

# Elérhetőségi analízis

## Petri hálók dinamikus tulajdonságai

dr. Bartha Tamás  
Dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

# Petri hálók vizsgálata

# Vizsgálati lehetőségek

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció
  - Állapottér bejárása
    - elérhetőségi gráf analízis
    - dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
  - Strukturális tulajdonságok
    - invariáns analízis
- ha mindez nem vezet eredményre
- Algebrai közelítés, részleges döntés
- 
- egy trajektória bejárása
- minden trajektória bejárása  
(kimerítő bejárás)
- kezdőállapottól független  
(bármely kezdőállapotra)

# Petri hálók kezdőállapot-függő analízise

- Elérhetőségi analízis

- az elérhetőségi gráf (állapottér!) konstrukciójával

- **dinamikus** (viselkedési) tulajdonságok:

- elérhetőség, fedhetőség, élőség, holtpontmentesség, korlátosság, fairség, megfordíthatóság

- **kezdőállapot-függő**

- nem általános érvényű tulajdonságok

ha az állapottér nem kezelhető



- Redukciós technikák

- **tulajdonságmegtartó** transzformációk

- a struktúra (és így az állapottér) szisztematikus csökkentése

# Petri hálók kezdőállapot-független analízise

- Kezdőállapot-független tulajdonságok
  - meghatározhatók csak a struktúra alapján
    - vagy univerzális (minden működésre érvényes)
    - vagy egzisztenciális (lehetséges ilyen működés)
  - **strukturális** tulajdonságok
    - strukturális élőség, strukturális korlátosság, vezérelhetőség, konzervativitás, ismételhetőség, konzisztencia
- Invariáns tulajdonságok
  - tüzelési (T-, transition) invariáns
    - lehetséges olyan működés, hogy az állapot újra előálljon
  - hely (P-, place) invariáns
    - minden állapotban igaz és állandó
    - súlyozott tokenösszeg  $\Rightarrow$  dinamikus egyensúly

# Elérhetőség fogalma, tulajdonságai

## Elérhetőségi analízis

# Elérhetőség

## Elérhetőségi analízis

- Kezdőállapotfüggő dinamikus viselkedés
  - Jelölés (marking) = állapot
  - Tokeneloszlás = állapotváltozó
  - Tüzelés = állapotátmenet
  - Tüzelési sorozatok hatására  $M_0, M_1, \dots, M_n$  állapotsorozat
- Állapotsorozat: trajektória az állapottérben
- $M_n$  állapot *elérhető* az  $M_0$  kiinduló állapotból, ha

$$\exists \vec{\sigma} : M_0 [\vec{\sigma} > M_n]$$

- Elérhetőségi gráf: állapottér grafikus képe

# Elérhetőségi analízis

Az  $M_0$  kiinduló állapotból az  $N$  Petri hálóban

– Elérhető állapotok

$$R(N, M_0) = \{M \mid \exists \vec{\sigma} : M_0 [\vec{\sigma} > M]\}$$

- Állapot bázisú kérdések

– Végrehajtható tüzelési sorozatok

$$L(N, M_0) = \{\exists \vec{\sigma} \mid M : M_0 [\vec{\sigma} > M]\}$$

- Állapotátmenet (esemény) bázisú kérdések



# Elérhetőségi probléma

Petri hálók elérhetőségi problémája:

- $M_n$  állapot elérhető-e valamilyen  $M_0$  kiinduló állapotból

$$M_n \stackrel{?}{\in} R(N, M_0)$$

Rész-tokeneloszlási probléma:

- helyek egy  $P' \subset P$  részhalmazára korlátozva elérhető-e  $M_n$  állapot az adott helyekre megadott tokeneloszlással

$$\stackrel{?}{\exists} M \in R(N, M_0) \wedge \forall p \in P' : M(p) = M_n(p)$$

# Elérhetőségi probléma megoldhatósága

- Az elérhetőségi probléma eldönthető
  - de exponenciális (hely) komplexitású általános esetben
- Míg az egyenlőségi probléma eldönthetősége általános esetben bizonyítottan **nem lehetséges**
  - feladat: két Petri háló  $(N, N')$  lehetséges tüzelési sorozatainak azonosságának eldöntése

$$L(N, M_0) \stackrel{?}{=} L(N', M'_0)$$

- 1-korlátos (biztos) Petri hálók esetén exponenciális
  - processz algebra, biszimuláció

# Petri hálók dinamikus (viselkedési) tulajdonságai

# Dinamikus tulajdonságok

- Elérhetőséggel kapcsolatos tulajdonságok
  - Függenek a kiinduló állapottól (kezdő jelöléstől)
    - ⇒ **strukturális** tulajdonságok: kiinduló állapottól függetlenek
  - Nem csak elérhetőségi analízissel határozhatók meg
- Dinamikus tulajdonságok:
  - Korlátosság
  - Élő tulajdonság
    - Holtpontmentesség
  - Megfordíthatóság
  - Visszatérő állapot
  - Fedhetőség
  - Perzisztencia
  - Fair tulajdonság
    - Korlátozott fairség
    - Globális fairség

# Dinamikus tulajdonságok: végesség

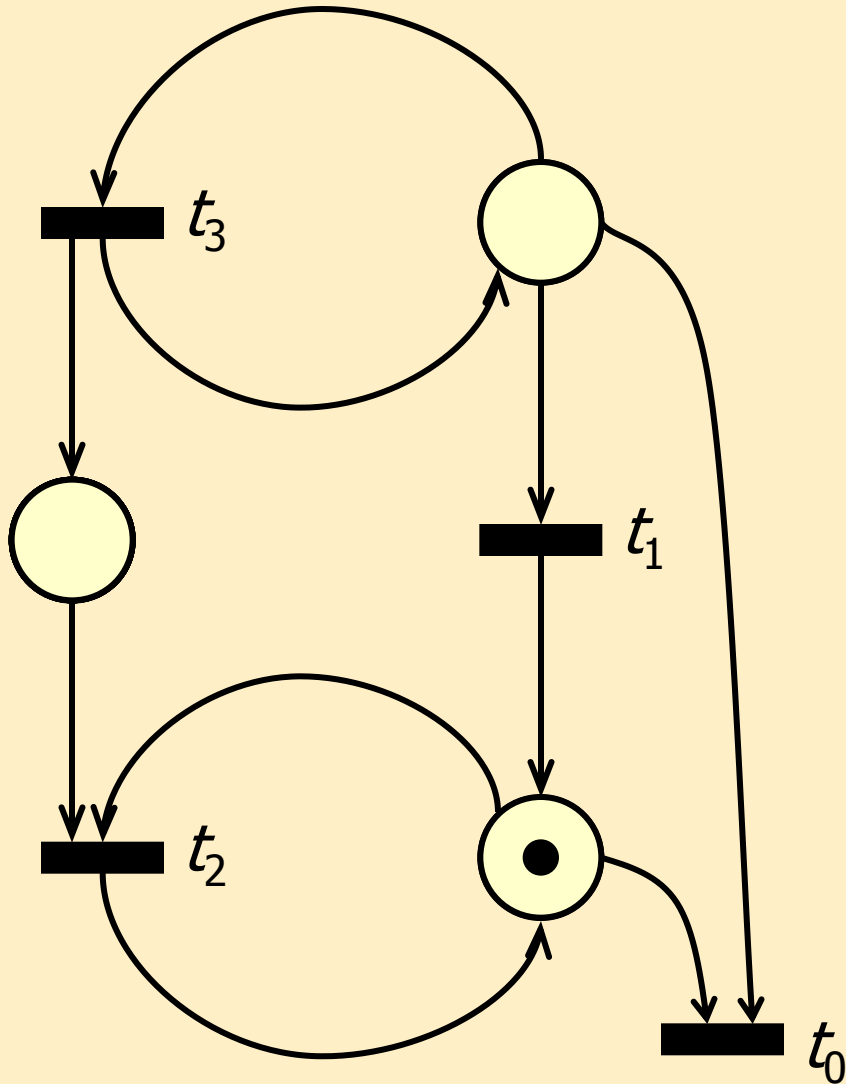
- $k$ -korlátosság (korlátosság)
  - bármely állapotban minden helyen helyenként maximum  $k$  token lehet ( $M_0$  kiinduló állapot függő!)
    - Biztos Petri háló: korlátosság speciális esete ( $k = 1$ )
  - végesség kifejezése
    - korlátosság  $\Leftrightarrow$  véges állapottér
  - erőforrás használat, illetve általános értelemben vett feladatkezelés modellezése
    - (részben) konzervativitás  $\stackrel{?}{\Rightarrow}$  korlátosság
  - a rendszerben a feladatok elvégzése garantált-e?

# Dinamikus tulajdonságok: élőség

- Holtpont (deadlock) -mentesség
  - Minden állapotban legalább egy tranzíció tüzelhető
- Élő tulajdonság
  - Tranzíció egyszer/többször/végtelenszer tüzelhet-e?
  - Gyenge élő tulajdonságok egy  $t$  tranzícióra:
    - $L_0$ -élő (halott):  $t$  sohasem tüzelhető egyetlen
    - $L_1$ -élő:  $t$  legalább egyszer tüzelhető valamely
    - $L_2$ -élő: bármely véges  $k > 1$  egészre  $t$  legalább  $k$ -szor tüzelhető valamely
    - $L_3$ -élő:  $t$  végtelen sokszor tüzelhető valamely
- $L_4$ -élő:  $t$   $L_1$ -élő bármely  $M_n \in R(N, M_0)$  állapotban

}  $\vec{\sigma} \in L(N, M_0)$   
állapot-  
trajektóriában

# Élő tulajdonság: példa



- $t_0$  tranzíció:  $L_0$ -élő (halott)
- $t_1$  tranzíció:  $L_1$ -élő
- $t_2$  tranzíció:  $L_2$ -élő
- $t_3$  tranzíció:  $L_3$ -élő



# Dinamikus tulajdonságok: élőség (folyt.)

- Egy  $(P, T, M_0)$  Petri háló  $L_x$ -élő
  - ha minden  $t \in T$  tranzíció  $L_x$ -élő
  - $L_4$ -től  $L_1$ -ig az élő tulajdonságok tartalmazzák egymást
- Egy  $(P, T, M_0)$  Petri háló élő
  - ha  $L_4$ -élő, azaz minden  $t \in T$  tranzíció  $L_4$ -élő
  - Bejárési úttól függetlenül garantáltan holtpontmentes
    - köztes állapottól függetlenül minden tranzíció újra tüzelhető
    - holtpontmentesség  $\leftarrow$  élőség
  - Bizonyítása költséges lehet
    - szerencsés esetben nem (invariánsok!)
    - ideális rendszert tételez fel



# Dinamikus tulajdonságok: ciklikusság

- Megfordíthatóság

- A kezdőállapot bármely követő állapotból elérhető

$$\forall M \in R(N, M_0) \Rightarrow M_0 \in R'(N, M)$$

- Gyakran ciklikus működésű hálózat

- Visszatérő állapot

- Van olyan, a kezdőállapotból elérhető állapot, amely bármely öt követő állapotból elérhető

$$\exists M_n \in R(N, M_0) : \forall M \in R'(N, M_n) \Rightarrow M_n \in R''(N, M)$$

- Gyakran ciklikus (rész)hálózat inicializáló szekvenciával

# Dinamikus tulajdonságok: ciklikusság (folyt.)

- Fedhetőség

- Létrejön-e korábbi működést magában foglaló állapot?

- $M'$  állapot fedi  $M$  állapotot, ha  $M' \in R(N, M_0) \wedge M' \geq M$

- $M$  állapot fedhető  $M'$  állapottal

- $M' \geq M$  jelentése:  $\forall p \in P : m'(p) \geq m(p)$

- gyenge fedhetőség esetén az azonos állapot is fed, ha elérhető

- erős fedhetőség:  $\exists p \in P : m''(p) > m(p)$

- $\mu$  a  $t$  tranzíciót engedélyező minimális tokeneloszlás

- $t$  akkor és csak akkor nem  $L_1$ -élő, ha  $\mu$  nem fedhető le

- gyenge fedhetőség elég

- fordítva:  $\mu$  lefedhetősége garantálja  $t$   $L_1$ -élő voltát

# Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás

- Perzisztencia
  - Két tetszőleges engedélyezett tranzíció közül **egyik tüzelése sem tiltja le** a másik engedélyzettségét
    - engedélyezett tranzíció engedélyezve marad tüzelésig!
  - Rendszerbeli funkcionális dekompozíció megmarad-e?
  - Párhuzamos működések befolyásolják-e egymást?
- Egy  $(P, T, M_0)$  Petri háló perzisztens, ha
  - bármely két  $t_1, t_2 \in T$  tranzíciója az összes lehetséges tüzelési szekvenciában **perzisztens**

# Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás (folyt.)

- Fair tulajdonság
  - Párhuzamos folyamatok nem tartják-e fel egymást?
  - Valamennyi folyamat végbemegy-e (előbb-utóbb)?
- Nem egységes a **fairség** definíciója
  - Korlátozott fairség (B-fairség)
  - Globális fairség (korlátlan fairség)
- Egy tüzelési szekvencia **korlátozottan fair** (B-fair)
  - ha bármely tranzíció maximum **korlátos sokszor tüzelhet** anélkül, hogy egy másik tranzíció tüzelne
- Egy  $(P, T, M_0)$  Petri háló **korlátozottan fair** (B-fair)
  - ha minden  $t \in T$  tranzíció az összes lehetséges tüzelési szekvenciában **korlátozottan fair** (B-fair)

# Dinamikus tulajdonságok: kölcsönhatás (folyt.)

- Globális fairség

- Egy tüzelési szekvencia globálisan fair, ha
  - véges, vagy
  - az összes tranzíció végtelen sokszor szerepel benne
- Egy  $(P, T, M_0)$  Petri háló globálisan (korlátlanul) fair
  - ha a háló összes lehetséges tüzelési szekvenciája globálisan (korlátlanul) fair

Állapottér reprezentációk:  
az elérhetőségi és fedési gráf

# Állapottér reprezentációk: elérhetőségi gráf

- Elérhetőségi gráf
  - $M_0$  kezdőállapotból induló állapotgráf
    - csomópontok: állapotok  $\rightarrow$  címkézés: tokeneloszlások
    - állapotátmenetek: irányított élek  $\rightarrow$  címkézés: tüzelések
    - legfeljebb annyi új csomópont, ahány engedélyezett tranzíció
      - kevesebb, ha prioritásos a Petri háló
    - csomópont, amiből nem indul ki él: **holtpont**
  - Nem korlátos a Petri háló  $\rightarrow$  végtelen sok állapot
    - korlátosság  $\Leftrightarrow$  véges állapottér
  - Szélességi típusú bejárás az állapotból tüzelések mentén
    - mélységi bejárás nem korlátos állapottérben rossz ötlet...
    - viszont a részleges sorrendezési redukció mélységi kereséssel

# Állapottér reprezentációk: fedési gráf

- Petri háló mérete/bonyolultsága és az állapottér mérete közti korreláció?
  - pl. megállási probléma
- Végeesség hiányát kezelni kell
- **Fedési gráf:** végtelen állapottér esetére is
  - Hasonló felépítés:  $M_0$  kezdőállapot, élek: tüzelések
  - Kritikus részek: token „túlszaporodás”
    - trajektória:  $M_0 \dots M'' \dots M, M'$  és  $M'' \leq M' \rightarrow$  **fedett állapotok!**
    - $p \in P : m'(p) > m''(p) \rightarrow$  fedett helyek (erős fedhetőség)
    - fedett helyekre speciális szimbólum:  $\omega$  a végtelenség kifejezője



# Fedési fa generáló algoritmus

$L_{\text{vizsgálandó}} \leftarrow \{ M_0 \}$

MAIN: **if**  $L_{\text{vizsgálandó}} \neq \emptyset$

A következő  $M \in L_{\text{vizsgálandó}}$  állapot kiválasztása

**if**  $M$  a gyökértől idáig vezető úton már szerepelt

**then**  $M$ -et „régi állapotként” jelöljük

**goto** MAIN // ciklus

**if**  $M$ -ben nincs engedélyezett tüzelés

**then**  $M$ -et „végállapotként” (halott állapot) jelöljük

**goto** MAIN // ciklus

# Fedési fa generáló algoritmus (folyt.)

**else** // (van  $M$ -ben engedélyezett tranzíció)

**for all**  $t$  engedélyezett tranzícióra:

Az  $M'$  rákövetkező állapot meghatározása:  $M [\vec{e}_t > M'$

**if** létezik az  $M_0$ -tól  $M$ -ig vezető úton olyan  $M''$ , amelyet  $M'$  fed

$$M' \neq M'' \wedge \forall p \in P : m'(p) \geq m''(p) \wedge \exists p \in P : m'(p) > m''(p)$$

**then**  $M''$  fedett állapot:

az  $M'$  állapotot jelölő tokeneloszlásban

a **fedett helyek jelöléseit**  $\omega$ -val helyettesítjük

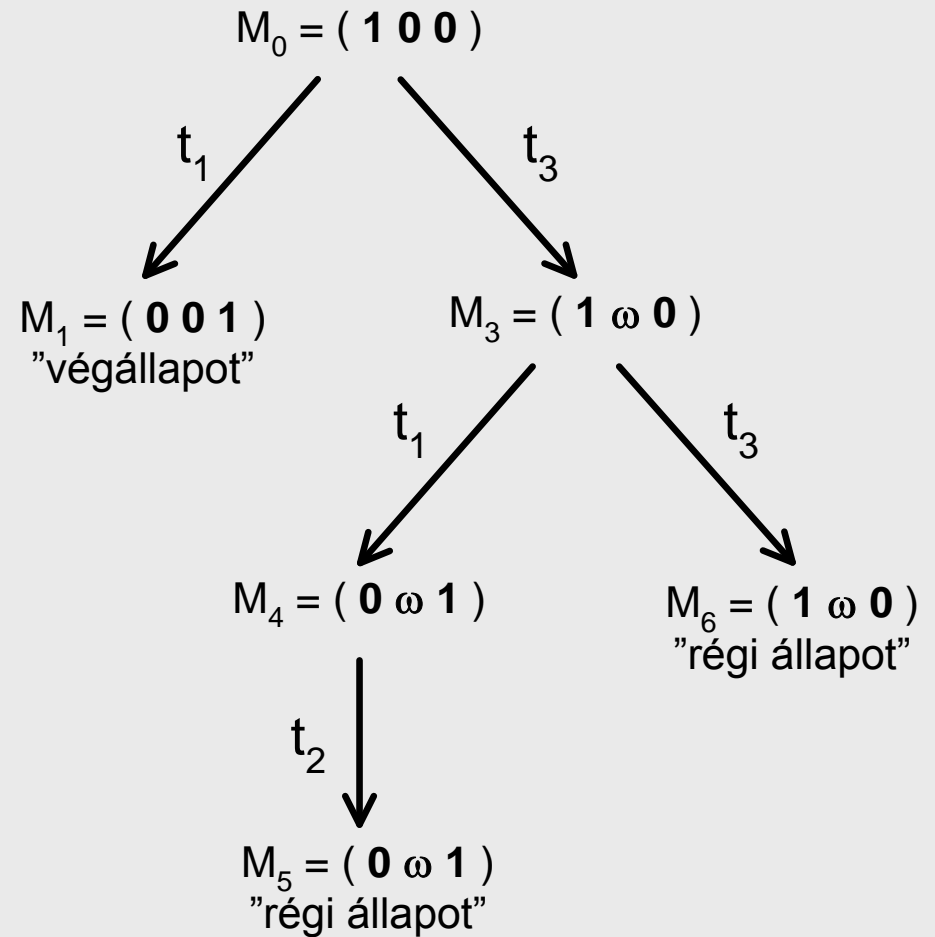
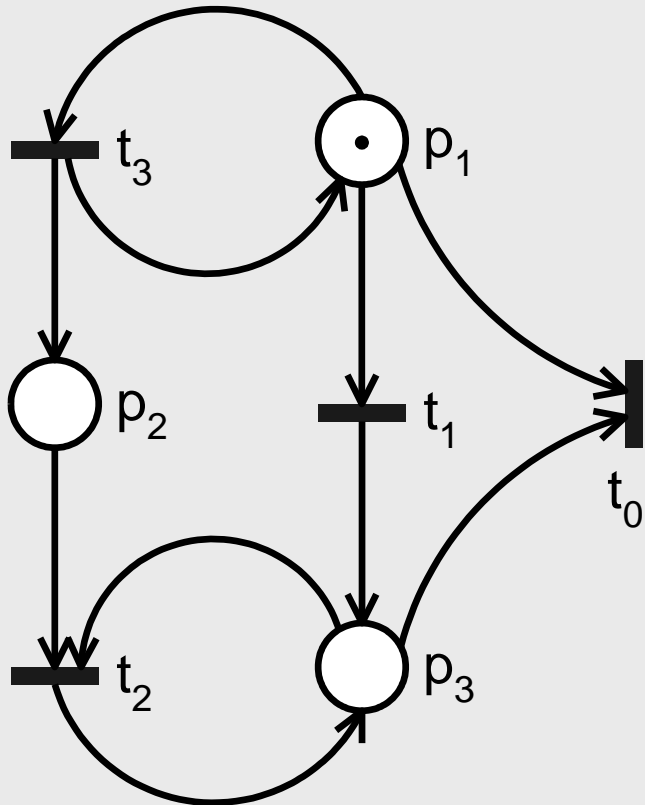
$$\forall p \in P : m'(p) > m''(p) \rightarrow m'(p) = \omega$$

**else**  $M'$  új állapot:  $L_{\text{vizsgálándó}} \leftarrow L_{\text{vizsgálándó}} \cup M'$

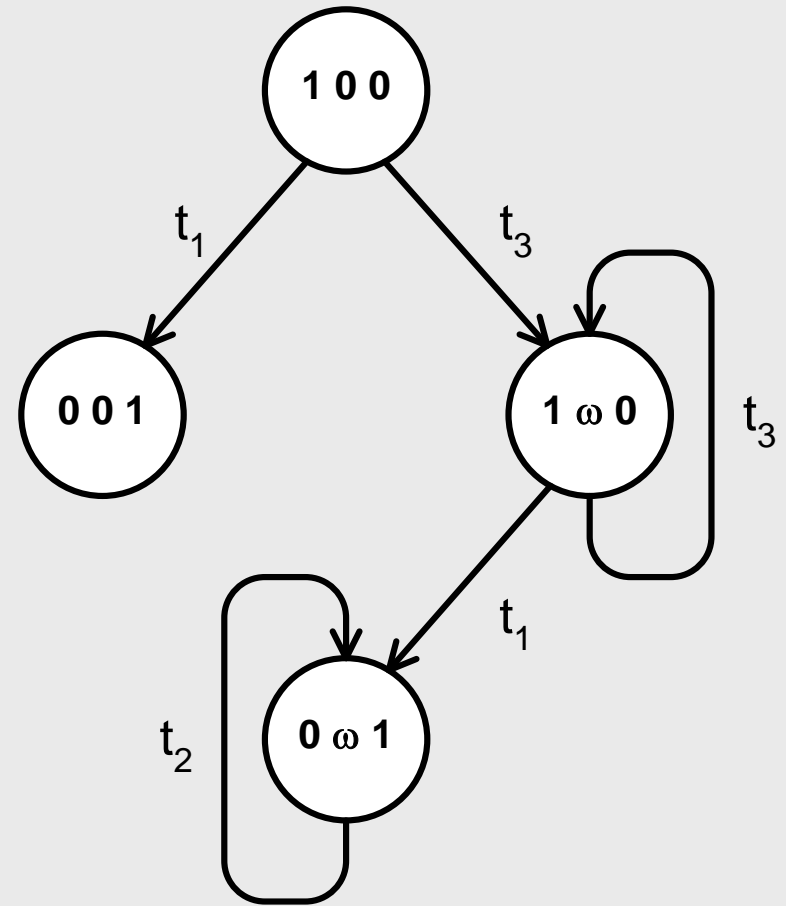
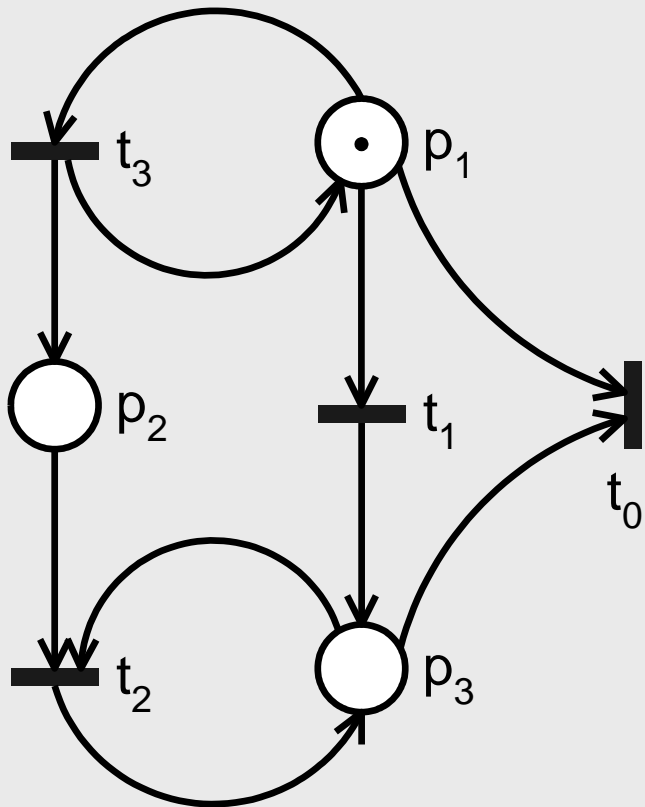
$M$ -ből  $M'$ -höz egy  $t$ -vel jelölt élet húzunk

**goto** MAIN // ciklus

# A példa és annak fedési fája



# A példa és annak fedési gráfja



# Petri hálók fedési fájának analízise

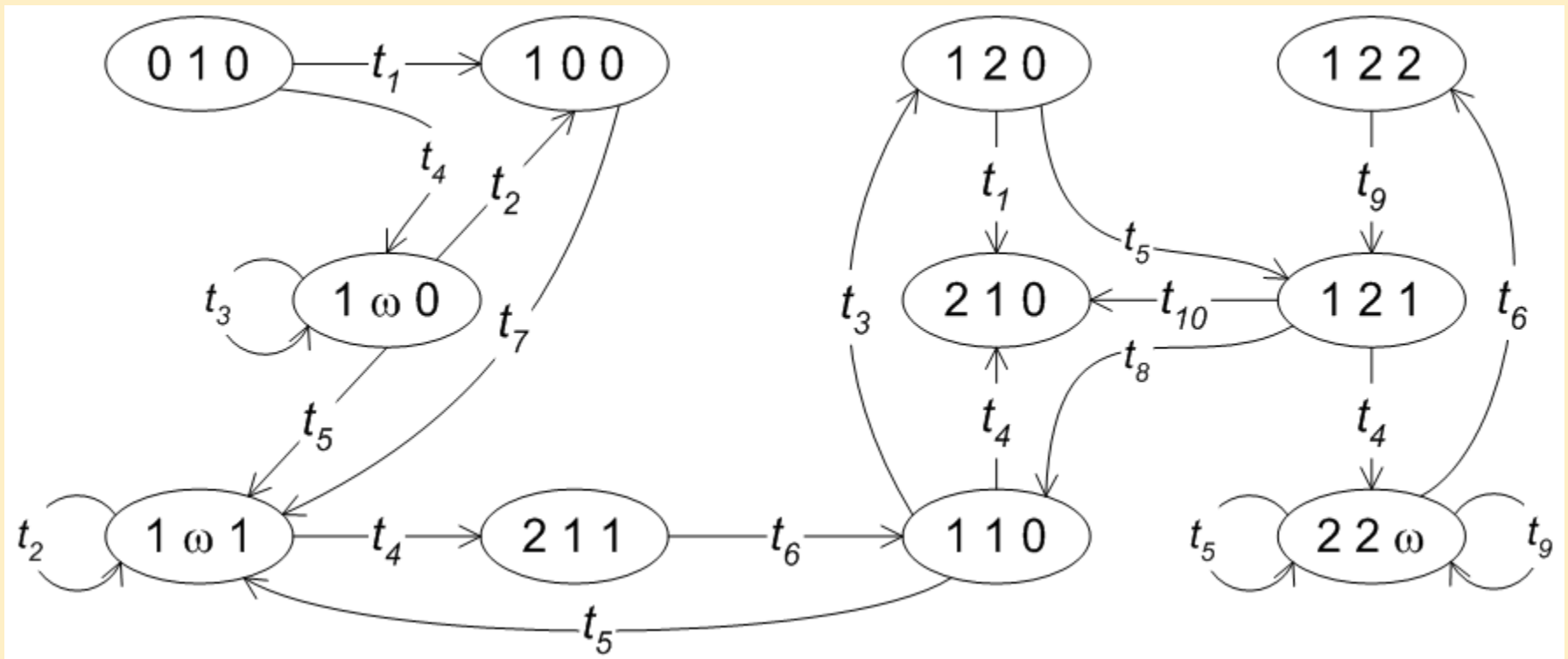
Közvetlenül is leolvasható tulajdonságok:

- Petri háló **korlátos**  $\Leftrightarrow R(N, M_0)$  elérhetőségi gráfja **véges**  
 $\Leftrightarrow$  Fedési fában  $\omega$  **nem jelenik meg** címkeként
- Petri háló **biztonságos**  $\Leftrightarrow$  Csak **0 és 1** jelenik meg csomópont címkeként a fedési fában
- Petri háló egy tranzíciója **halott**  $\Leftrightarrow$  tranzícióhoz tartozó tüzelés **nem jelenik meg** élcímkeként a fedési fában

# Dinamikus tulajdonságok vizsgálata az állapot térben

# Tipikus feladat

Az ábra egy Petri háló állapotterét mutatja be fedési gráf alakban. A hálóban 10 darab tranzíció található, amelyeket  $t_1, \dots, t_{10}$  címkékkel jelölünk. Az állapotokat a token eloszlás vektorral címkéztük meg, tehát  $0\ 1\ 0$  jelentése:  $m(p_1) = 0$ ,  $m(p_2) = 1$  és  $m(p_3) = 0$ .



# Tipikus kérdések

1. A Petri háló élő?
2. A háló (deadlock) holtpontmentes?
3.  $t_6$  tranzíció  $L_3$ -élő?
4.  $t_7$  tranzíció  $L_2$ -élő?
5. A  $(2\ 2\ 1)$  állapot fedhető?
6. A  $(2\ 1\ 0)$  állapot fedhető?
7. A háló perzisztens?
8. A háló korlátos?
9. A háló megfordítható?
10. A hálóban létezik visszatérő állapot?
11.  $t_4$  és  $t_6$  tranzíció korlátos fair tulajdonságú?
12.  $t_5$  és  $t_8$  tranzíció korlátos fair tulajdonságú?
13. Létezik P-invariáns?
14. Létezik T-invariáns?



# Élőség vizsgálata az állapot térben

- Ellenpéldát találni (szinte mindig) a leggyorsabb és legegyszerűbb megoldás!
- Élőség:
  - $L_4$ -élőség
    - végig kell nézni, hogy mindig tüzelhetővé válik-e?
    - minden trajektóriára teljesülnie kell!
  - $L_3$ -élőség (és a többi)
    - elég egy trajektóriát találni, ahol teljesül!
  - A háló akkor élő, ha minden tranzíciója élő!
    - ha találunk akár egy tranzíció esetében ellenpéldát → nem élő
  - Ha holtpontmentes, akkor még nem biztos, hogy élő is!

# Korlátosság vizsgálata az állapottérben

- Korlátosság:
  - lásd a fedési gráfnál tanultakat!
    - „Petri háló korlátos  $\Leftrightarrow R(N, M_0)$  elérhetőségi gráfja véges  $\Leftrightarrow$  fedési fában  $\omega$  nem jelenik meg állapot címkében”
  - biztosság:
    - „Petri háló biztos  $\Leftrightarrow$  csak 0 és 1 jelenik meg állapot címkében a fedési fában”

# További dinamikus tulajdonságok

- Megfordíthatóság:
  - Az elérhetőségi gráf egyetlen erősen összekötött komponens?
- Visszatérő állapot:
  - Van az elérhetőségi gráfban erősen összekötött komponens?
  - Az adott állapot része ennek?
- Fairség:
  - „Az egyik tranzíció korlátos sokszor tüzelhet, mielőtt a másik tüzelne”
  - Van-e olyan ciklus, amiben az egyik tranzíció benne van és a másik nincs?
    - van: ellenpélda, hiszen létezik tüzelési szekvencia, amiben korlátlan sokszor tüzel
- Perzisztencia:
  - „A tranzíció mindaddig engedélyezett marad, amíg nem tüzel”
    - ha több engedélyezett és nem ő tüzelt, akkor a következő állapotban is engedélyezett marad
    - ha engedélyezett maradt, akkor meg is jelenik élcímkeként (prioritás?)

# Dinamikus tulajdonságok analízis eszközökben

- Korlátosság (Boundedness)
- Élő ( $L_4$ -élő) tulajdonság (Liveness)
- Holtpont (Deadlock) felderítése
- Visszatérő állapotok (Home States)
- Fedési gráf (Coverability Graph)
- Hely invariánsok (P-Invariants)
- Tüzelési invariánsok (T-Invariants)