\bullet t_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$

$\bullet t_3 = \{p_6\}$

$t_1 \bullet = \{p_4\}$

$t_2 \bullet = \{p_4, p_5, p_6\}$

$t_3 \bullet = \{p_3\}$

Felépítés összefoglalása

Petri háló (PN)	$PN = \langle P, T, E, W, M_0 \rangle$
• Helyek	$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_\pi\}$
• Tranzíciók (tüzelések)	$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\tau\}$
	$P \cap T = \varnothing$
• Élek	$E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
• Súlyfüggvény	$w^* : E \to \mathbf{N}^+$
PN struktúra	$N = \langle P, T, E, W \rangle$
• Kezdőállapot	$M_0 : P \to \mathbf{N}$
PN adott kezdőállapottal	$PN = \langle N, M_0 \rangle$

Dinamikus viselkedés: engedélyezettség, tüzelés, állapottrajektória

Dinamikus viselkedés

Petri hálók „működésének” egy lépése:

- Állapot megváltozása: tranzíciók „tüzelése”
  - korábbi állapot: kezdeti token eloszlás vektor
  - tüzelés végrehajtása
    1. engedélyezettség vizsgálata
    2. tokenek elvétele a bemeneti helyekről
    3. tokenek kirakása a kimeneti helyekre
  - új állapot: megváltozott token eloszlás vektor

Engedélyezettség feltétele

- Ha egy $t \in T$ tranzíció minden bemeneti helyét legalább $w^{-}(p, t)$ token jelöli:
  - $w^{-}(p, t)$ a p-ből t-be vezető $e = (p, t)$ él $w^{*}(e)$ súlya

  $\Rightarrow$ a tranzíció tüzelése **engedélyezett**, ha

$$\boxed{\forall p \in \bullet t : m_p \geq w^{-}(p,t)}$$

Állapotátmenet

Tüzelés végrehajtása:

- Engedélyezett tranzíció tetszés szerint tüzel vagy nem
  - “fire at will”, de egyszerre csak egy tranzíció tüzelhet!
- Több tranzíció engedélyezett: konfliktus
  - engedélyezett tranzíciók közül ki kell választani egyet, aki tüzelhet
  - konfliktusfeloldás: véletlen választással

$\Rightarrow$ **Nemdeterminisztikus működés**

A tranzíció tüzelése:

- elvesz $w^-(p, t)$ darab tokent a $p \in \bullet t$ bemeneti helyekről
  - $w^-(p, t)$ a $p \rightarrow t$ él súlya
- elhelyez $w^+(t, p)$ darab tokent a $p \in t\bullet$ kimeneti helyekre
  - $w^+(t, p)$ a $t \rightarrow p$ él súlya

Nemdeterminizmus és időzítés

- Tetszés szerinti tüzelés jelentése:
  - implicit időfogalom
  - nincs időskála
  - a tüzelés a $[0, \infty)$ időintervallumban bárhol megtörténhet
- Tüzelésekhez tetszőleges konkrét időket rendelve:
  - Az azonos struktúrájú és kezdőállapotú nemdeterminisztikus időzítetlen Petri háló az időzített Petri hálónak minden lehetséges tüzelési szekvenciáját lefedi.

Speciális csomópontok

Forrás ill. nyelő csomópontok

- $t \in T$ forrás (nyelő) tranzíció:
  - Bemenő (kimenő) hely nélküli ($\bullet t = \emptyset$ illetve $t \bullet = \emptyset$)
  - Forrás tranzíció minden esetben tud tüzelni
- PN **tiszta**, ha nincsenek önhurkai, azaz
  - $\forall t \in T: \bullet t \cap t \bullet = \emptyset$

Az állapotváltozás nagysága

A tranzíció tüzelése:

- elvesz $w^{-}(p, t)$ tokent a $p \in \bullet t$ bemeneti helyekről
  - $w^{-}(p, t)$ a $p \rightarrow t$ él súlya
- kitesz $w^{+}(t, p)$ tokent a $p \in t\bullet$ kimeneti helyekre
  - $w^{+}(t, p)$ a $t \rightarrow p$ él súlya

Ha t tüzel M állapotban

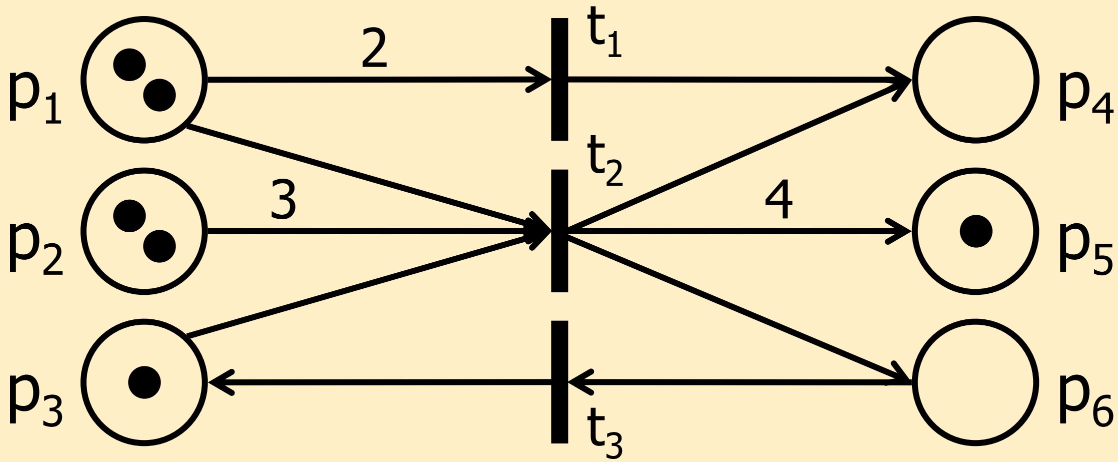
- Új állapot: $M' = M + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot e_t$
  - ahol e_t a t tranzíciónak megfelelő egységvektor

Szomszédossági mátrix

- Súlyozott szomszédossági mátrix: **W** = [w(t, p)]
- Dimenziója: $\tau \times \pi = |T| \times |P|$
- Ha t tüzel, mennyit változik a p-beli tokenszám:

$$
w(t, p) = \begin{cases} w^{+}(t, p) - w^{-}(p, t) & \text{ha } (t, p) \in E \text{ vagy } (p, t) \in E \\ 0 & \text{ha } (t, p) \notin E \text{ és } (p, t) \notin E \end{cases}
$$

Szomszédossági mátrix példa



$$W^{-} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tüzelési szekvencia

- Állapotátmeneti trajektória
  - egymást követő tüzelések hatására felvett állapotok
- Tüzelési szekvencia

$$\underline{\sigma} = \langle M_{i0}\, t_{i1}\, M_{i1} \ldots\, t_{in}\, M_{in} \rangle \rightarrow \langle t_{i1} \ldots\, t_{in} \rangle$$

- Ha az összes tranzíció kielégíti a tüzelési szabályt:
  - M_{in} állapot M_{i0}-ból elérhető a $\underline{\sigma}$ tüzelési szekvencia által:

$$M_{i0}\, [\underline{\sigma} > M_{in}$$

Kiterjesztett Petri hálók
A tüzelési szemantika módosítása

A tüzelési szemantika módosítása

- Cél: Petri hálók működési nemdeterminizmusának korlátozása
  - Kapacitás rendelése a helyekhez
  - Tiltó élek bevezetése
  - Prioritás rendelése a tranzíciókhoz

Helyek kapacitáskorlátja

- Idáig: végtelen kapacitású helyek
  - az állapotvektor komponensei tetszőleges nemnegatív egészek
  - véges erőforráskészlet természetes megjelenítése?
- Véges kapacitású Petri-háló
  - minden egyes p helyhez opcionálisan $K(p)$ kapacitás
  - az adott helyre betölthető tokenek maximális száma
- Tüzelési szabály kiegészül:

  a tranzíció egyetlen kimenő p helyre sem tölthet a hely $K(p)$ kapacitásánál több tokent

Tüzelés véges kapacitású Petri hálóban

- Egy $t \in T$ tranzíció tüzelése akkor engedélyezett, ha elegendő token van a bemeneti helyeken:

$$\forall\, p \in \bullet t : \mathrm{m}_p \geq \mathrm{w}^-(p, t)$$

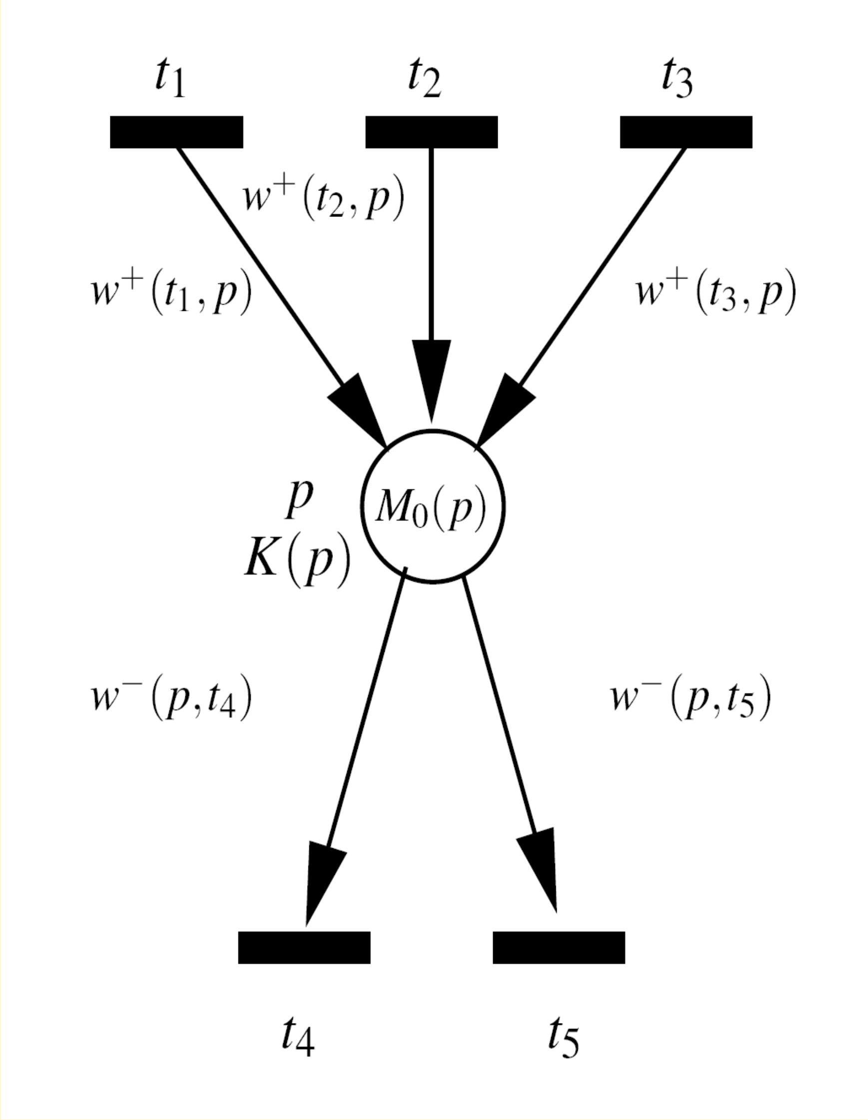
- Kapacitáskorlát ($M\,[t > \mathrm{M}'$ tüzelés után):

$$\forall\, p \in t\bullet : \mathrm{m'}_p = \mathrm{m}_p + \mathrm{w}^+(t, p) \leq K(p)$$

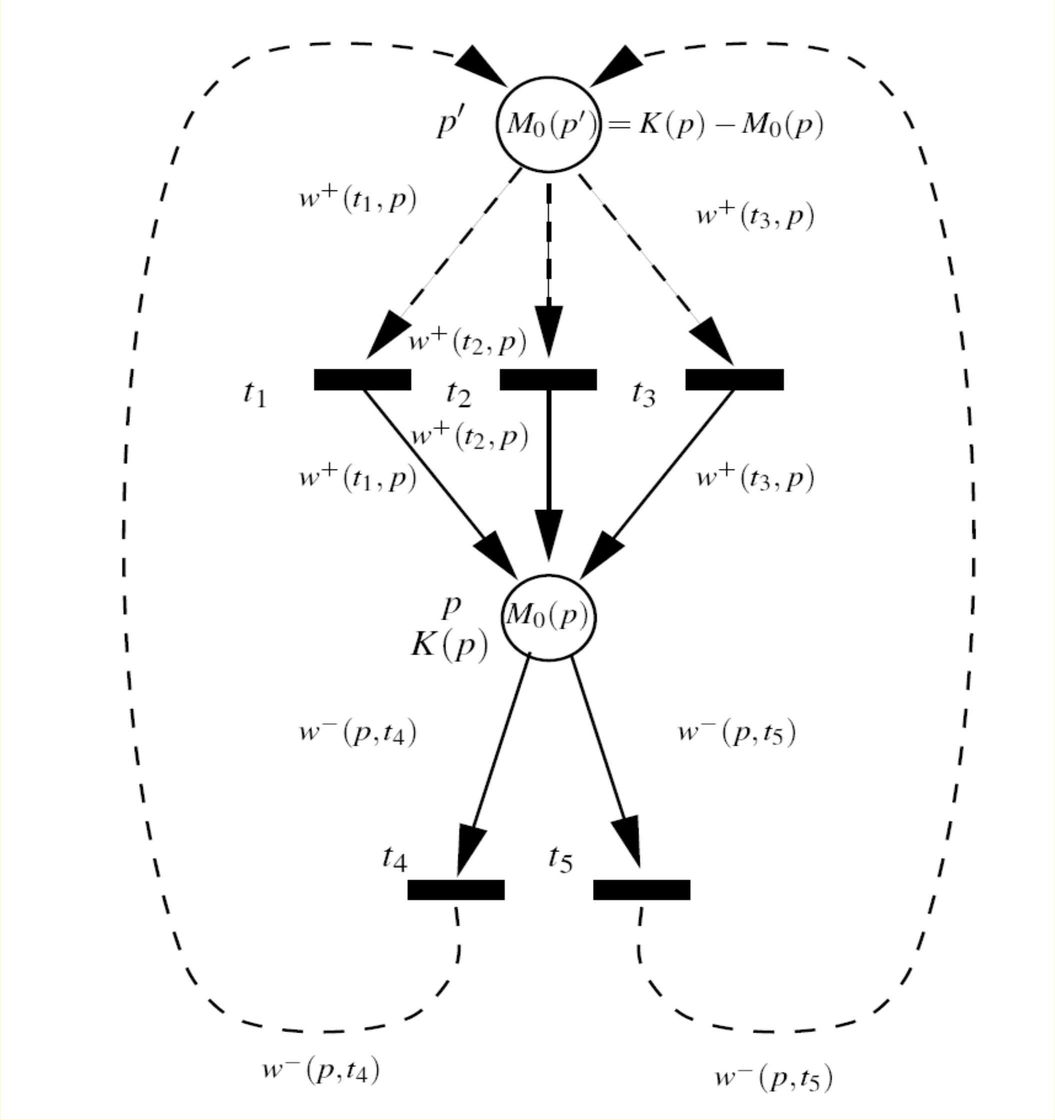
- Engedélyezett tranzíció tetszés szerint tüzelhet
- A tüzelés után:

$$\forall\, p \in P : \mathrm{m'}_p = \mathrm{m}_p + \mathrm{w}^+(t, p) - \mathrm{w}^-(p, t)$$

Korlátos kapacitású hely



Ekvivalens végtelen kapacitású háló



Kiegészítő helytranszformáció

Tiszta Petri hálók esetén a transzformáció menete:

- Minden egyes korlátos véges kapacitású p helyhez
  - rendeljünk hozzá egy járulékos p' adminisztrációs helyet
  - a p' adminisztrációs hely kezdőállapota

$$M_0(p') = K(p) - M_0(p)$$

azaz a p hely még kihasználatlan kapacitása.

Kiegészítő helytranszformáció

- A p' hely és a $t \in \bullet p \cup p\bullet$ tranzíciók között kiegészítő éleket húzunk be
- Az élek iránya attól függ, hogy t tüzelése növeli vagy csökkenti-e a p helyen levő tokenek számát:
  – A t tranzíció és p' hely között (t, p') élet húzunk be $|w(t, p)|$ súllyal, ha $w(t, p) < 0$, azaz a tüzelés elvesz tokent a p helyről
  – A p' hely és a t tranzíció között (p', t) élet húzunk be $w(t, p)$ súllyal, ha $w(t, p) > 0$, azaz a tüzelés berak tokent a p helyre

A transzformált háló ekvivalenciája

- Belátható, hogy a kiegészítő helytranszformáció az alábbi tulajdonsággal rendelkezik:
  - Ha (N, M_0) egy tiszta, véges kapacitású Petri háló, alkalmazzuk rá a szigorú tüzelési szabályt.
  - Ha (N', M'_0) a fenti transzformáció által létrehozott társhálója ennek a Petri hálónak, amelyben a gyenge tüzelési szabályt alkalmazzuk, akkor a két háló tüzelési szekvenciái azonosak.

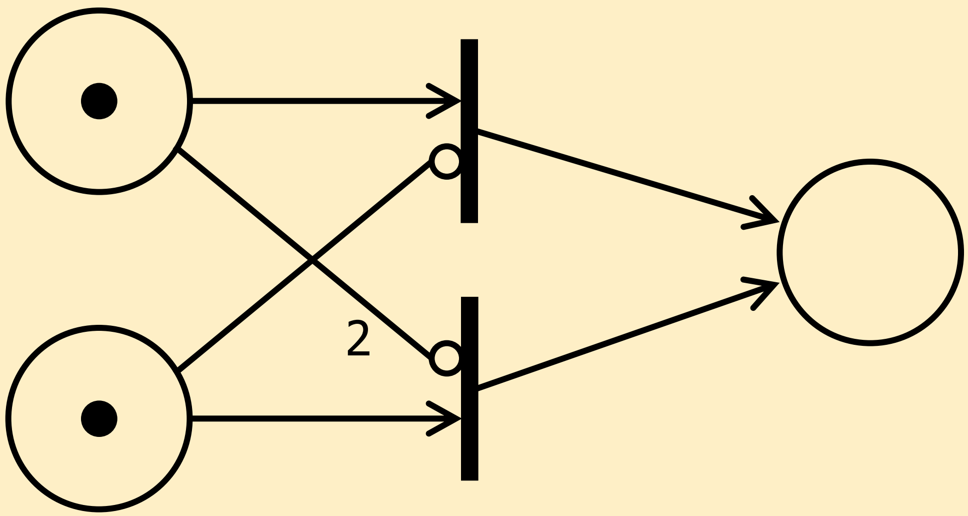
Tiltás

- Klasszikus PN:
  - ponált tüzelési feltételek
  - a bemenő helyeken a feltételek megléte?
- Tiltás:
  - egyes feltételek bekövetkeztekor a működés ne hajtódjék végre
  - tiltó él
  - (őrfeltétel: tranzíciókhoz kapcsolt logikai feltétel)

Tiltó él

- Tüzelési szabály kiegészítése:

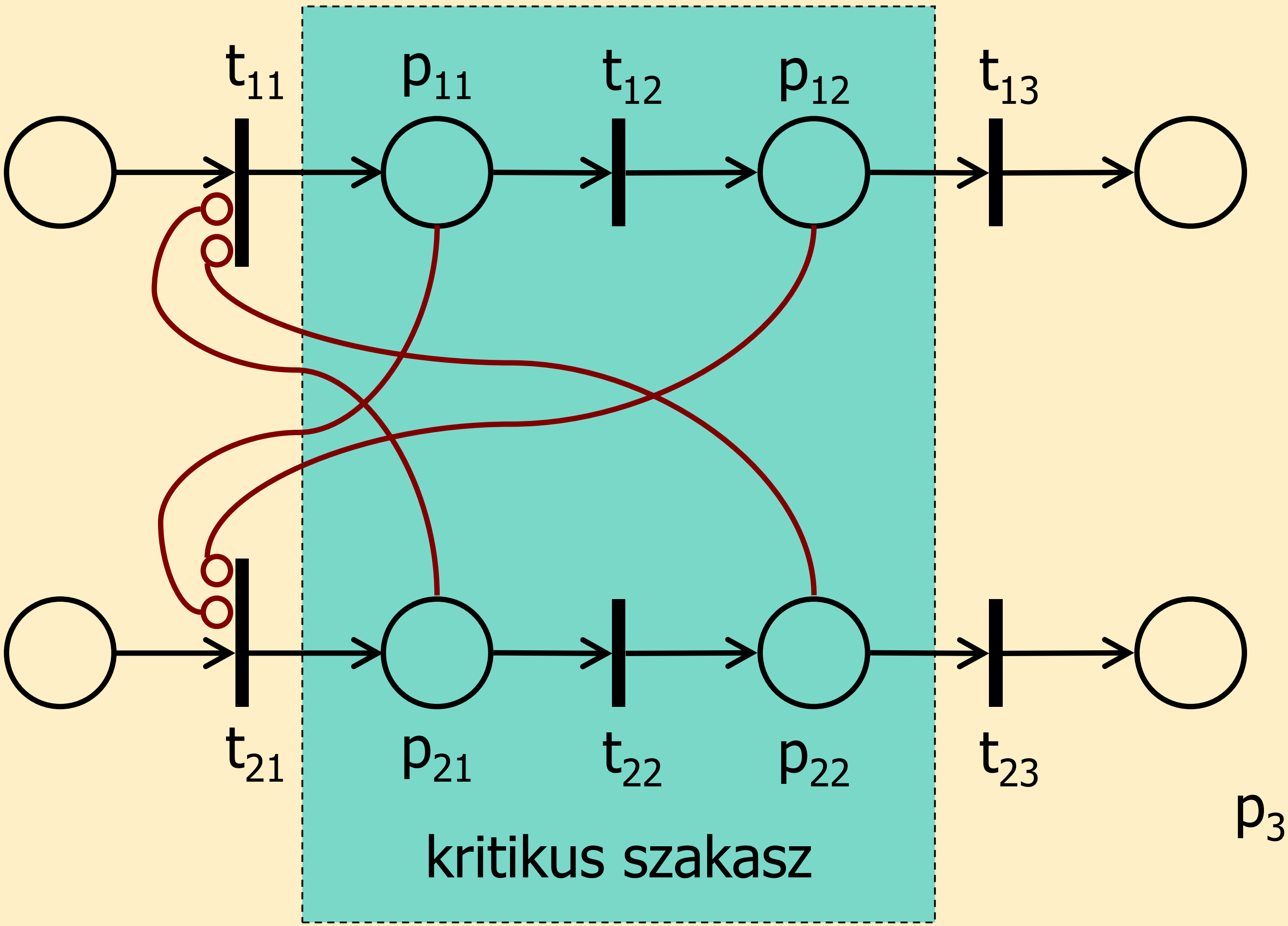
  ha a t tranzícióhoz kapcsolódó bármely (p, t) tiltó él p bemenő helyén a $w^-(p, t)$ élsúlynál nagyobb vagy egyenlő számú token van $\Rightarrow$ a tüzelés nem hajtható végre



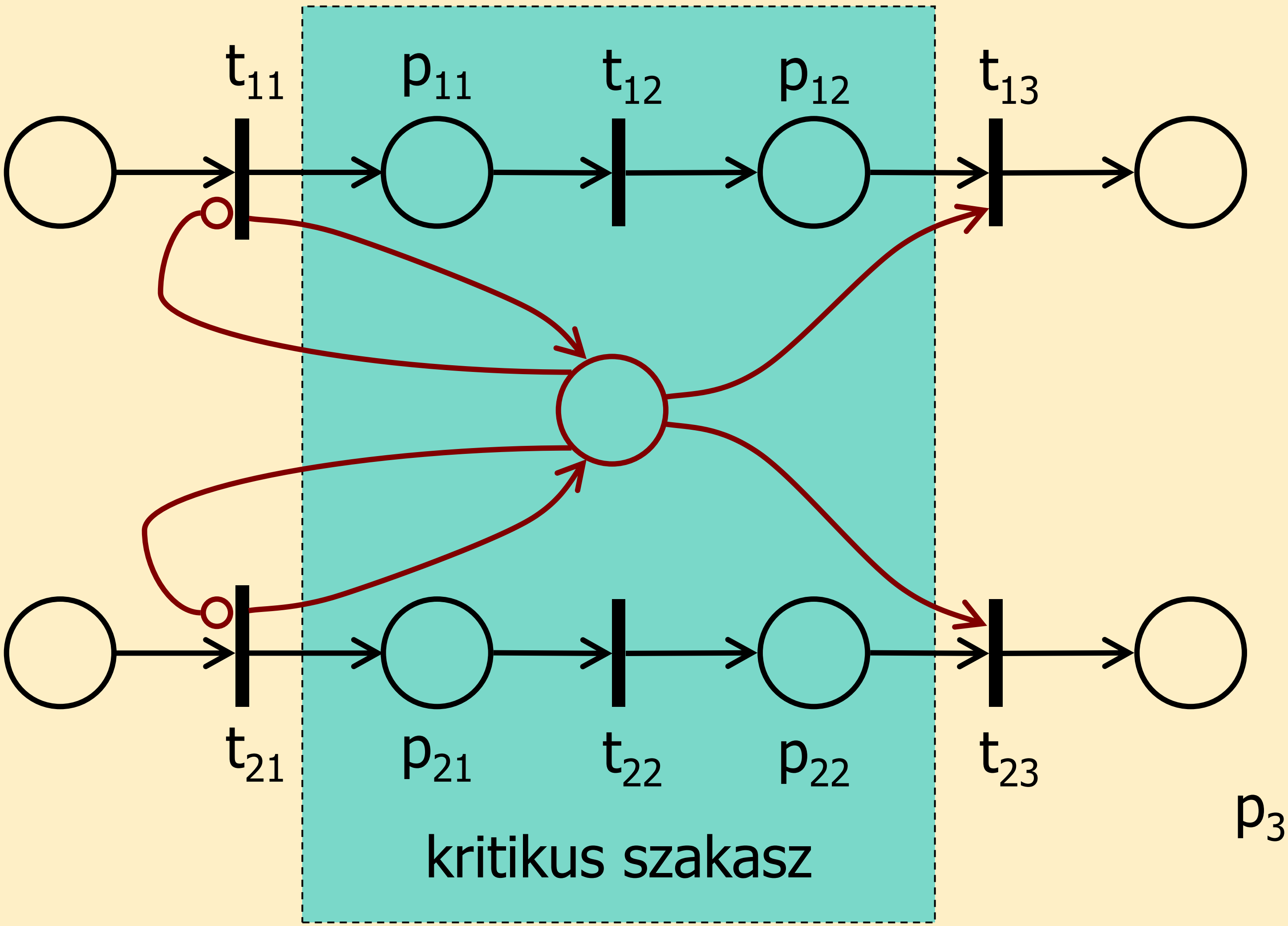
Tiltó élek használata

- Előny: a tiltó élek bevezetésével a Petri hálók a Turing gépekkel azonos kifejezőerőt nyernek
- Hátrány: számos analízis módszer tiltó éleket tartalmazó Petri hálókra nem alkalmazható

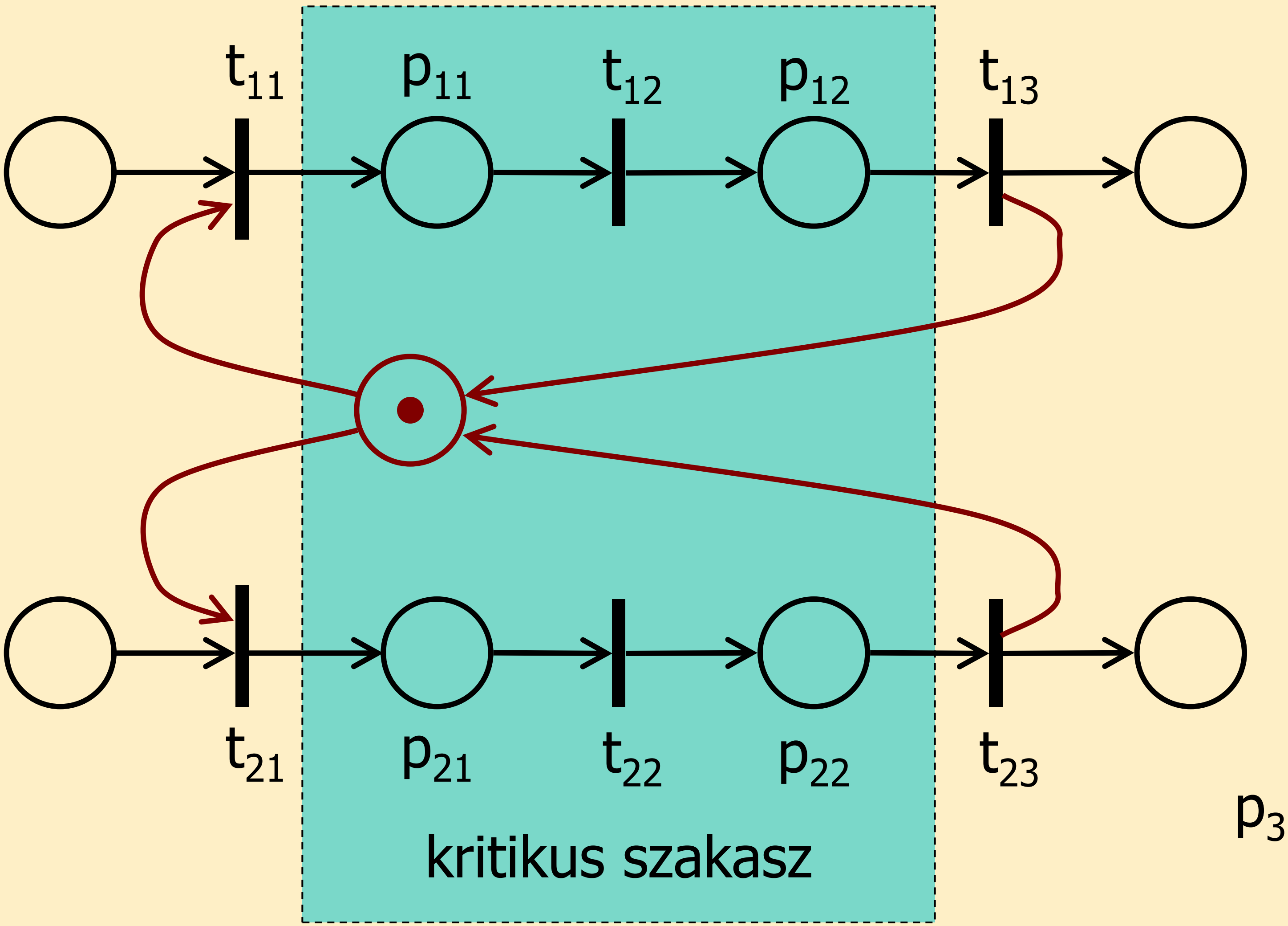
Példa tiltó él alkalmazására: kölcsönös kizárás



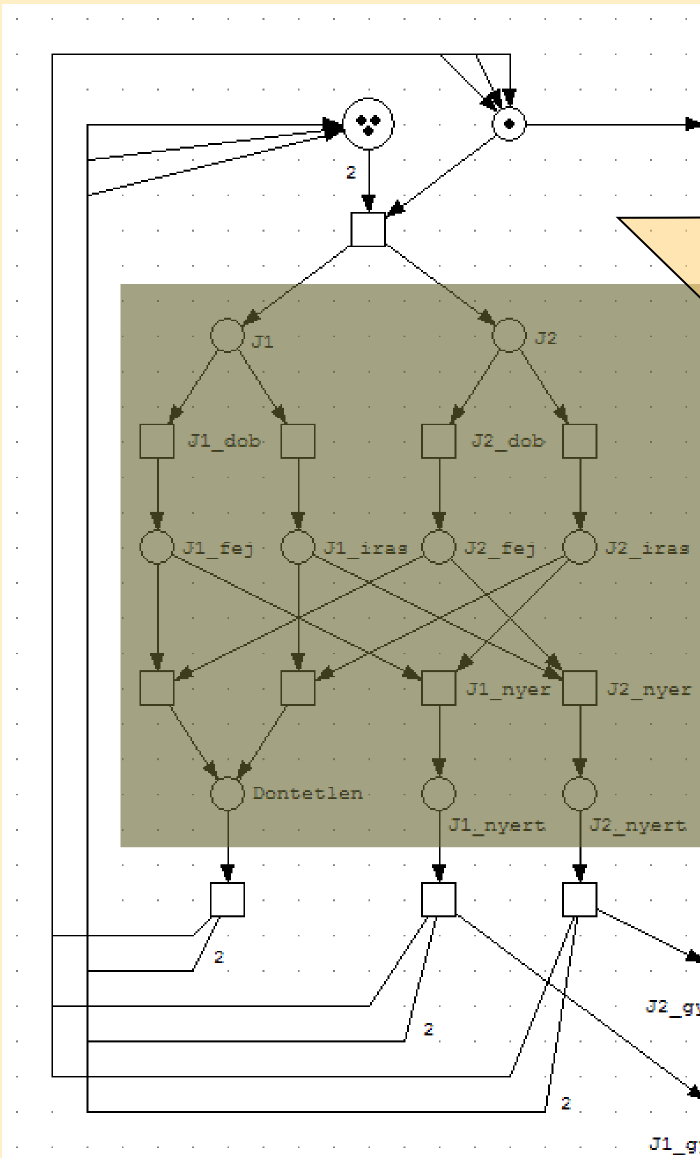
Lehet ezt elegánsabban is:



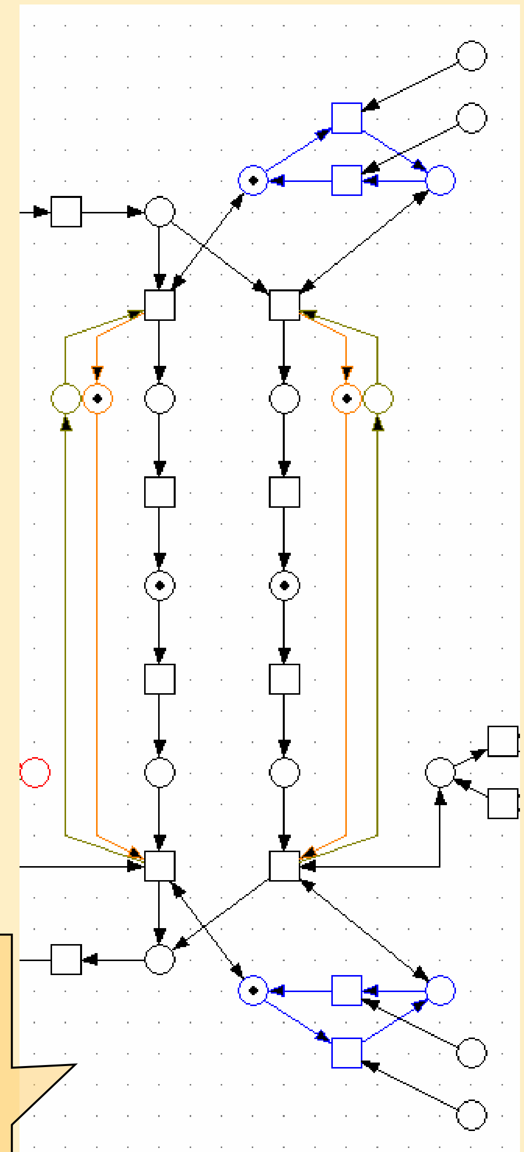
A legegyszerűbb azonban:



Egyszerű modellek: kölcsönös kizárás

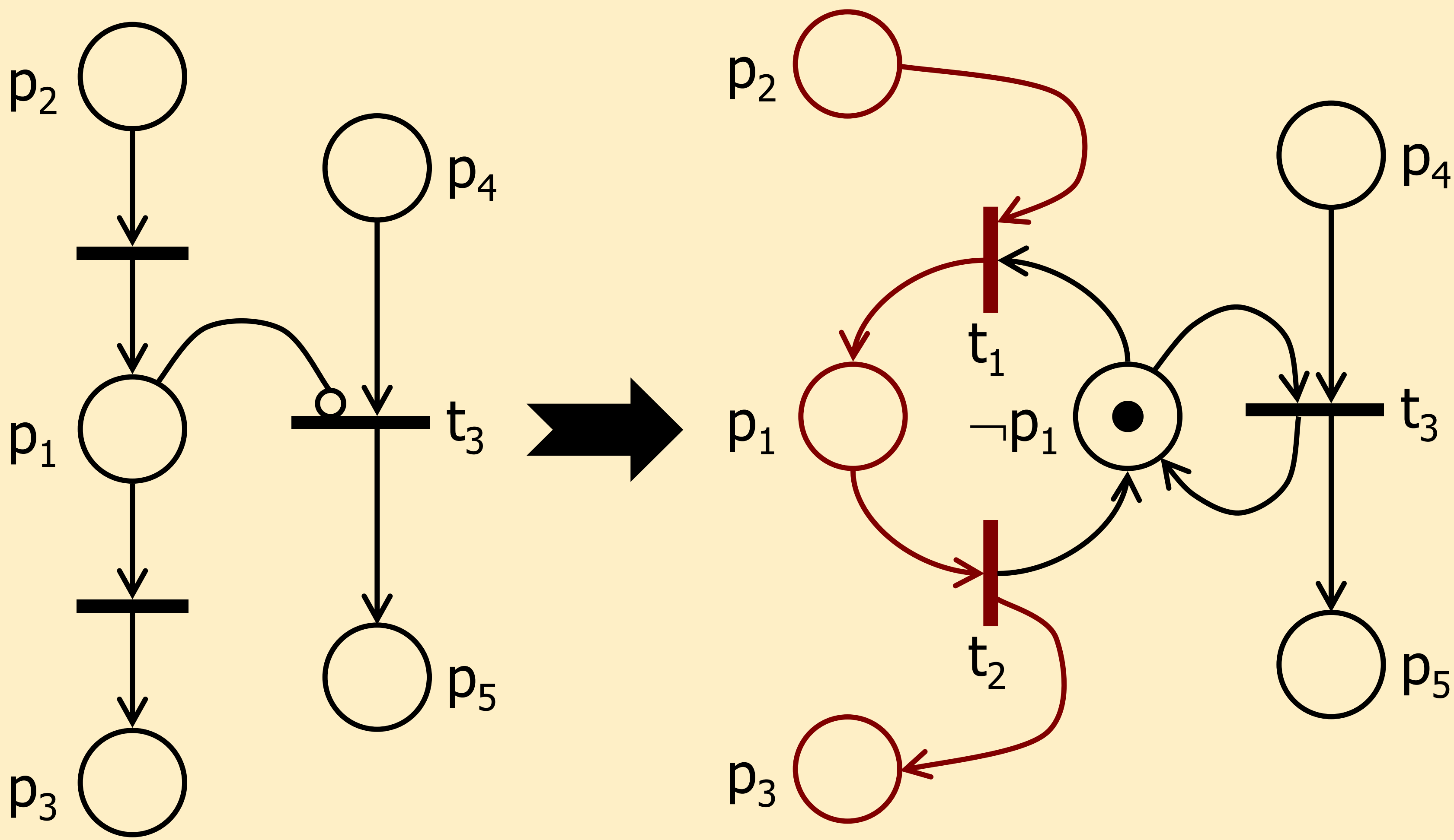


- Pénzfeldobós játék: egyszerre csak ketten játszatnak

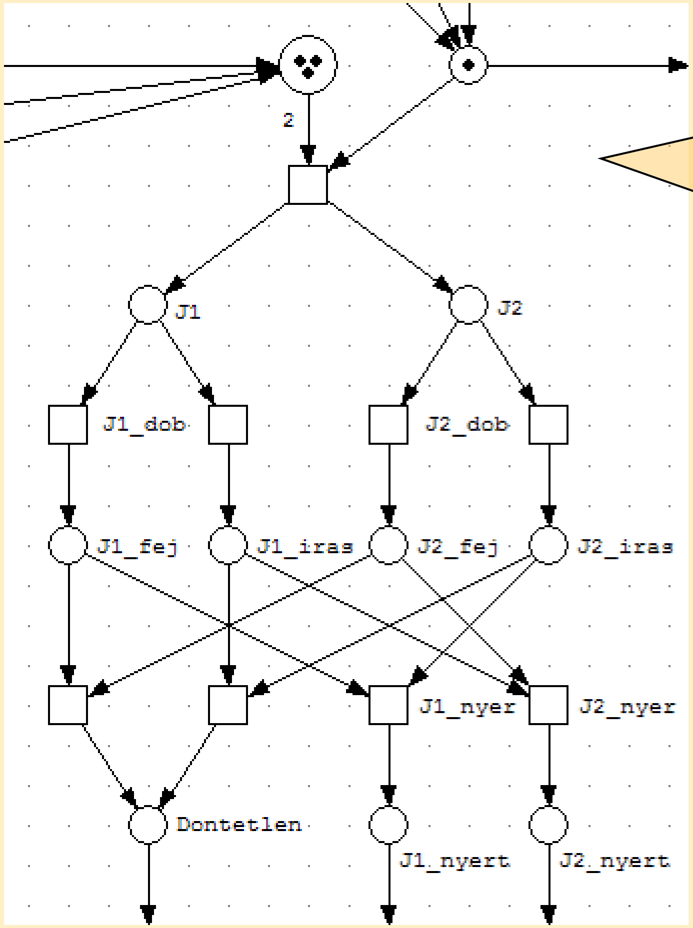


- Modellvasút szakasz érzékelő

Tiltó él kiváltása egyszerű esetben

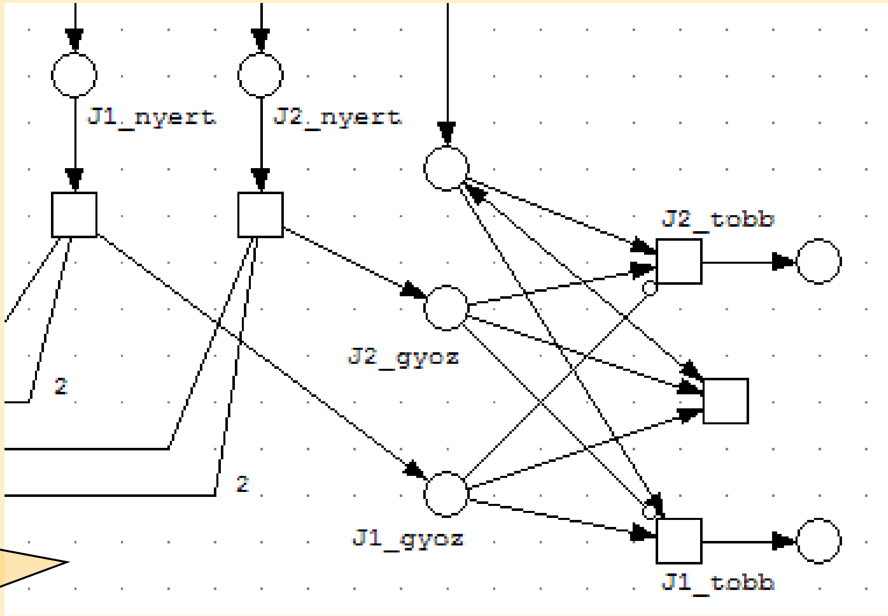


Egyszerű modellek: nemdeterminizmus



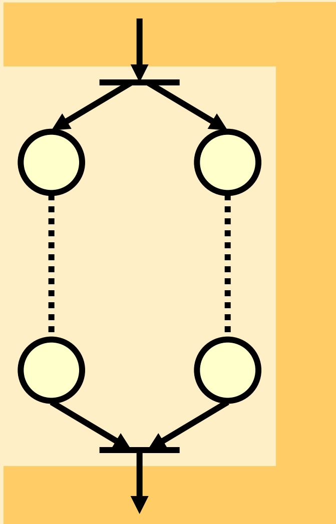
- Pénzfeldobós játék modellje. A fej nyer. Döntetlen is lehetséges.

nemdeterminizmus korlátozása

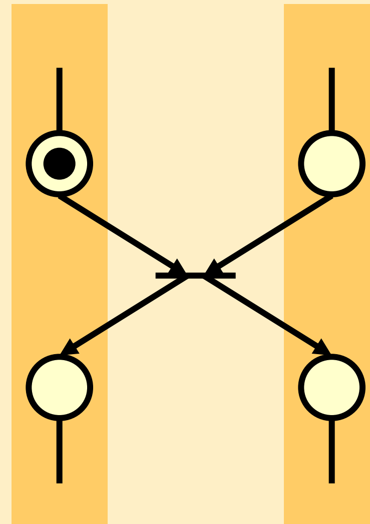


- Győztes kihirdetése

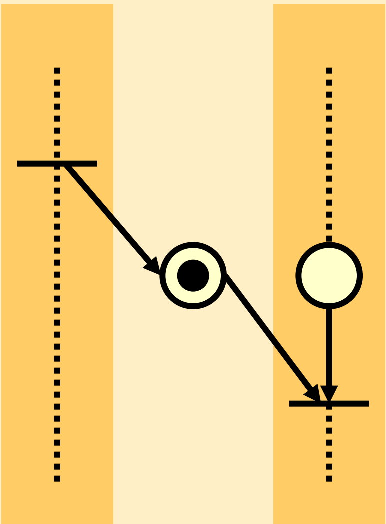
Tipikus modellkonstrukciók



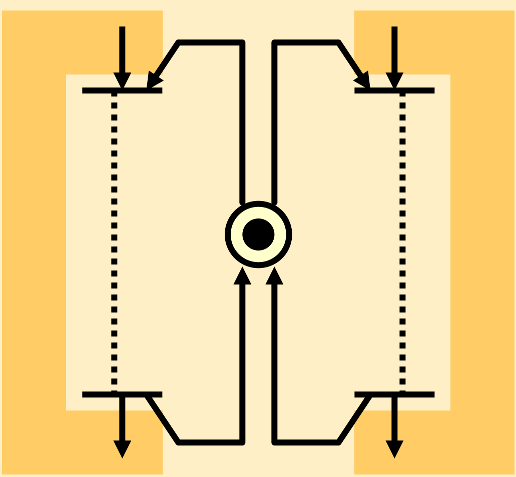
Fork-Join



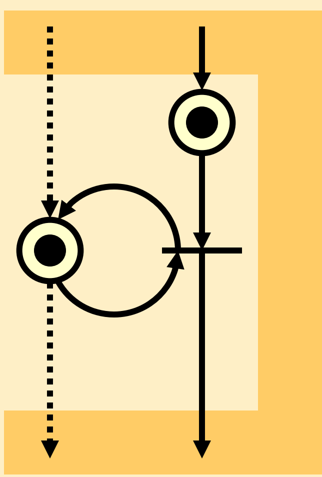
Randevú szinkronizálás



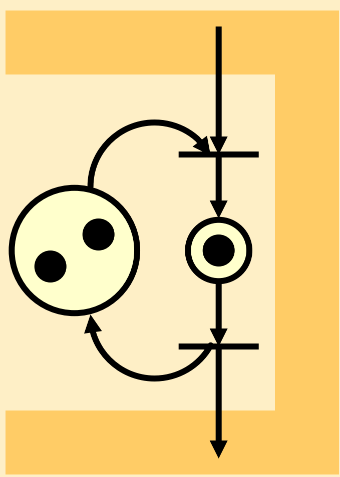
Szemafor szinkronizálás



Kölcsönös kizárás



Állapotváltozó leolvasása



Korlátos kapacitás

Prioritás

- Tranzíciókhoz rendelt prioritás
- Az engedélyezett tranzíciók közül egy alacsonyabb prioritású mindaddig nem tüzelhet, amíg van
  - engedélyezett ÉS
  - magasabb prioritású tranzíció
- Prioritási szinten belül továbbra is nemdeterminisztikus választás!

Petri hálók bővített formális definíciója

Petri háló (PN) $PN = \langle P, T, E, W, M_0 \rangle$

- Helyek $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_\pi\}$
- Tranzíciók (tüzelések) $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\tau\}$

$P \cap T = \emptyset$

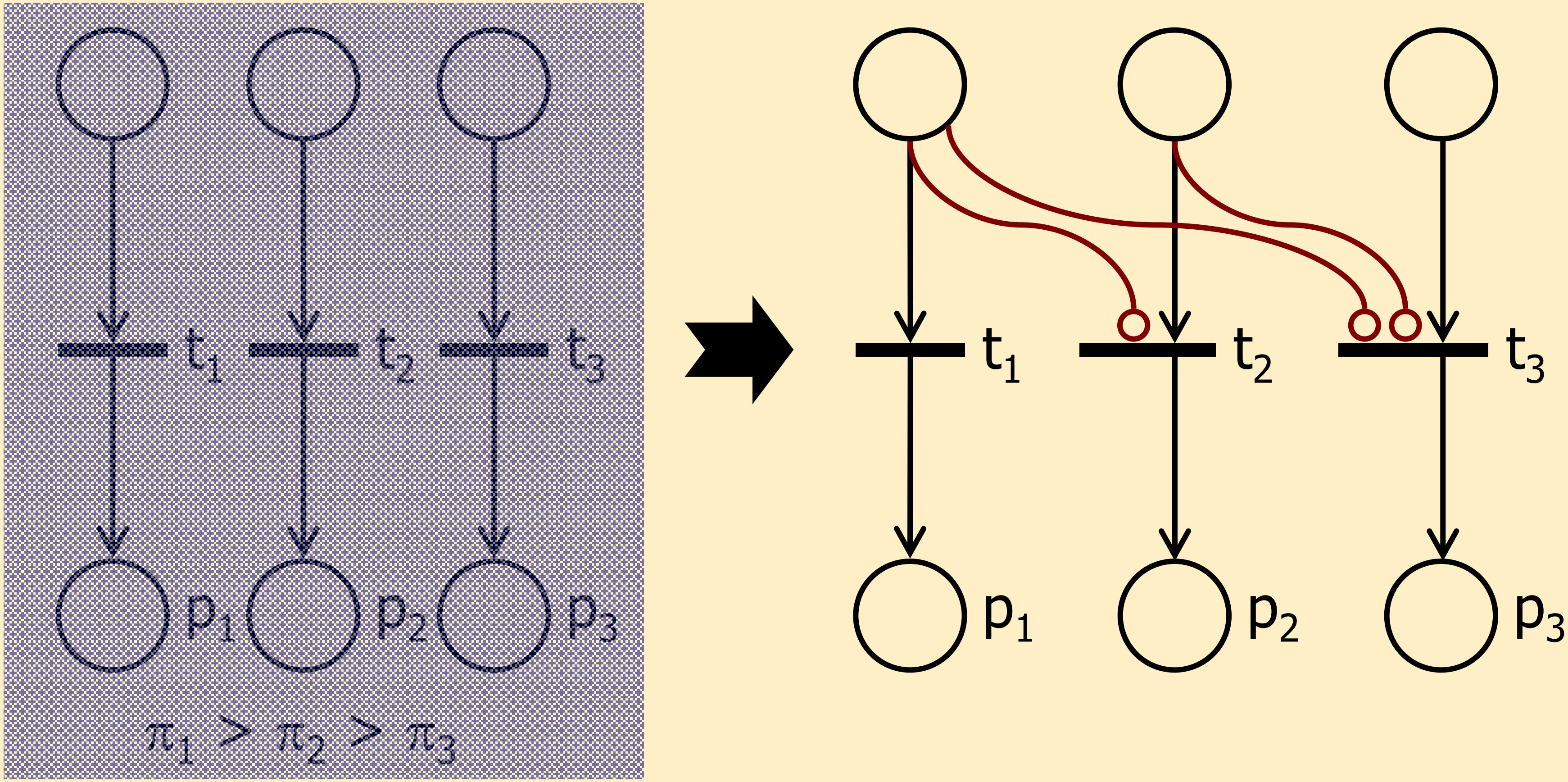
- Prioritás $\Pi : T \rightarrow \mathbf{N}$
- Élek $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Súlyfüggvény $\mathrm{w}^* : E \rightarrow \mathbf{N}^+$

PN struktúra $N = \langle P, T, E, W \rangle$

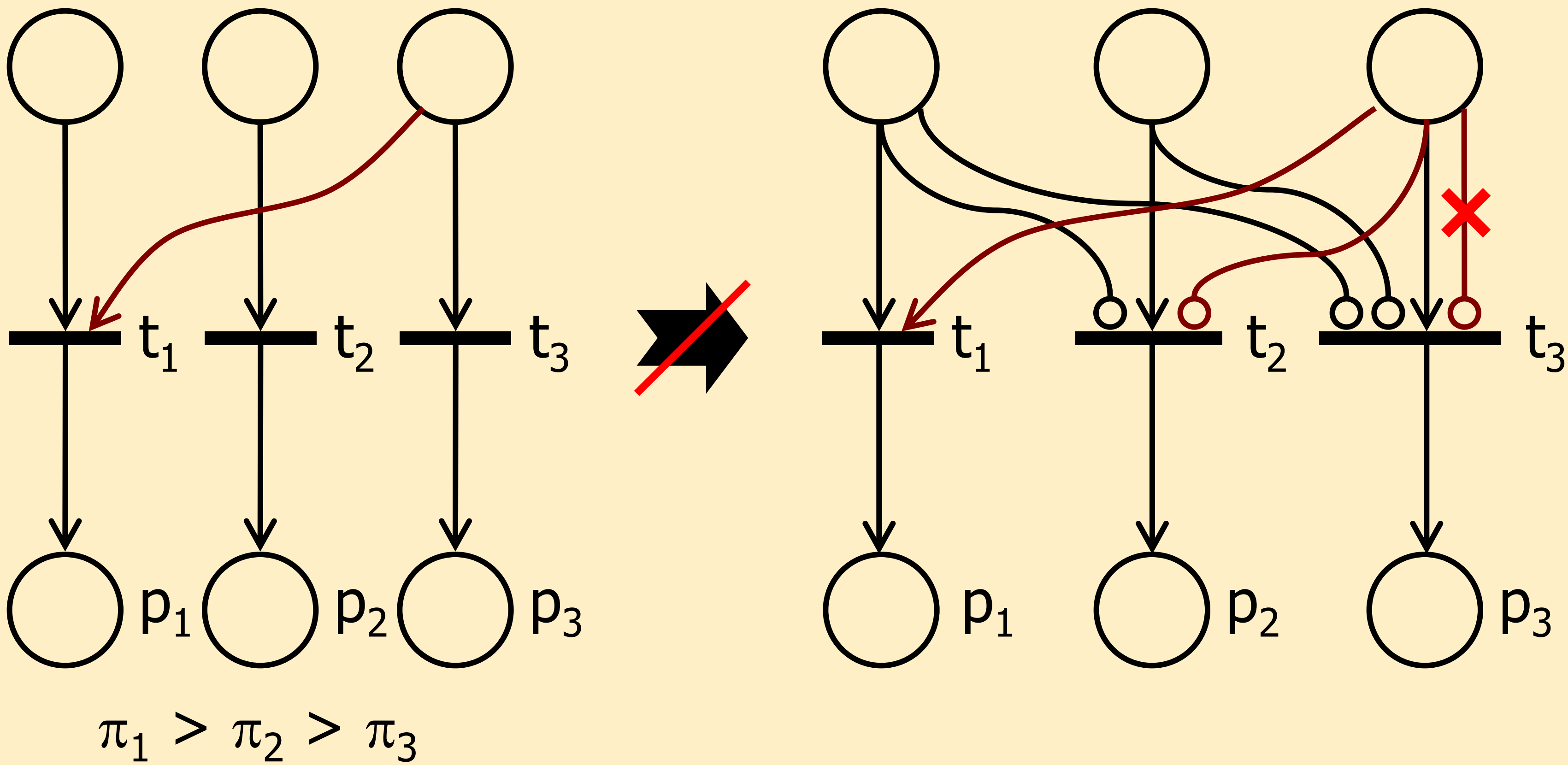
- Kezdőállapot $M_0 : P \rightarrow \mathbf{N}$

PN adott kezdőállapottal $PN = \langle N, M_0 \rangle$

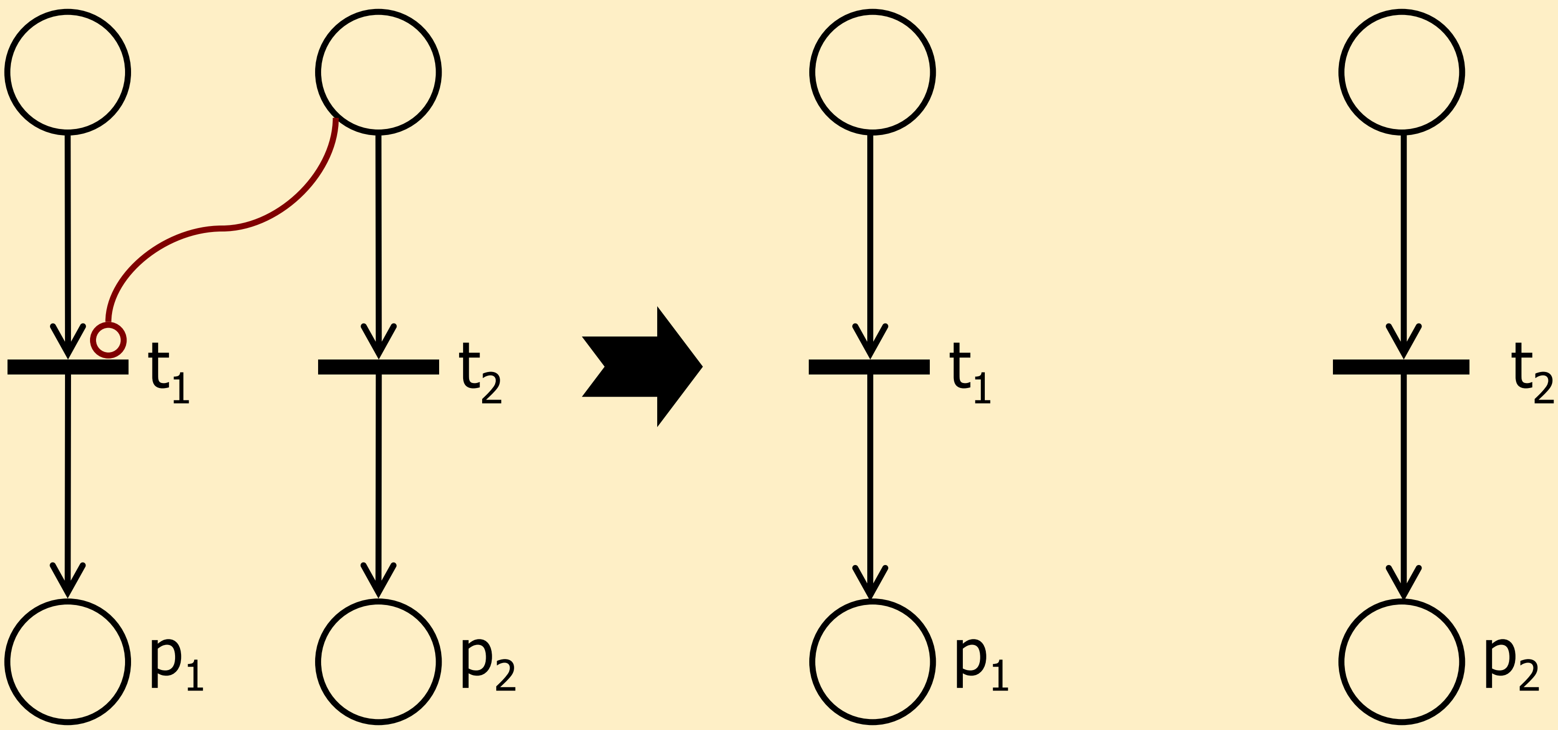
Prioritás tiltó éllel



A konstrukció nem általános érvényű

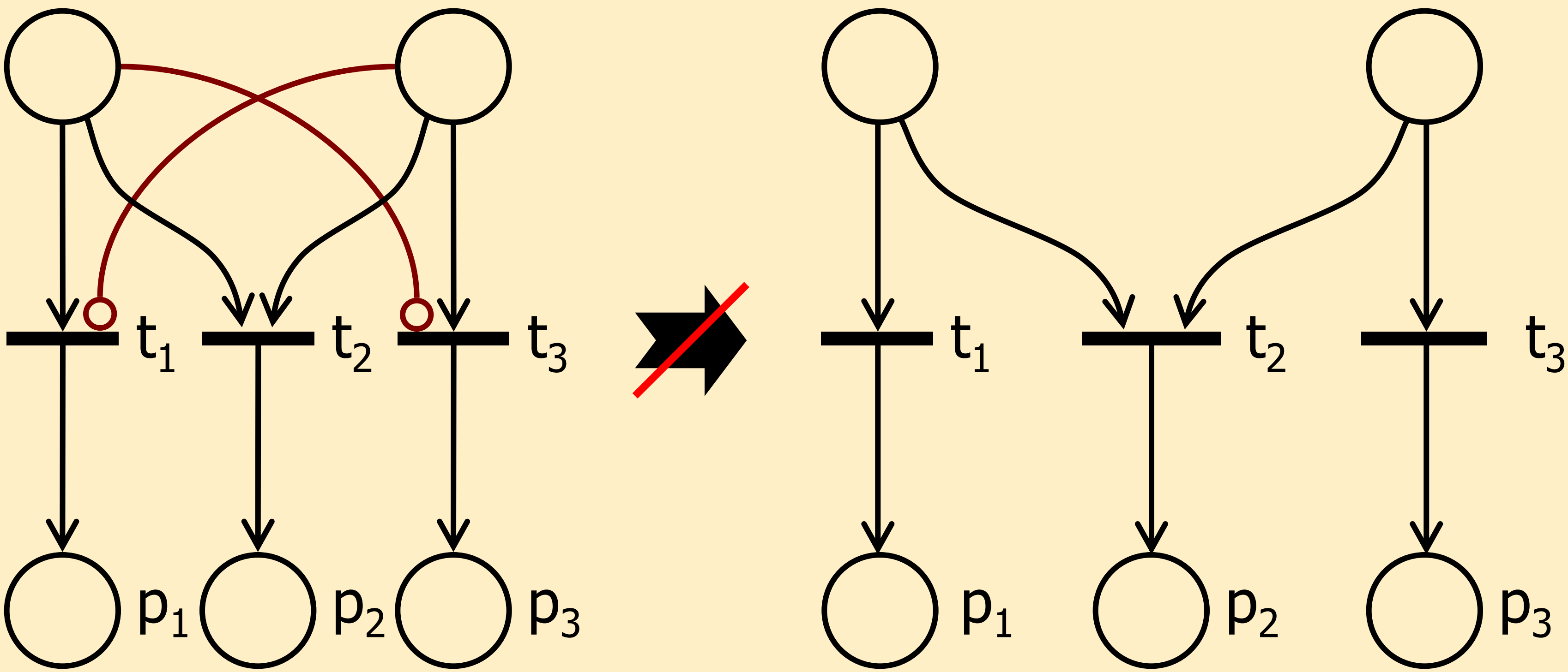


Tiltó él prioritással



$\pi_1 < \pi_2$

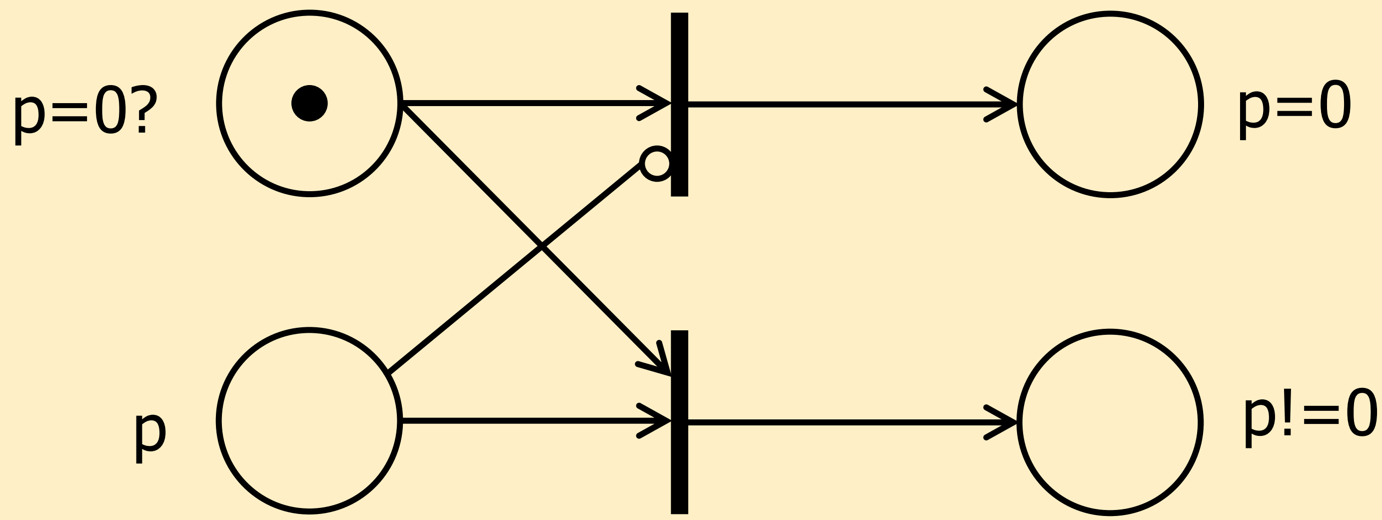
Azonban ez sem alkalmazható általánosan



$$\cancel{\pi_1 < \pi_1} \leftarrow \begin{matrix} \pi_1 < \pi_3 \\ \pi_3 < \pi_1 \end{matrix}$$

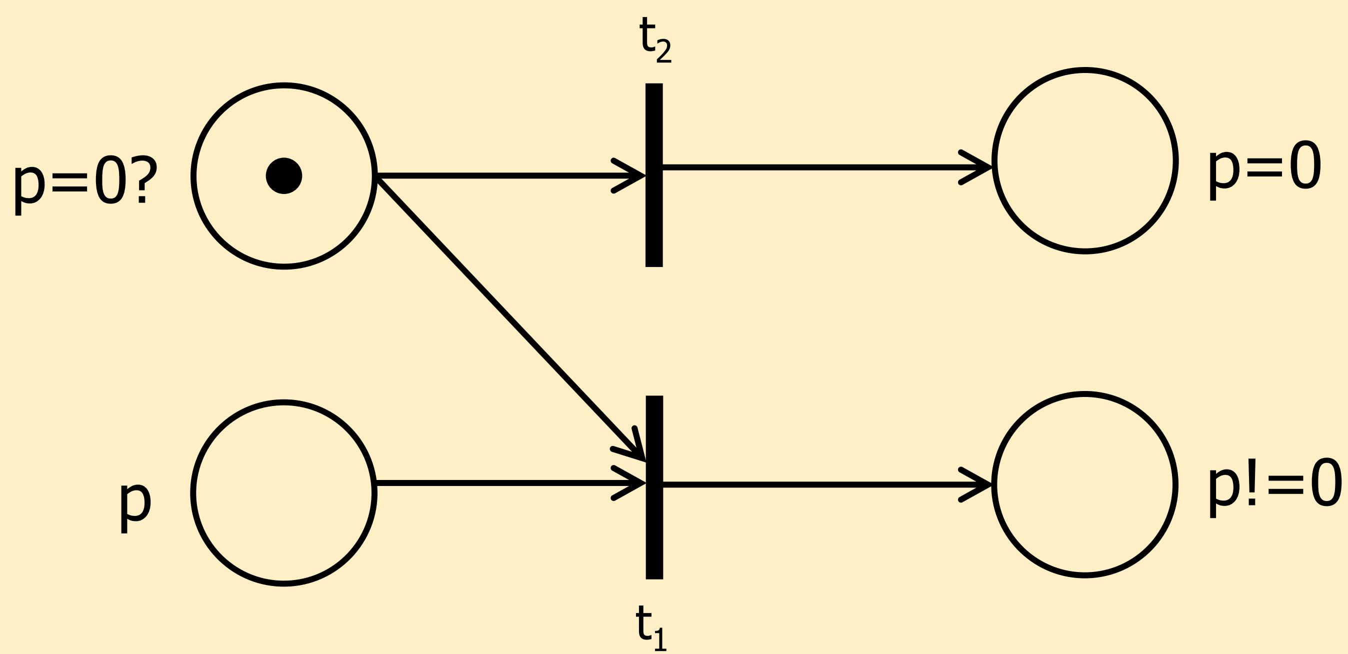
Kiterjesztések és kifejező erő

- Kapacitás korlát csak „szintaktikai édesítőszer”
- Tiltó él képes „zero testing”-re



Kiterjesztések és kifejező erő (folyt.)

- Prioritás képes „zero testing”-re
- Bizonyítható: tiltó él helyettesíthető prioritással



$$\boxed{\pi_2 < \pi_1}$$

Kifejező erő összefoglalás[P81]

- Zero testing képesség lehetővé teszi, hogy minden Turing gép szimulálható PN-el
- (Következmény: eldönthetetlen problémák…)

Turing gépek = Tiltó él + PN= Prioritás + PN

PN = Kapacitás + PN = …

[P81] J.L. Peterson, *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice-Hall, 1981.

Kiterjesztett és közönséges Petri hálók kifejezőereje

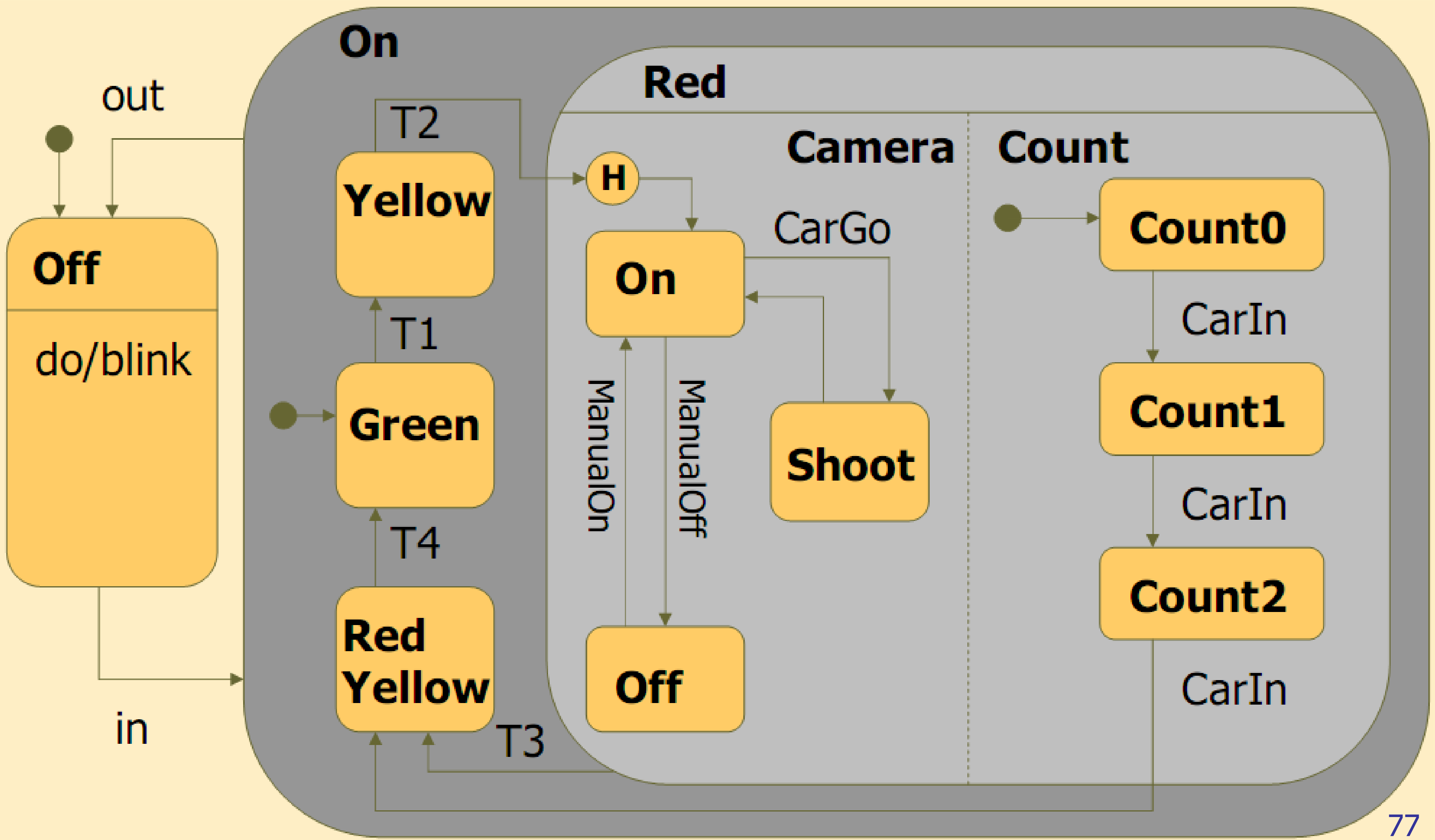
Kiterjesztés nélküli PN kifejező ereje

- Vannak olyan rendszerek, amelyek nem modellezhetőek PN-el, ha egyik kiterjesztést sem használhatjuk?
  - IGEN
- A „nem modellezhetőség” kulcsa:
  - Nem korlátos kapacitású hely esetén nem tesztelhető, hogy a helyen adott *k* számú token van-e vagy sem
  - Speciális esetként *k=0*, ami „zero testing” probléma néven ismert
    - Belátható, hogy egy megoldás a „zero testing” problémára megoldást ad az általános *k*-val paraméterezett esetre

Egyszerű példák Petri háló készítésére

Példa: közlekedési lámpa

Készítsük el az alábbi állapottérképnek „megfelelő” Petri hálót!



Közlekedési lámpa Petri háló modellje