Petri hálók strukturális tulajdonságai
Invariánsok és számításuk

dr. Bartha Tamás
Dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Vizsgálati lehetőségek

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció
- Állapottér bejárása
  - elérhetőségi gráf analízis
  - dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
- Strukturális tulajdonságok
  - invariáns analízis

egy trajektória bejárása

minden trajektória bejárása
(kimerítő bejárás)

kezdőállapottól független
(bármely kezdőállapotra)

ha mindez nem vezet eredményre

- Algebrai közelítés, részleges döntés

Petri hálók strukturális tulajdonságai

Strukturális tulajdonságok

Petri hálók kezdőállapot-független tulajdonságai:

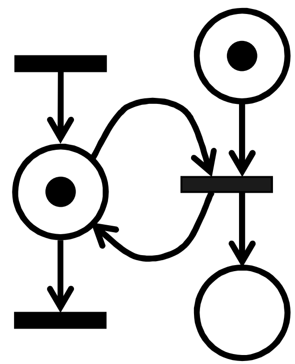
- Strukturális korlátosság
- Vezérelhetőség
- Konzervativitás
  - Hely invariáns, P- (place) invariáns
- Strukturális élőség
- Ismételhetőség
- Konzisztencia
  - Tüzelési invariáns, T- (transition) invariáns

Csak a háló struktúra határozza meg őket:

- vagy $\forall$ korlátos kezdő tokeneloszlásra igazak,
- vagy $\exists$ olyan korlátos kezdő tokeneloszlás, amire igazak

Állapotegyenlet

- Petri háló dinamikája: tokenek áramlanak
  - Kirchhoff egyenletekhez hasonló egyensúlyi egyenletek
- Előfeltétel (egyértelműség): tiszta Petri háló
  - Nincs olyan átmenet, amely egyazon helynek egyszerre bemenő és kimenő átmenete: $\forall t \in T : \bullet t \cap t \bullet = \emptyset$
  - Hurokél
    - a tüzeléskor a tokeneloszlás nem változik, de
    - a tüzelési feltételben szerepet játszik



Állapotegyenlet

- Tüzelési szekvencia: $M_{i_0}\left[\vec{\sigma} > M_{i_n}\right.$

$$\boxed{\vec{\sigma} = \left\langle M_{i_0} t_{i_1} M_{i_1} \ldots t_{i_n} M_{i_n} \right\rangle = \left\langle t_{i_1} \ldots t_{i_n} \right\rangle}$$

- **Engedélyezés:**
  - $t_{i,j}$ átmenet minden $p \in \bullet t_{i,j}$ bemenő helyén **elég** token

$$\boxed{\forall t_{i_j} \in \vec{\sigma}, \forall p \in \bullet t_{i_j} : M_{i_{j-1}}(p) \geq w^-(p, t_{i_j}) = \mathbf{W}^{-\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j}}$$

Állapottrajektóriák

- **Állapotátmenet:**
  - $t_{i,j}$ átmenet engedélyezett $\rightarrow$ tüzel
    - minden $p \in \bullet t_{i,j}$ bemenő helyéről $w^{-}(p, t_{i,j})$ tokent vesz el
    - minden $p \in t_{i,j}\bullet$ kimenő helyére $w^{+}(p, t_{i,j})$ tokent tesz ki

$$\boxed{M_{i_j} = M_{i_{j-1}} - \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}} \vec{e}_{i_j} + \mathbf{W}^{+^{\mathrm{T}}} \vec{e}_{i_j} = M_{i_{j-1}} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j}}$$

    - összeadva és átrendezve:

$$\boxed{M_{i_0} \left[\vec{\sigma} > M_{i_n} \Rightarrow M_{i_n} - M_{i_0} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T \right.}$$

- Tüzelési szám vektor: az egyes tranzíciók tüzeléseinek száma a tüzelési szekvenciában

Állapotegyenlet levezetése

$$M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_1}$$

$$M_2 = M_1 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_2} = \overbrace{M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_2}}^{M_1 \text{ behelyettesítésével}}$$

$$\dots$$

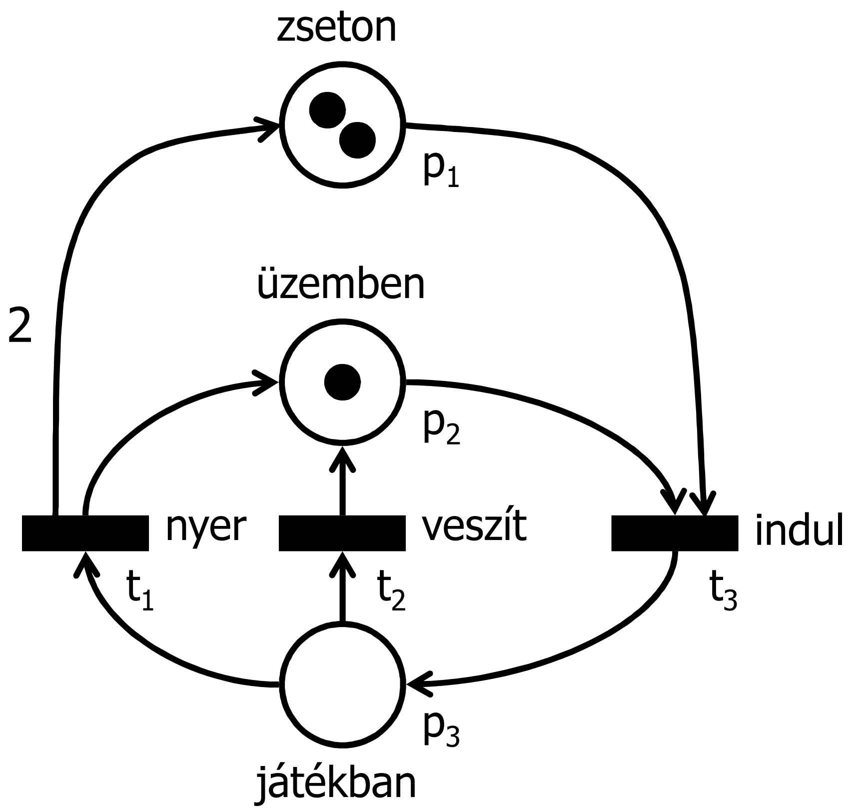
$$M_{n+1} = M_n + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_{n+1}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_2} + \dots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_{n+1}}$$

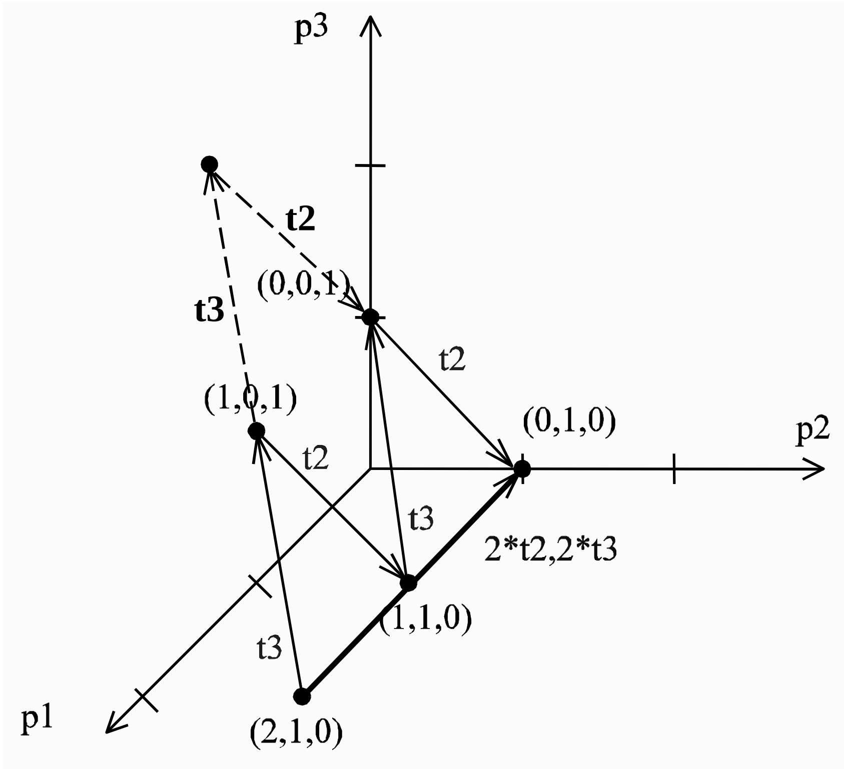
$$\dots \qquad \Downarrow$$

$$M_m = M_0 + \underbrace{\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_2} + \dots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{t_m}}_{\text{összevonva}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{m} \vec{e}_{t_i}$$

$$M_m = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T \Rightarrow \boxed{M_m - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T}$$

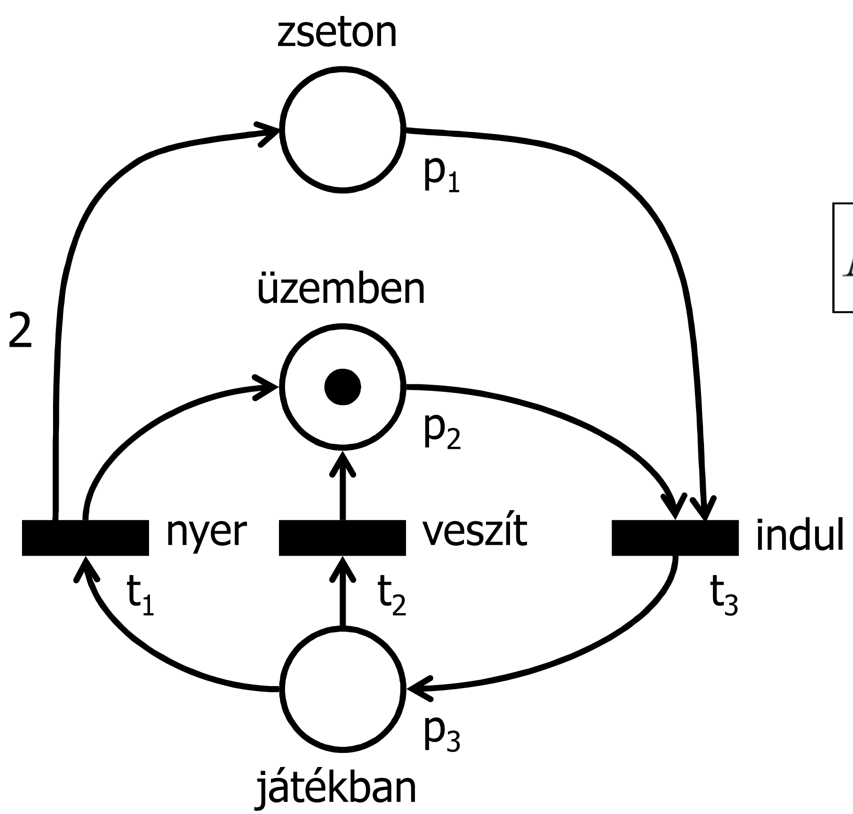
Állapotegyenlet és elérhetőség





- A **tüzelési szám vektor**ban kevesebb az információ, mint a **tüzelési szekvenciá**ban!

Állapotegyenlet és elérhetőség



- Tokenmérleg teljesülése a tüzelésnek csak a **szükséges** feltétele!

$$\boxed{M_{i_0}\left[\vec{\sigma} > M_{i_n} \Rightarrow M_{i_n} - M_{i_0} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T\right.}$$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{p_1} \\ \mathbf{p_2} \\ \mathbf{p_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{t_1} & \mathbf{t_2} & \mathbf{t_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{(1,1,0)^{\mathrm{T}} - (0,1,0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot (1,0,1)^{\mathrm{T}}}$$

t_1 és t_3 sem nem tüzelhető a (0,1,0) kezdőállapotban!

Invariánsok fogalma
Tüzelési és hely invariáns

Tüzelési, avagy T-invariáns

A σ tüzelési szekvencia végrehajtása nem változtatja meg a tokeneloszlást:

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0}$$

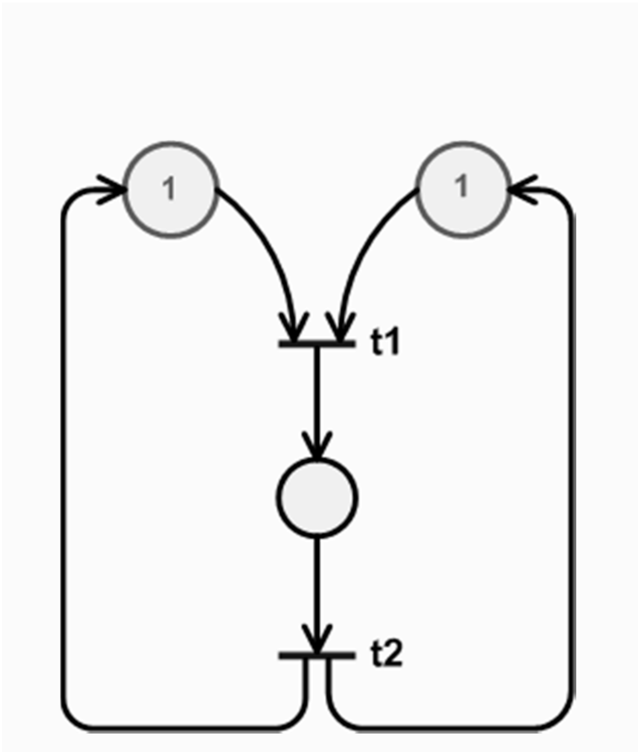
– Ciklus az állapottérben: $M_i\left[\vec{\sigma}_T > M_i\right.$
  - ha σ_T szekvencia az M_i állapotból végrehajtható!

$$\boxed{\forall t_{i_j} \in \vec{\sigma}, \forall p \in \left\{\bullet t_{i_j}\right\} : m_{i_{j-1}}\left(p\right) \geq w^{-}\left(p, t_{i_j}\right) = \mathbf{W}^{-\mathrm{T}} \cdot \vec{e}_{i_j}}$$

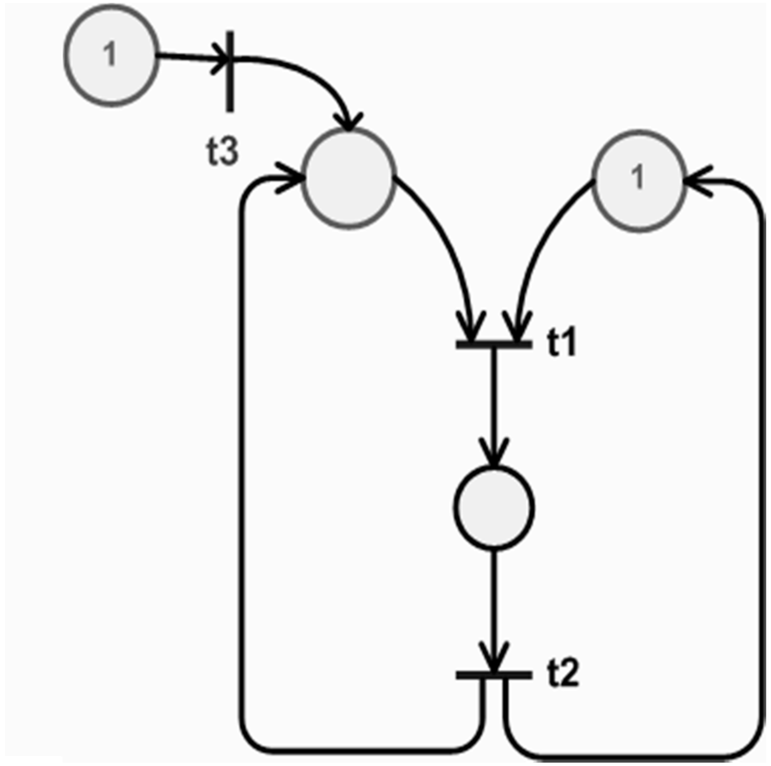
– Megjegyzés: bármely σ tüzelési szekvenciához található olyan M_0 kezdőállapot, amelyből σ végrehajtható
  - Pl. $M_0 \geq \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}}\vec{\sigma}$ esetén induláskor annyira „teletömött”, hogy a σ tüzelési szekvencia által termelt tokenekre már nincs szükség!

Példa T-invariánsra

$t_1 - t_2$ után a tokeneloszlás ugyanez



$t_3 - t_1 - t_2$ tüzelési szekvencia nem ismételhető



T-invariánsok halmaza

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0}$$

Homogén, lineáris egyenletrendszer

- egy megoldás többszöröse is megoldás
  - ha tüzelhető, akkor többször is befutja a ciklust
- megoldás összege is megoldás
  - ha tüzelhető, akkor több ciklus kombinációját futja be
- megoldások lineáris kombinációi is megoldások

Keressünk **BÁZIST**!

- az összes megoldást előállító minimális halmaz

Minimális T-invariáns

- A σ tüzelési szekvencia sup(σ) **alapja**
  - azon átmenetek $T' = \{t_i \,|\, \sigma_i > 0\}$ részhalmaza, amelyek σ szekvenciában előfordulnak
- A σ_T tüzelési invariáns **minimális alapú**
  - ha nincs olyan T-invariáns, amelynek alapja σ_T alapjának valódi részhalmaza, vagy
  - ha részhalmaza azonos, annak tüzelési számai kisebbek

$$\boxed{\forall \sigma_T^1 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sigma_T^1 = 0 \Rightarrow \left(\sigma_T^1 \geq \sigma_T\right) \vee \left(\sup(\sigma_T) \not\subseteq \sup(\sigma_T^1)\right)}$$

Hely, avagy P-invariáns

A μ_P súlyvektor által kijelölt helyeken a tokenek súlyozott összege nem változik:

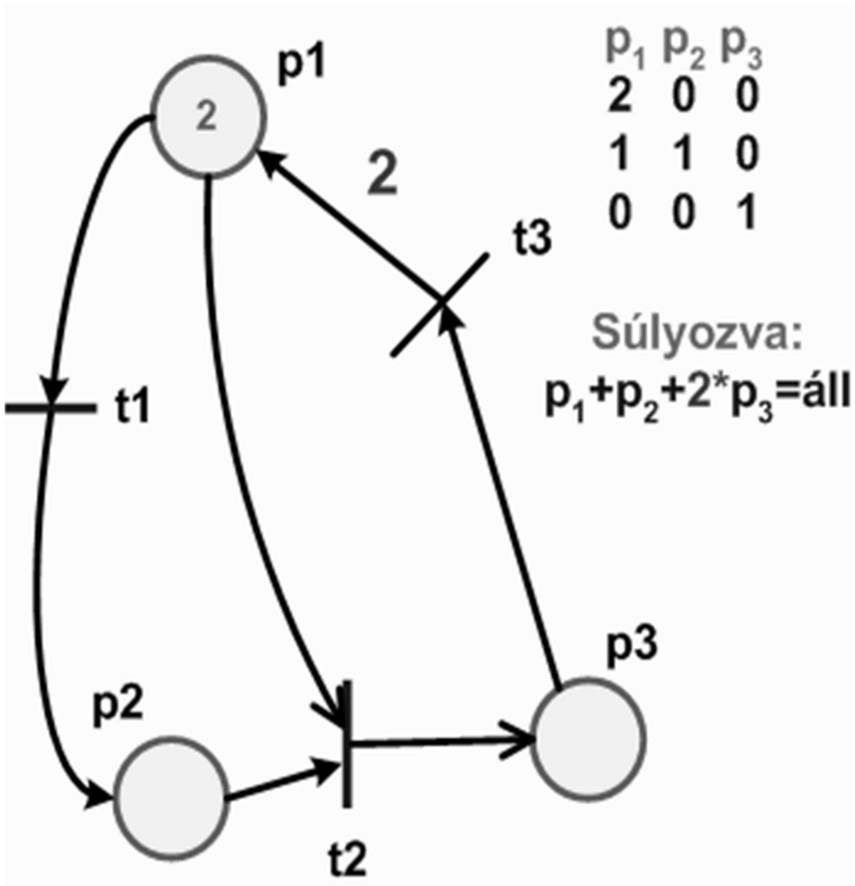
$$\boxed{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \text{állandó}}$$

– A tokenek (egy része) a helyek egy részhalmazában kering (pl. erőforrások nem fogynak, nem keletkeznek)

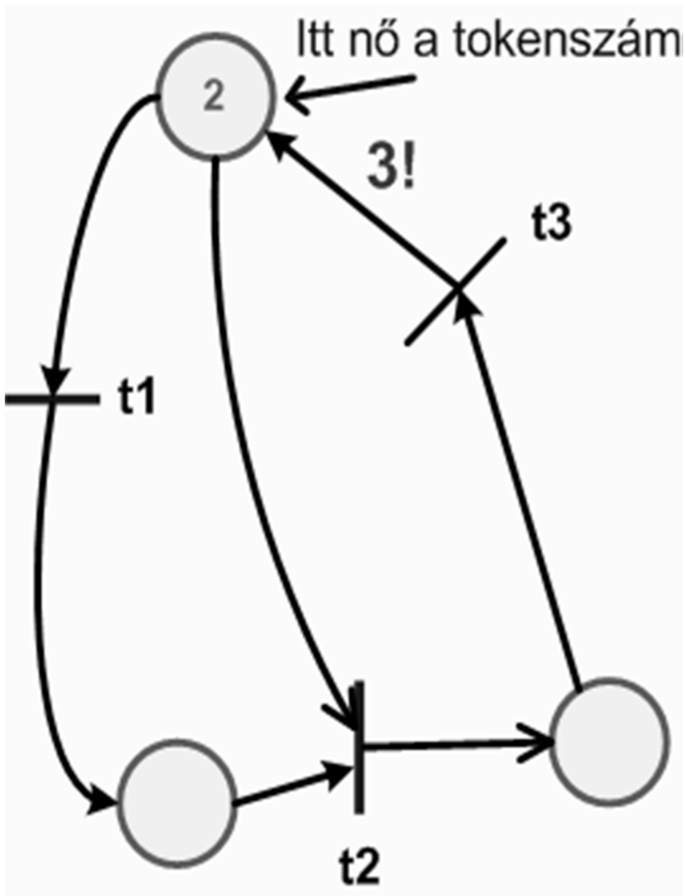
$$\left.\begin{aligned}
&M = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \\
&\underbrace{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_0}_{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_0 = \text{állandó}} + \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \\
&\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \underset{\forall \vec{\sigma}}{\equiv} 0
\end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\mathbf{W}\vec{\mu}_P = 0}$$

Példa P-invariánsra

P-invariáns p_1, p_2, p_3-ra:



NEM P-invariáns:

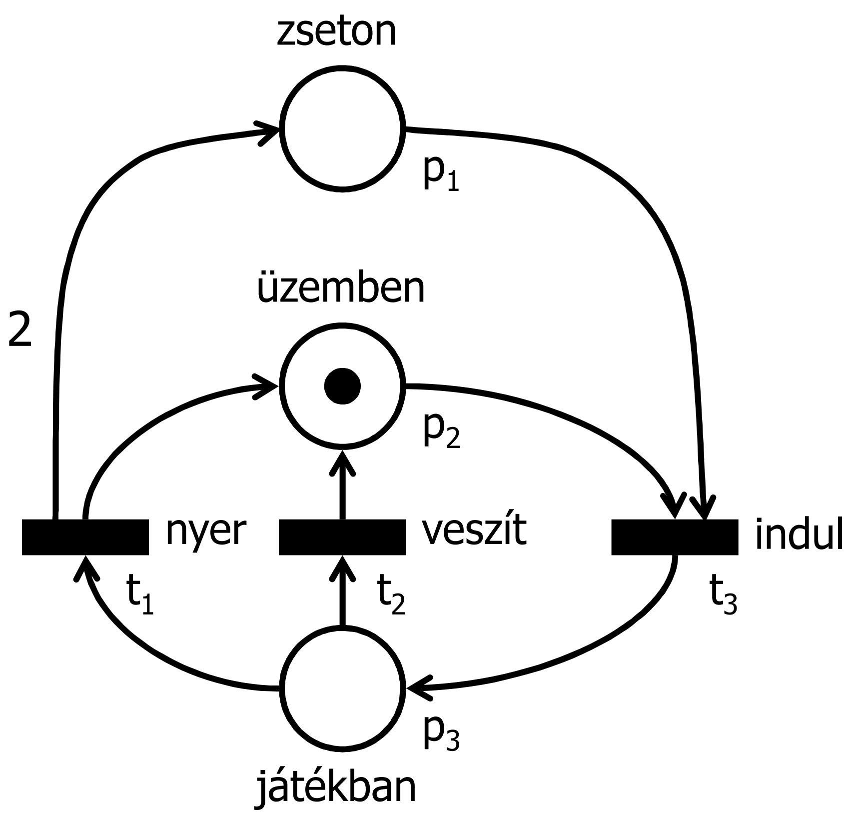


Invariánsok alkalmazásai

- T-invariánsok alkalmazásai
  - Termelési folyamat meghatározása
  - Szabályalapú rendszerek, diagnosztikai problémák
  - Dinamikus tulajdonságok
    - ciklikusan tüzelhető ➲ megfordíthatóság, visszatérő állapot
    - később is tüzelhető ➲ élő tulajdonság, holtpontmentesség
- P-invariánsok alkalmazásai
  - Véges automaták keresése $\rightarrow$ dekompozíció
  - Dinamikus tulajdonságok
    - token nem vész el ➲ élő tulajdonság, holtpontmentesség
    - token nem termelődik ➲ korlátosság

Invariánsok számítása

Van-e a példában invariáns?



- P-invariáns: $\mathbf{W} \cdot \mu_P = 0$

$$\mathbf{W}^\mathrm{T} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{p_1} \\ \mathbf{p_2} \\ \mathbf{p_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{t_1} & \mathbf{t_2} & \mathbf{t_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \times 1 \\ \times 1 \end{array}$$

$$\mathbf{W} \cdot (0, 1, 1)^\mathrm{T} = 0$$

- T-invariáns: $\mathbf{W}^\mathrm{T} \cdot \sigma_T = 0$

$$\mathbf{W}^\mathrm{T} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{p_1} \\ \mathbf{p_2} \\ \mathbf{p_3} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{t_1} & \mathbf{t_2} & \mathbf{t_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \times 1 & \times 1 & \times 2 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{W}^\mathrm{T} \cdot (1, 1, 2)^\mathrm{T} = 0$$

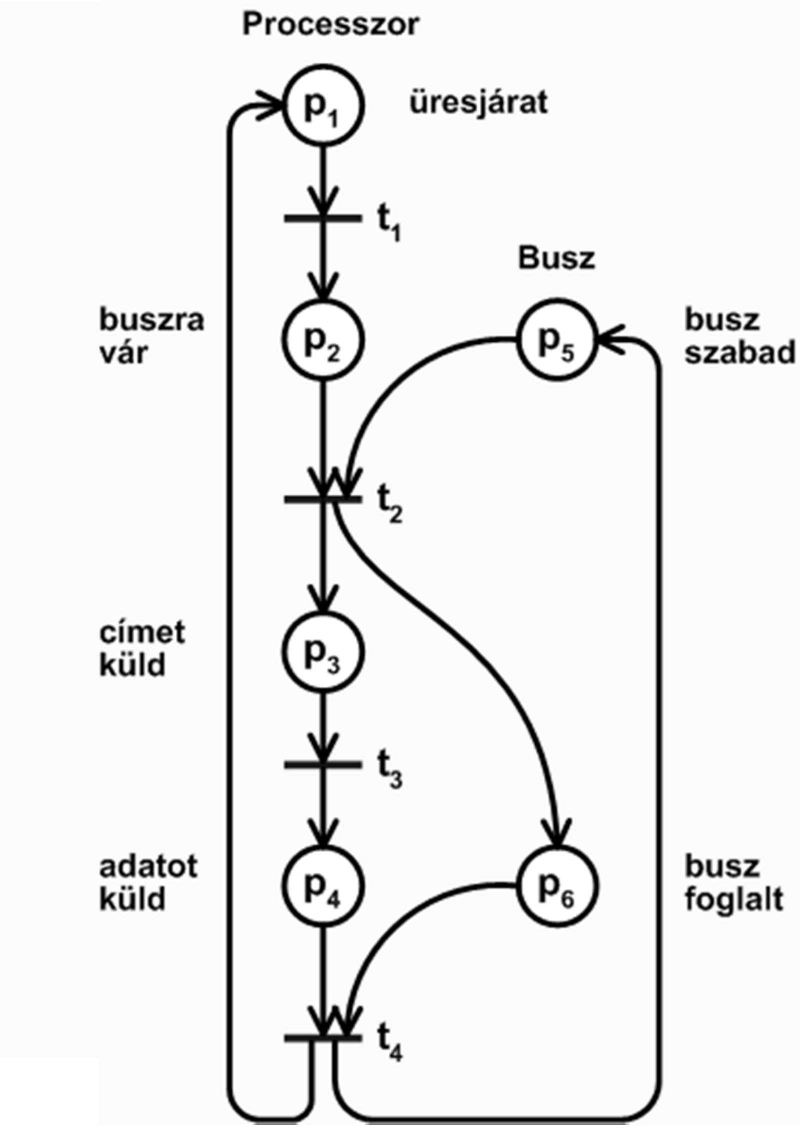
Megoldási módszerek

Kérdések:

- σ_T bázis komponenseinek értelmezési tartománya?
- a lineáris kombinációk együtthatóinak értelmezési tartománya?

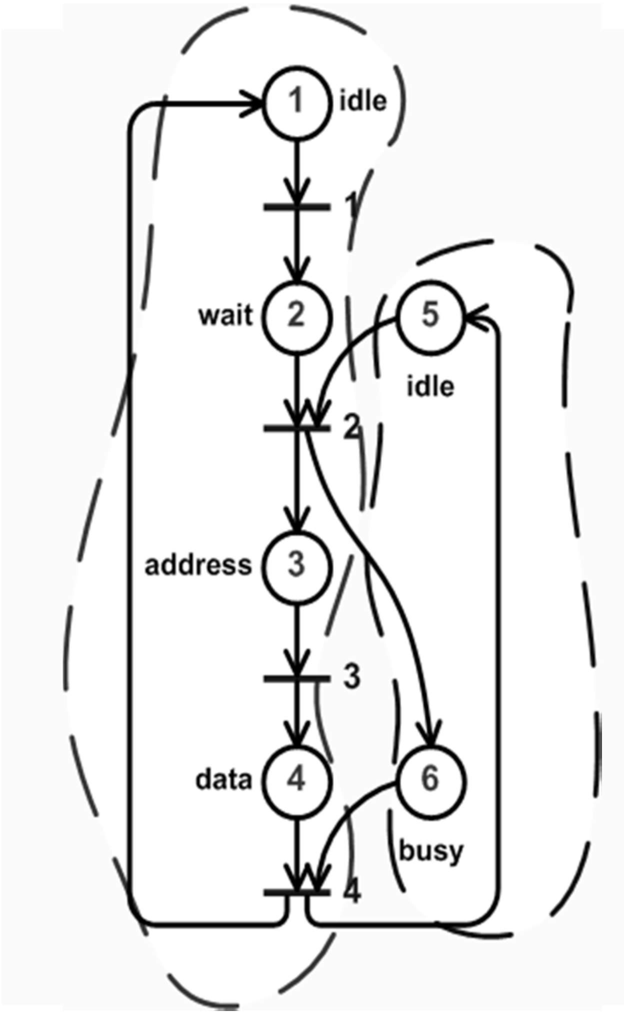
Szint	Tartomány	Együttható	Lineárisan független?	Egyértelmű?	Algoritmus
1	$x \in \mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	Igen	Nem	Gauss elimináció
2	$x \in \mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	Igen	Nem	Hermite redukció
3	$x \in \mathbf{N}_0$	$\mathbf{Q}_0$	Nem biztos	Igen	Martinez-Silva
4	$x \in \mathbf{N}_0$	$\mathbf{N}_0$	Nem biztos	Igen	Pascoletti
5	$x \in \mathbf{B}$	$\mathbf{B}$	Nem biztos	Igen	Jaxy

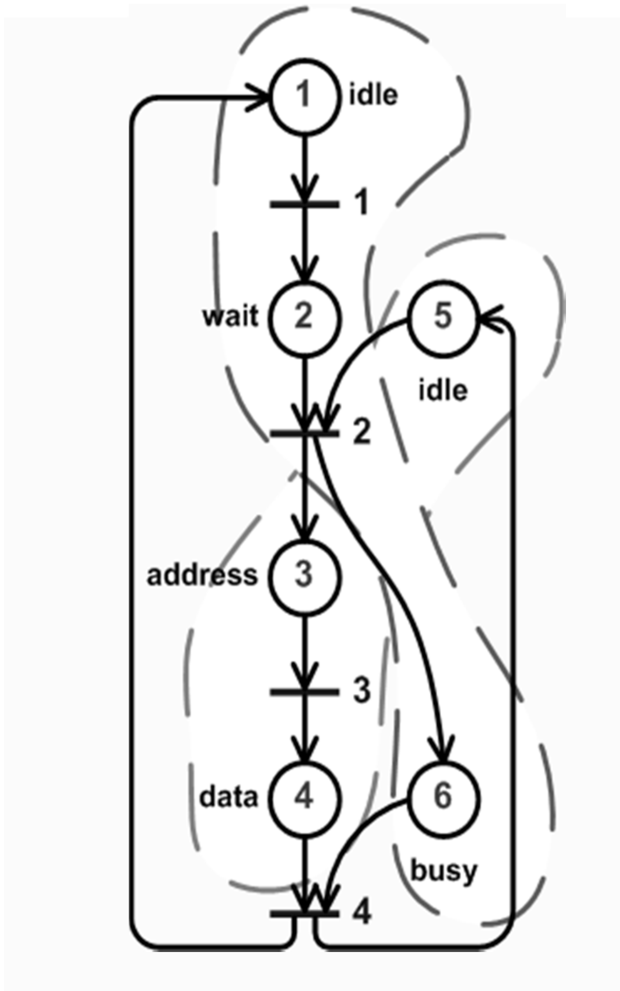
Példa: processzor adatátvitel



- Processzor
  - várakozik (idle - üresjárat)
  - busz hozzáférési jogot kér
  - címet tesz ki a címbuszra
  - adatot tesz ki az adatbuszra
- Busz(ok)
  - szabad (nem használja senki)
  - foglalt (processzor/periféria)
- Petri háló
  - n = 4 darab átmenet
  - m = 6 darab hely

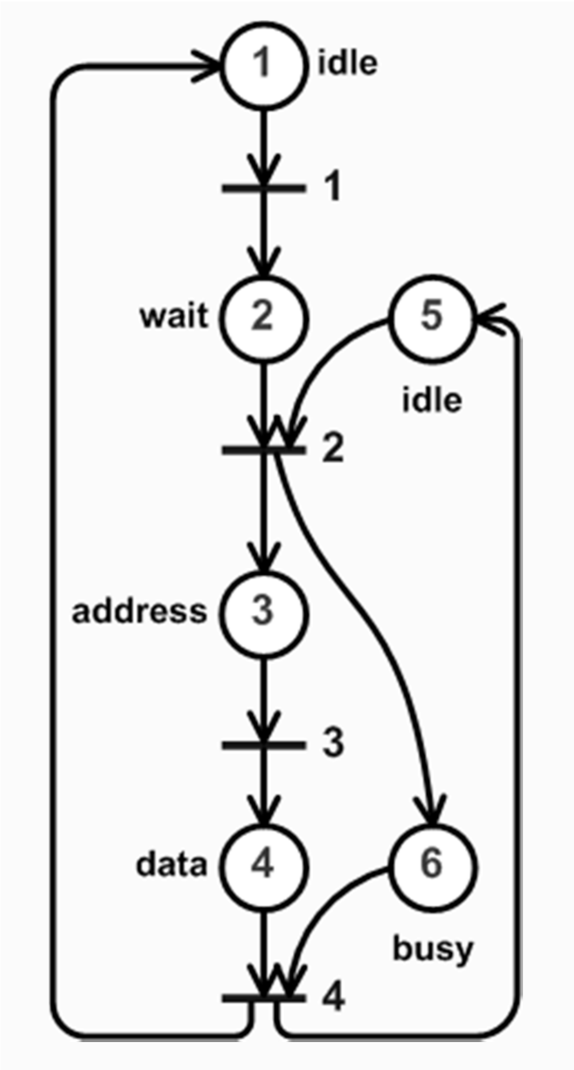
Keressük meg fejben a megoldást!





Négy P invariáns található

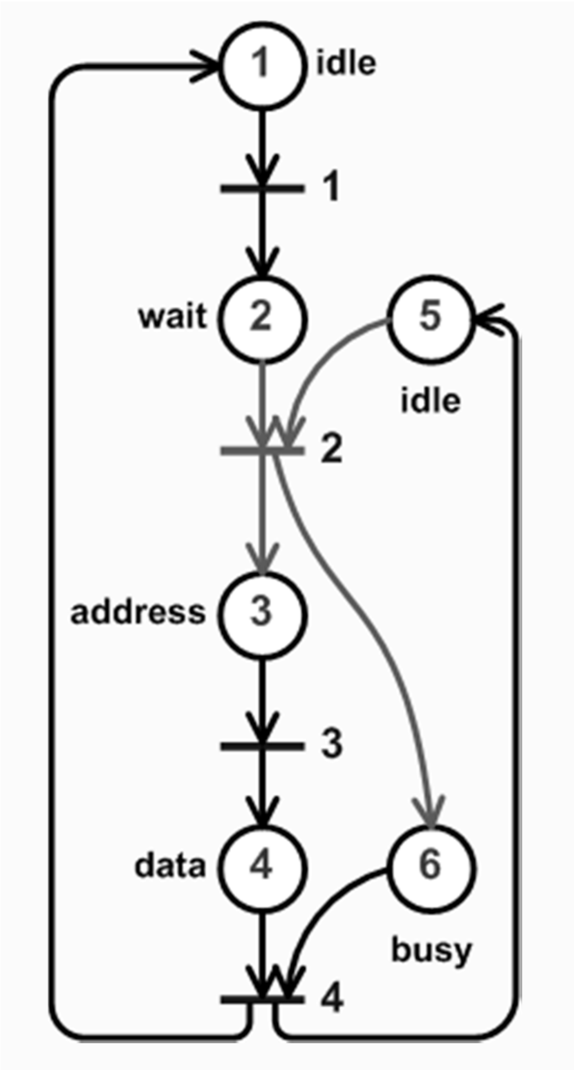
Szomszédossági mátrixok



$$W^{-} = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} \end{array}$$

$$W^{+} = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} \end{array}$$

Szomszédossági mátrixok



$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{cc} \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{matrix} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: inicializálás

$i \leftarrow 1$

$T_i \leftarrow \{\, t \in T \,\}$

$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{W}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{D} \leftarrow \mathbf{1}_n$ // $n = |P|$

$\mathbf{Q}_i \leftarrow [\mathbf{D} \mid \mathbf{A}]$ // egységmátrix + szomszédossági mátrix

$L_p \leftarrow$ a $\mathbf{Q}_i$ mátrix p. sora

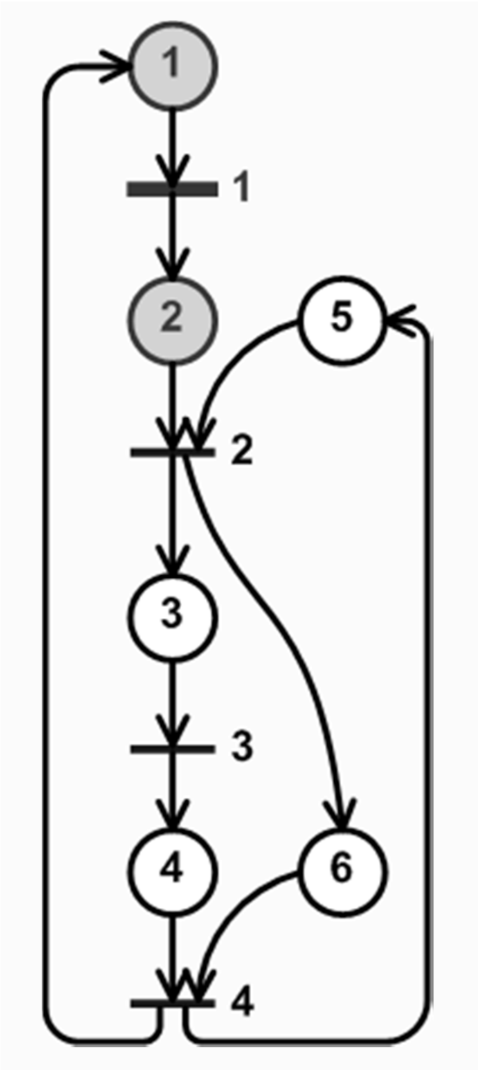
$T_1 = \{\, t_1, t_2, t_3, t_4 \,\}$

$$\mathbf{Q_1} = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc}
\mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} & \mathbf{e_4} & \mathbf{e_5} & \mathbf{e_6} & \mathbf{t_1} & \mathbf{t_2} & \mathbf{t_3} & \mathbf{t_4} & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{p_1} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{p_2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \mathbf{p_3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \mathbf{p_4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \mathbf{p_5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \mathbf{p_6}
\end{array}\right]$$

Martinez-Silva algoritmus: ciklus

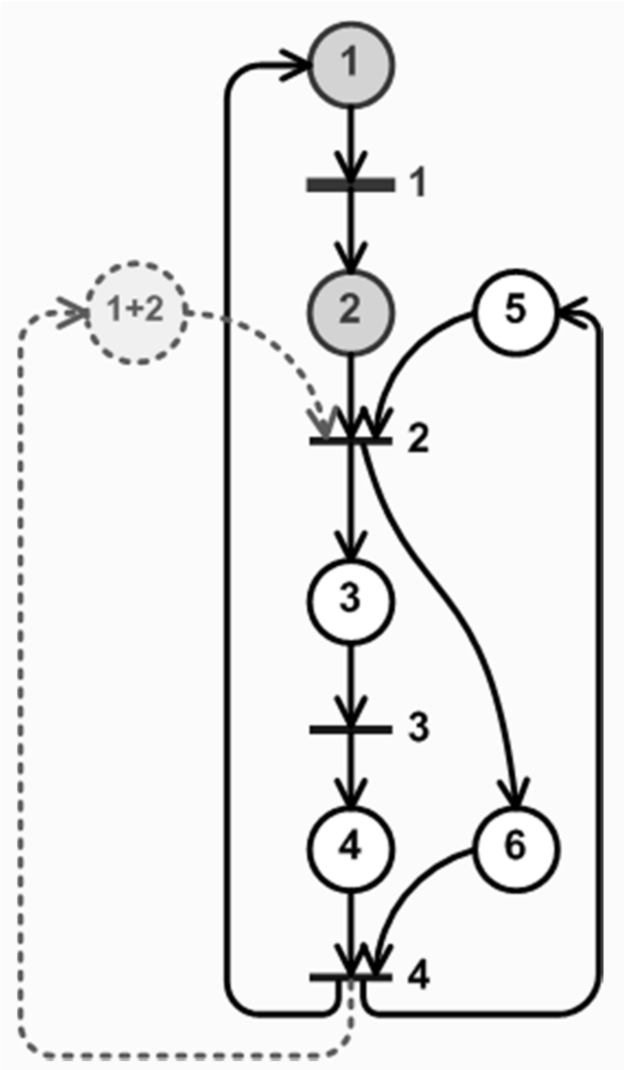
```
while Ai ≠ 0
    if tj ∈ Ti // válasszunk egy eddig nem vizsgált oszlopot
    Ti+1 ← Ti \ { tj }
    Ldelete ← ∅
    Qi+1 ← Qi
    for all u, v : Ai(u, j) ≠ 0 ∧ Ai(v, j) ≠ 0 ∧
                   ∃λu, λv ∈ ∞+: λu Ai(u, j) + λv Ai(v, j) = 0
        Qi+1-hez adjuk hozzá a λu Lu+λv Lv sort
        Ldelete ← Ldelete ∪ { Lu, Lv }
    end for
    Qi+1-ből töröljük az Ldelete halmazbeli sorokat
    i ← i + 1
end while
```

Martinez-Silva algoritmus: 1-1. lépés



$$Q_1 = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \end{array}$$

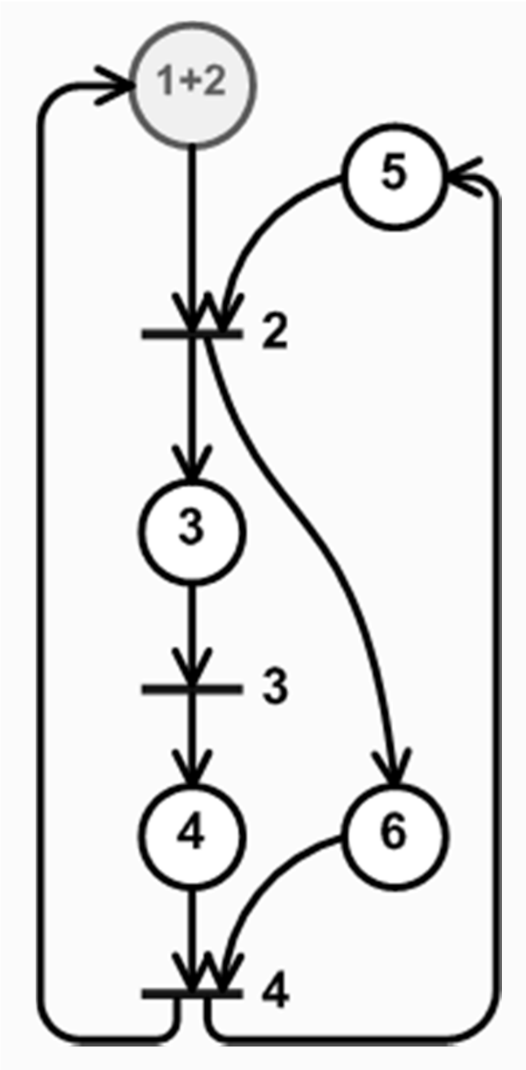
Martinez-Silva algoritmus: 1-2. lépés



$$Q_1 = \begin{array}{cccccccccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \end{array}$$

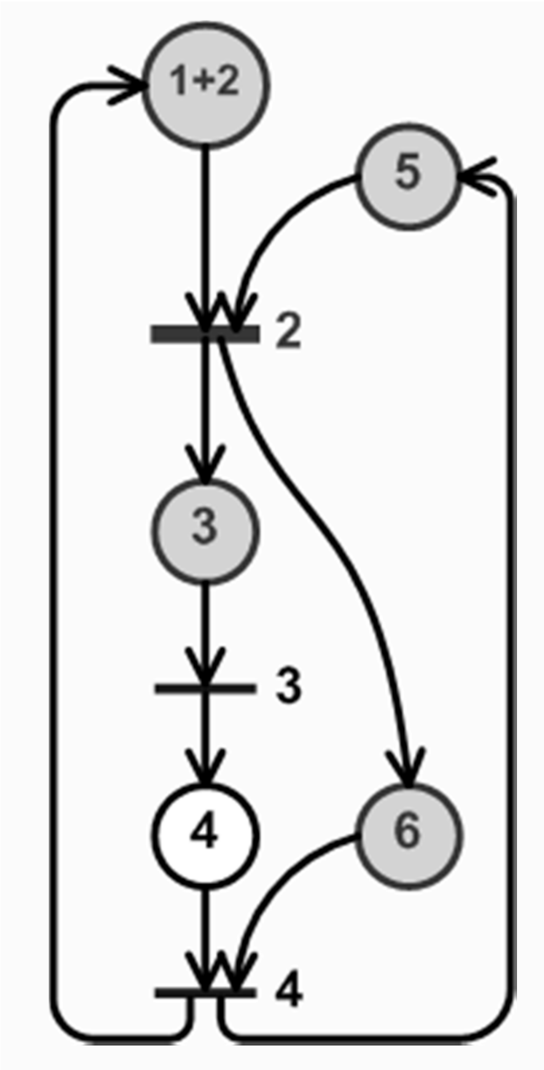
$$Q_1' = \begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_{1+2} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: 1. részeredmény



$$
Q_1'' = \begin{array}{c c}
\begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccccc|cccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{c} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{array}
\end{array}
$$

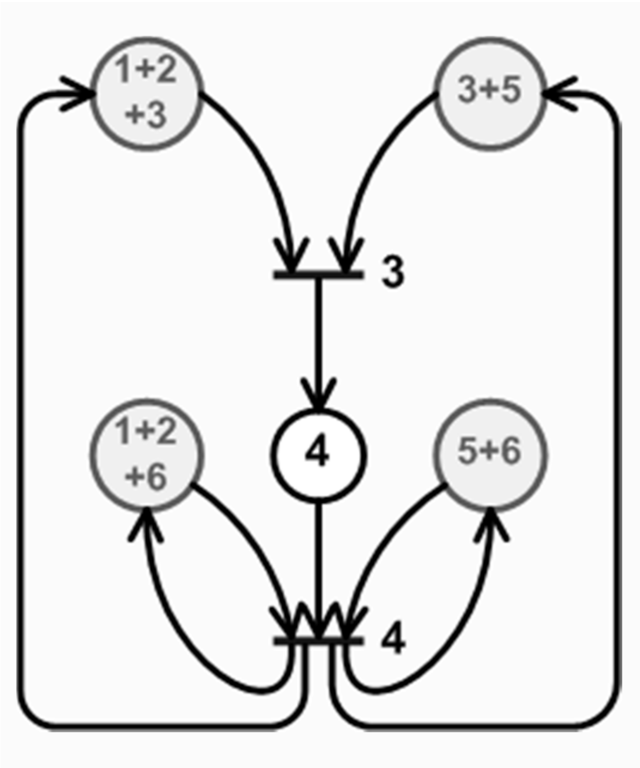
Martinez-Silva algoritmus: 2-1, 2-2. lépés



$$Q_2 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{matrix} & \\ \left[\begin{array}{cccccc:cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{matrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{matrix} \end{array}$$

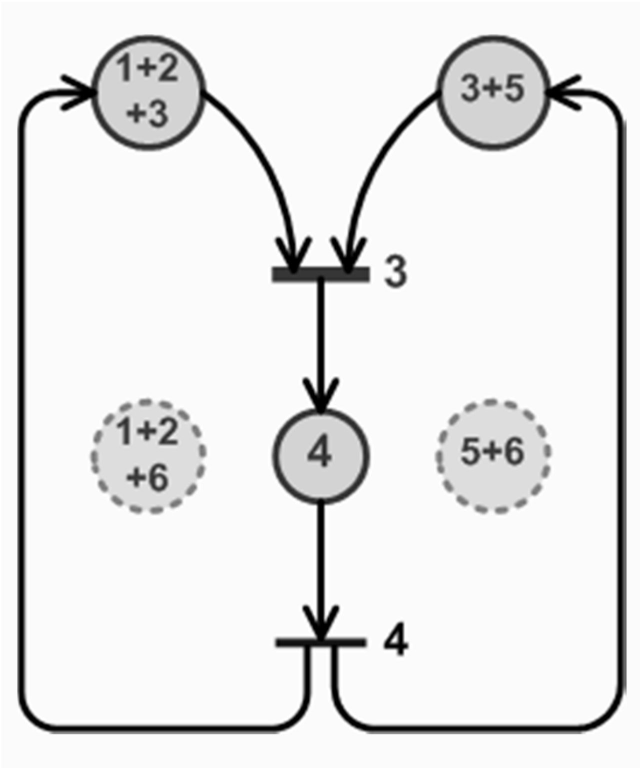
$$Q_2' = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{matrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \end{matrix} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: 2. részeredmény



$$
Q_2'' = \begin{array}{cccccccccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{1+2+3} \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{3+5} \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+6} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5+6}
\end{array}
$$

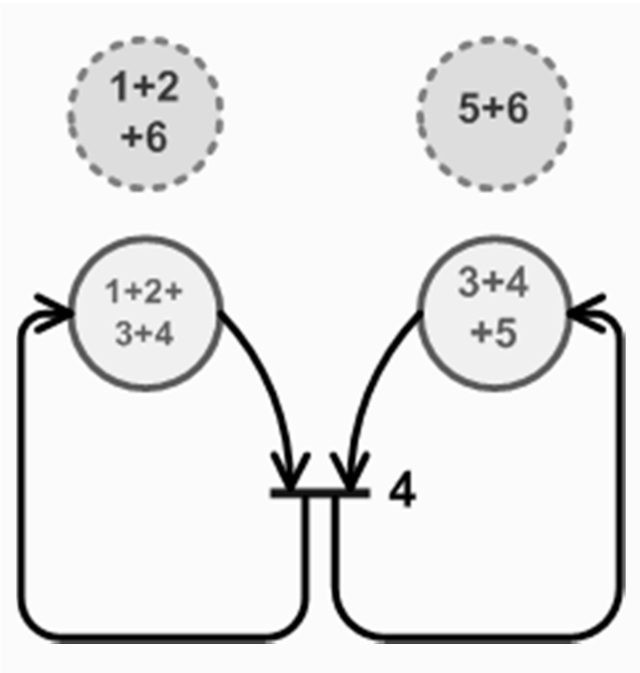
Martinez-Silva algoritmus: 3-1, 3-2. lépés



$$Q_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ p_4 \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \end{array}$$

$$Q_3' = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} p_4 \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \\ p_{1+2+3+4} \\ p_{3+4+5} \end{array}$$

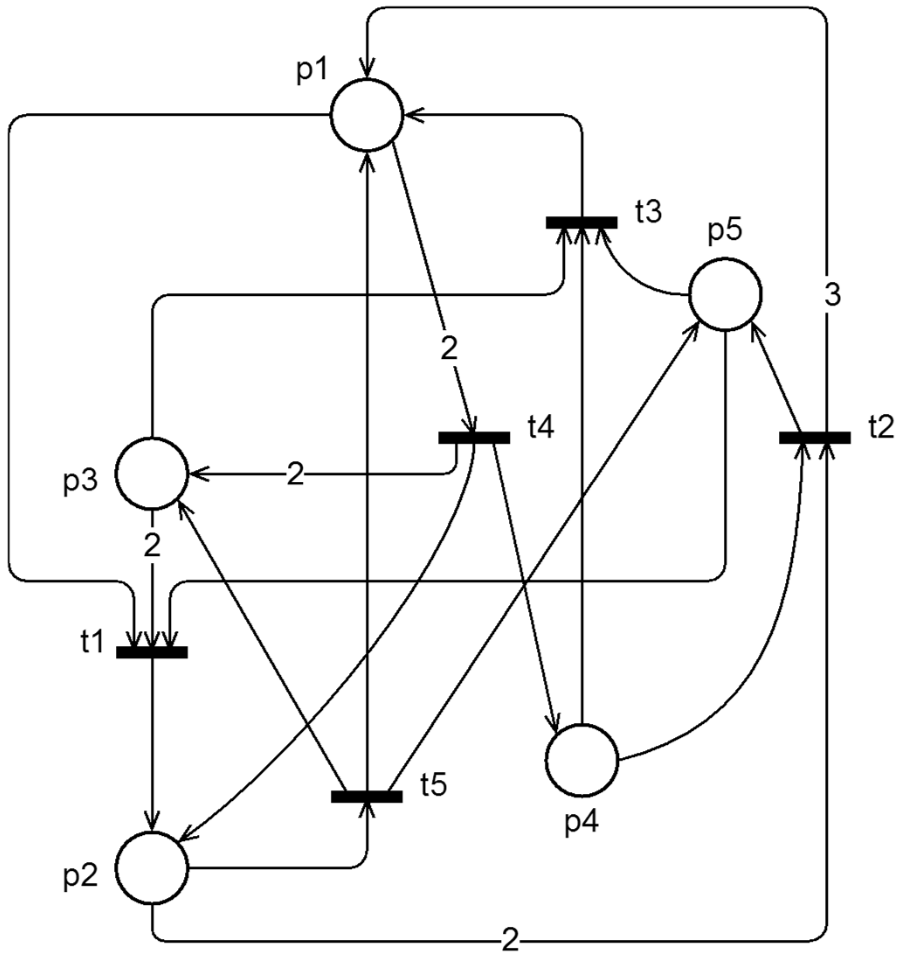
Martinez-Silva algoritmus: végeredmény



$$Q_3'' = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \\ p_{1+2+3+4} \\ p_{3+4+5} \end{array} \end{array}$$

- Invariánsok:
  - a végső Q_m= [D_m|0] mátrix alapján a D_m mátrix soraiban található együtthatók
- Kiszámított P (hely) -invariánsok:
  1. $m(p_1)+m(p_2)+m(p_6) = 1$
  2. $m(p_5)+m(p_6) = 1$
  3. $m(p_1)+m(p_2)+m(p_3)+m(p_4) = 1$
  4. $m(p_3)+m(p_4)+m(p_5) = 1$

Összetettebb példa



Kiindulás

						p_1	p_2	p_3	p_4	p_5		
t_1	1	0	0	0	0	-1	1	-2	0	-1	s_{11}	X (törölni)
t_2	0	1	0	0	0	3	-2	0	-1	1	s_{12}	X
t_3	0	0	1	0	0	1	0	-1	-1	-1	s_{13}	X
t_4	0	0	0	1	0	-2	1	2	1	0	s_{14}	
t_5	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	1	s_{15}	X

1. lépés (5. oszlop szerint dolgozunk)

1	1	0	0	0	2	-1	-2	-1	0	(11+12)
0	1	1	0	0	4	-2	-1	-2	0	(12+13)
1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	(11+15)
0	0	1	0	1	2	-1	0	-1	0	(13+15)

(törlés és újrarendezés)

2. lépés előtt

0	0	0	1	0	-2	1	2	1	0	s_{21}	X
1	1	0	0	0	2	-1	-2	-1	0	s_{22}	X
0	1	1	0	0	4	-2	-1	-2	0	s_{23}	X
1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	s_{24}	
0	0	1	0	1	2	-1	0	-1	0	s_{25}	X

2. lépés előtt (4. oszlop szerint dolgozunk)

1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	(21+22)
0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	(21+25)
0	1	1	2	0	0	0	3	0	0	(2*21+23)

(törlés és újrarendezés)

3. lépés előtt

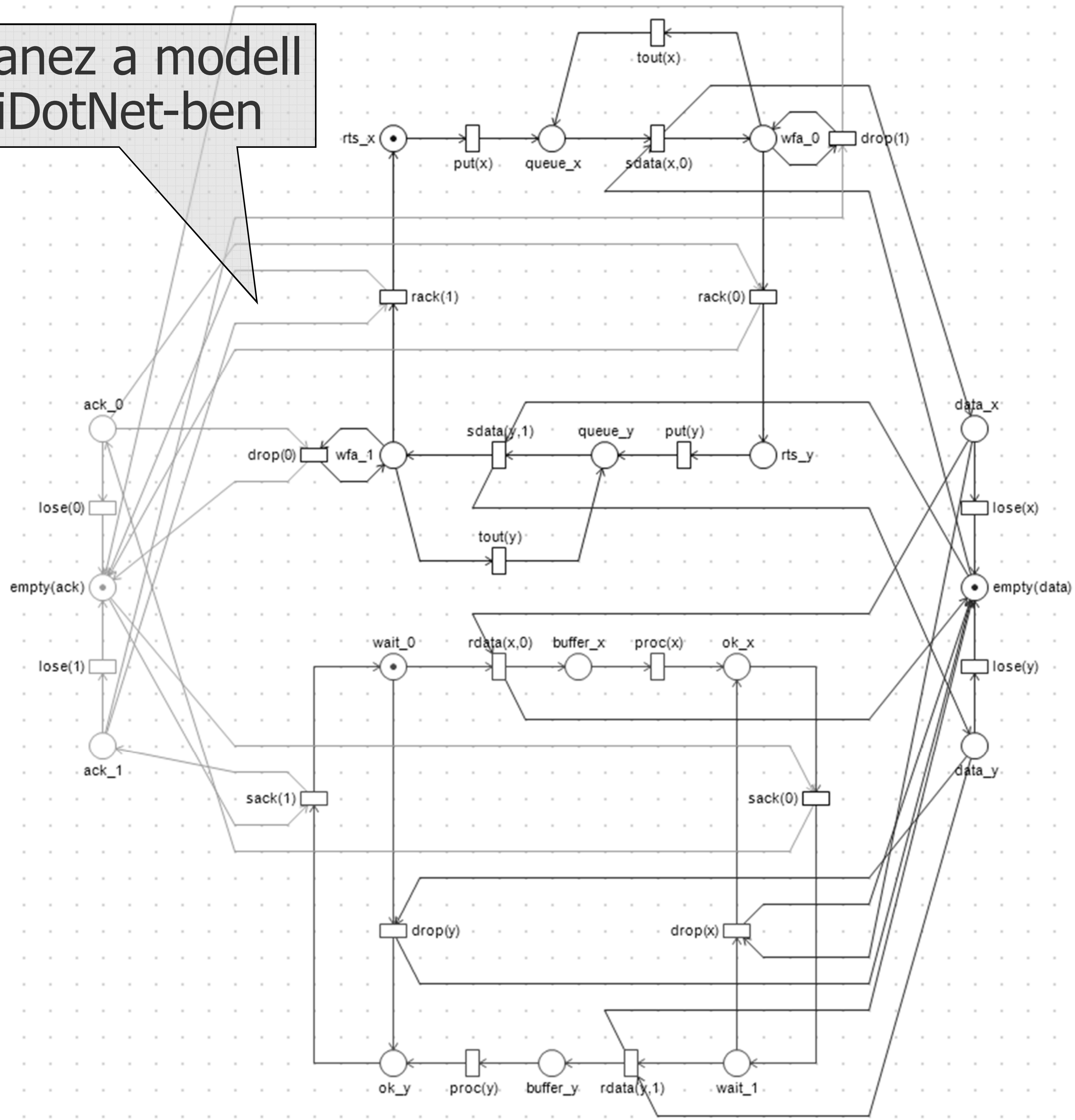
1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	s_{31}	X
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	s_{32}	
0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	s_{33}	X
0	1	1	2	0	0	0	3	0	0	s_{34}	X

3. lépés (3. oszlop szerint dolgozunk)

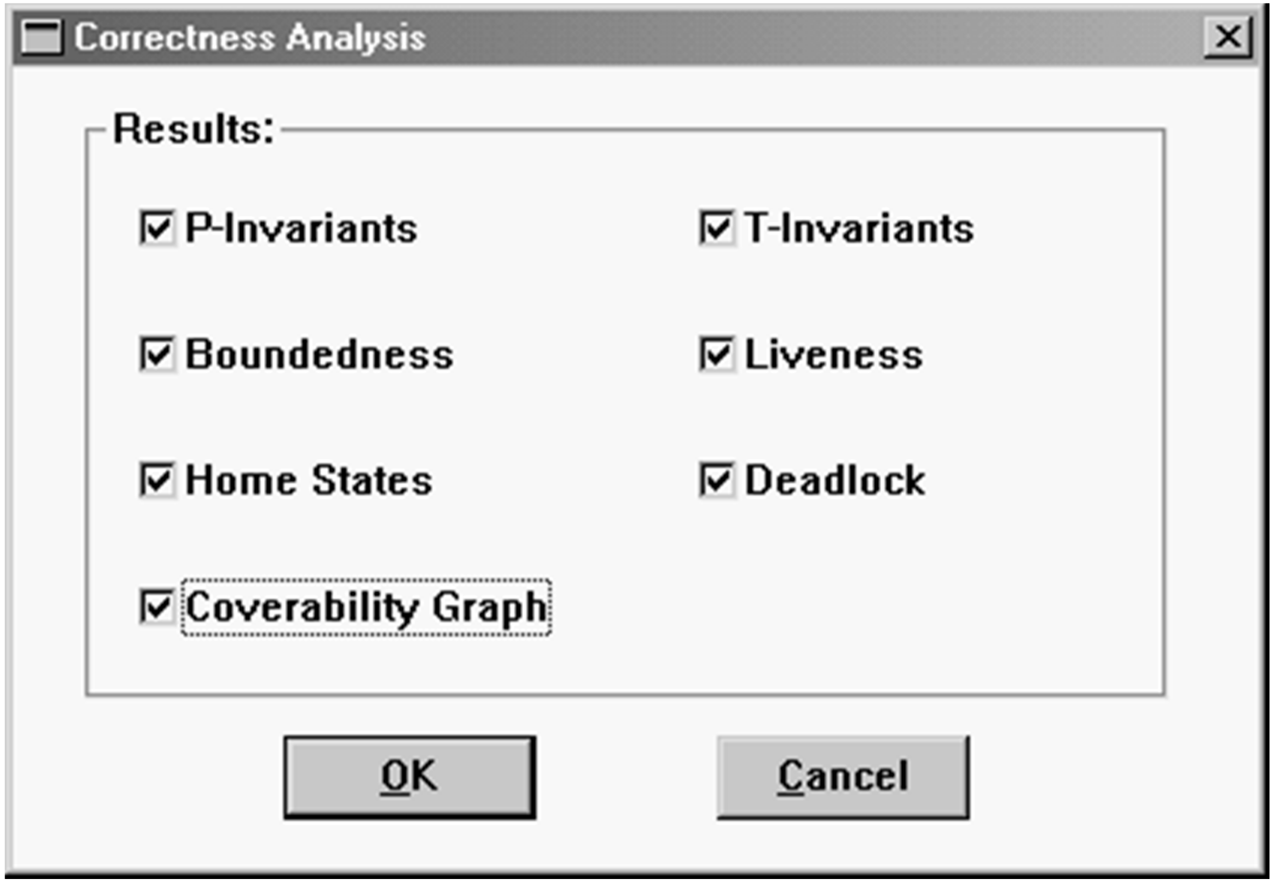
2	0	1	1	3	0	(2*31+33)
3	1	1	2	3		(3*31+34)

Példa Petri-háló modell analízisére
Alternáló bit protokoll

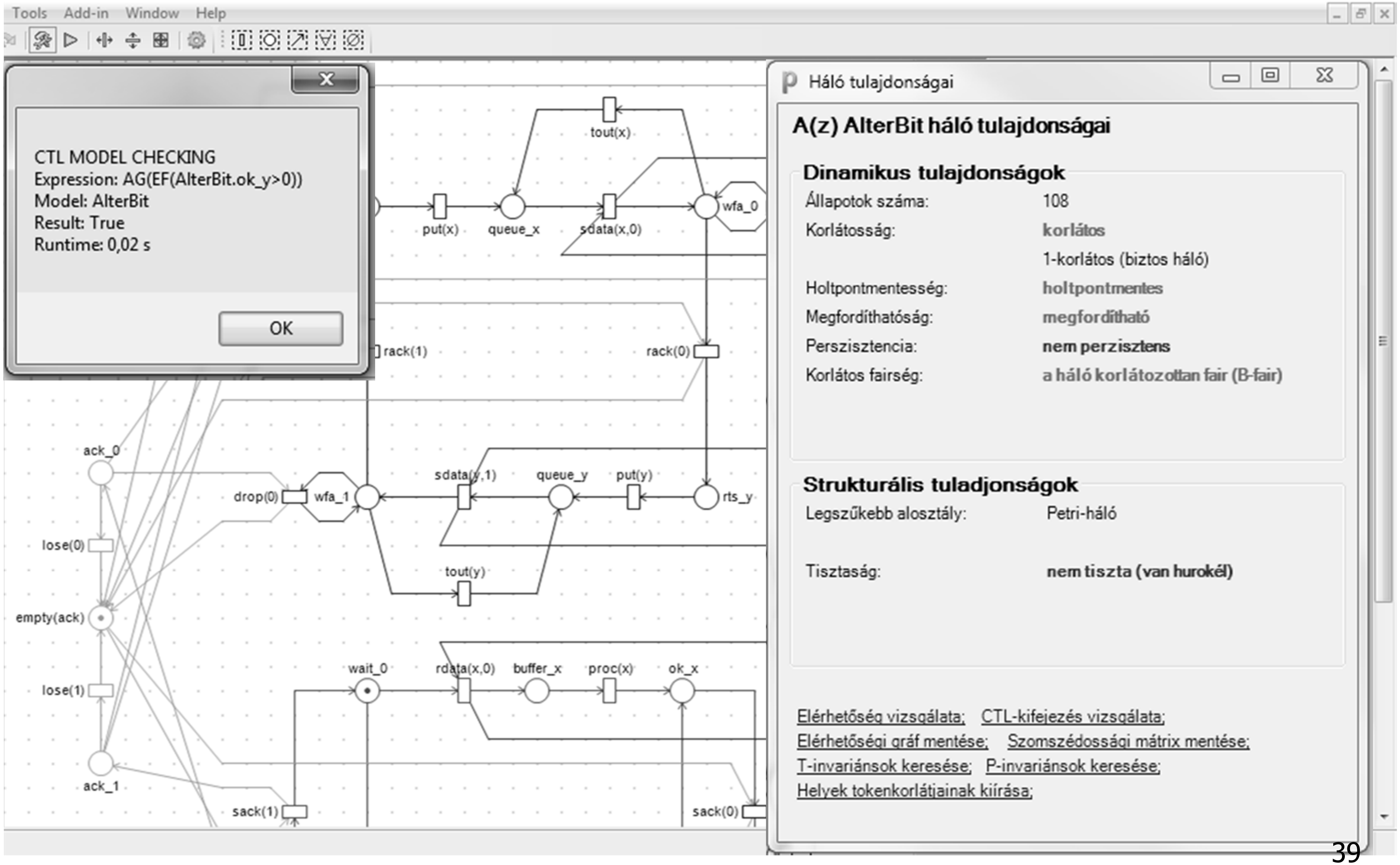
- Ugyanez a modell PetriDotNet-ben



DNAnet analízis eszköztár



PetriDotNet analízis eredmények



DNAnet: Hely invariánsok

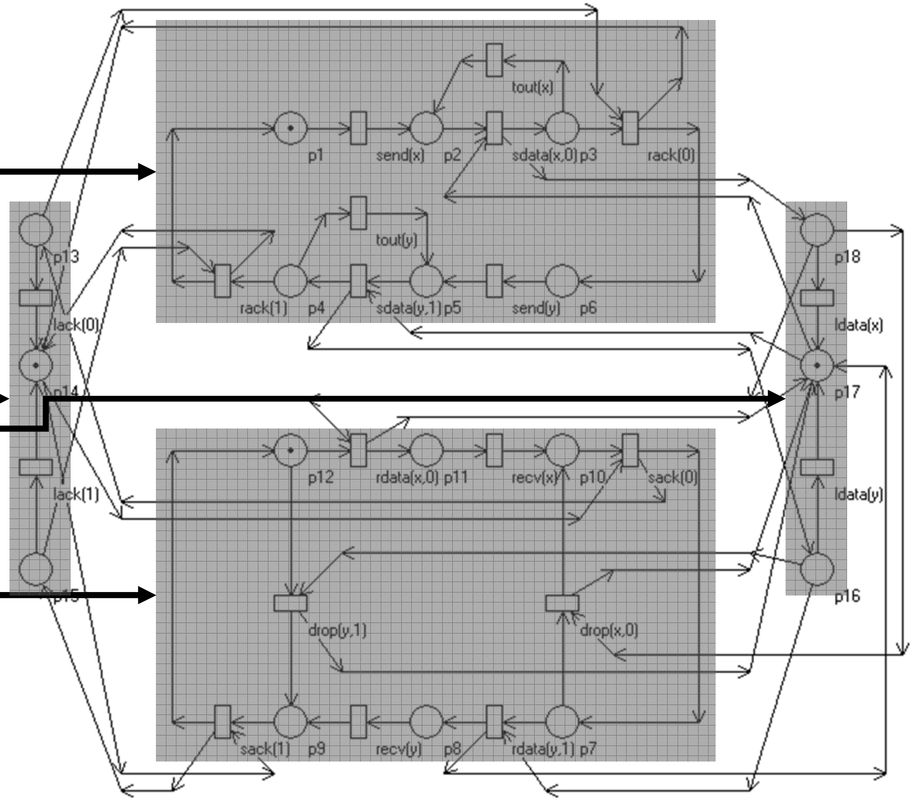
```
P-invariants:

1 0 0 0    (main.p1)
1 0 0 0    (main.p2)
1 0 0 0    (main.p3)
1 0 0 0    (main.p4)
1 0 0 0    (main.p5)
1 0 0 0    (main.p6)
0 1 0 0    (main.p7)
0 1 0 0    (main.p8)
0 1 0 0    (main.p9)
0 1 0 0    (main.p10)
0 1 0 0    (main.p11)
0 1 0 0    (main.p12)
0 0 1 0    (main.p13)
0 0 1 0    (main.p14)
0 0 1 0    (main.p15)
0 0 0 1    (main.p16)
0 0 0 1    (main.p17)
0 0 0 1    (main.p18)

ie.

M(main.p1) + M(main.p2) + M(main.p3) + M(main.p4) + M(main.p5) + M(main.p6)
M(main.p7) + M(main.p8) + M(main.p9) + M(main.p10) + M(main.p11) + M(main.p12)
M(main.p13) + M(main.p14) + M(main.p15)
M(main.p16) + M(main.p17) + M(main.p18)

All places are covered by P-invariants.
```

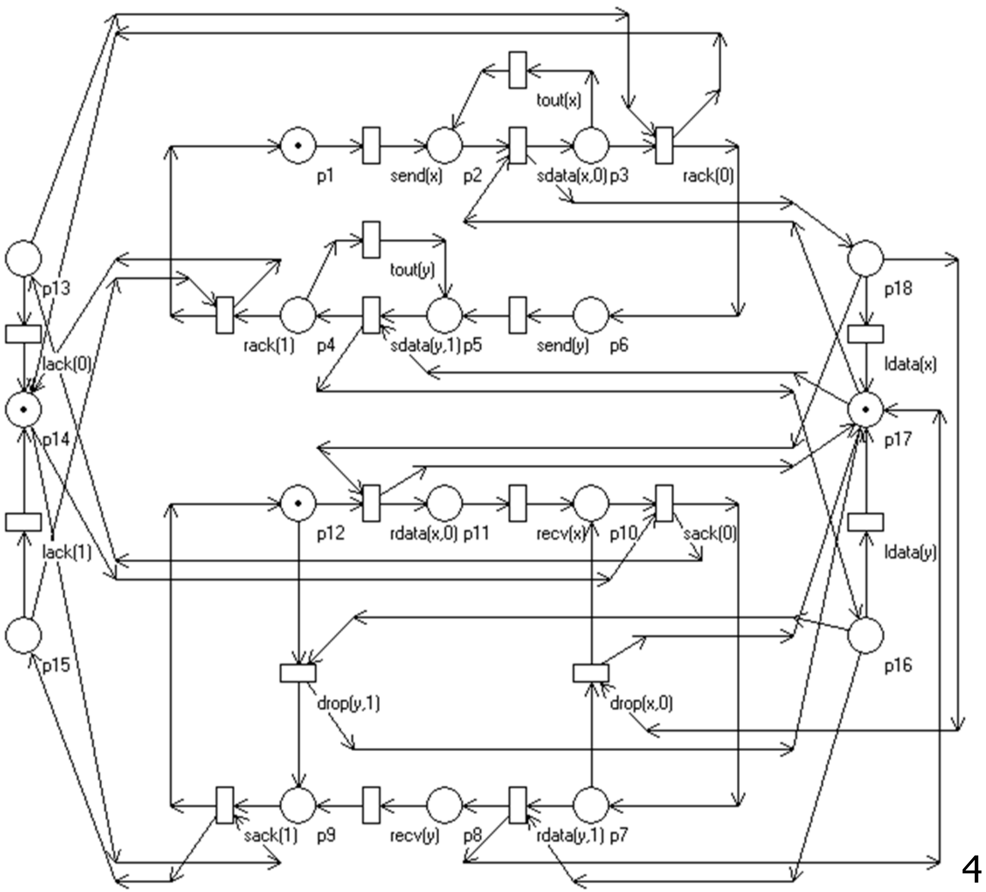


DNAnet: Tüzelési invariánsok → hibás modell!

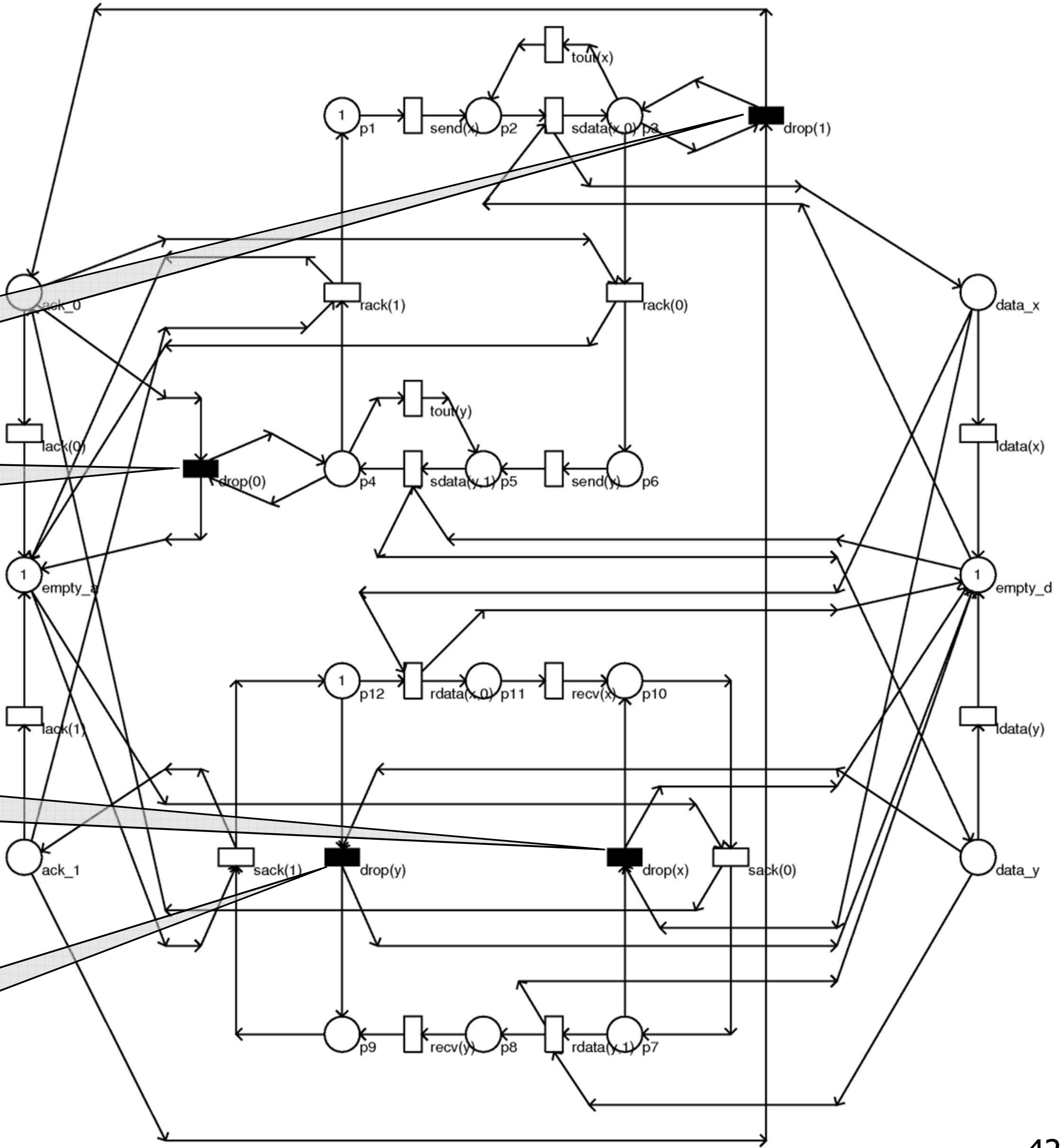
- hibátlan végrehajtás
- adatvesztés
- nyugtázás vesztés
- kétszeres nyugtázás vesztés (nem tüzelhető)
- elkésett nyugta feldolgozás

T invariants:

1	0	0	0	0	0	1	(main.send(x))
1	0	1	1	1	0	1	(main.sdata(x,0))
1	0	0	0	0	0	1	(main.rack(0))
1	0	0	0	0	0	1	(main.send(y))
1	1	0	0	1	1	1	(main.sdata(y,1))
1	0	0	0	0	0	1	(main.rack(1))
0	0	1	1	1	0	0	(main.tout(x))
0	1	0	0	1	1	0	(main.tout(y))
1	0	0	0	1	1	1	(main.sack(1))
1	0	0	0	1	0	0	(main.recv(y))
1	0	0	0	1	0	0	(main.rdata(y,1))
1	0	0	1	1	0	1	(main.sack(0))
1	0	0	0	1	0	0	(main.recv(x))
1	0	0	0	1	0	0	(main.rdata(x,0))
0	0	0	1	1	0	0	(main.lack(0))
0	0	0	0	1	1	0	(main.lack(1))
0	1	0	0	0	0	0	(main.ldata(y))
0	0	1	0	0	0	0	(main.ldata(x))
0	0	0	1	0	0	1	(main.drop(x,0))
0	0	0	0	0	1	1	(main.drop(y,1))



DNAnet: javított modell



- Hibás bittel jelölt nyugta eldobása

- Hibás bittel jelölt nyugta eldobása

- Hibás bittel jelölt üzenet eldobása

- Hibás bittel jelölt üzenet eldobása

DNAnet: Tüzelési invariánsok, javított modell

1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	(main.drop(y))
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	(main.drop(x))
1	0	1	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	(main.drop(0))
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	(main.drop(1))
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	(main.send(x))
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	(main.sdata(x,0))
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	(main.rack(0))
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	(main.send(y))
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	2	0	1	1	(main.sdata(y,1))
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	(main.rack(1))
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	(main.tout(x))
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	(main.tout(y))
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	2	0	1	1	(main.sack(1))
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	(main.recv(y))
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	(main.rdata(y,1))
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	(main.sack(0))
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	(main.recv(x))
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	(main.rdata(x,0))
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	1	(main.lack(0))
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	(main.lack(1))
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(main.ldata(y))
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	(main.ldata(x))

INA: Invariánsok

alterbit.pin

File Search Options Help

place invariants basis of net 0.alterbit :

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+
2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	+
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	+
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	+

@

alterbit.inv

File Search Options Help

transition sub/sur/invariants for net 0.alterbit :

semipositive transition invariants =

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
4	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
7	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0

@

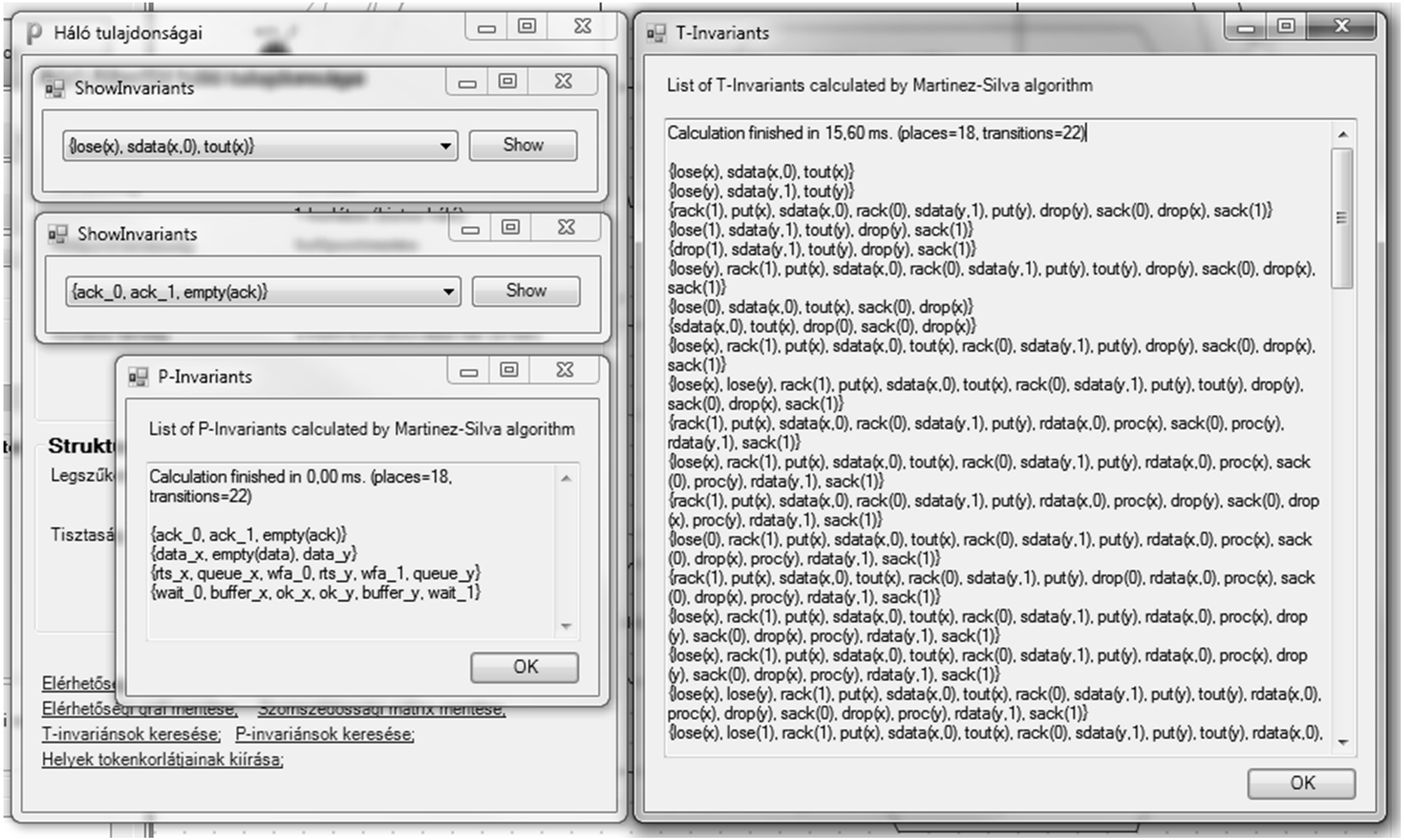
Name: /home/bartha/petrinet/ped/alterbit.inv Size: 940 Bytes

Charlie: Egy másfajta megjelenítési formátum

```
minimal semipositive place invariants=
1        |        1.data_x          :1,
         |        2.data_y          :1,
         |        5.empty_data      :1
2        |        0.ack_0           :1,
         |        3.ack_1           :1,
         |        4.empty_ack       :1
3        |        6.rts_x           :1,
         |        7.queue_x         :1,
         |        8.wfa_0           :1,
         |        9.queue_y         :1,
         |        10.rts_y          :1,
         |        11.wfa_1          :1
4        |        12.wait_0         :1,
         |        13.buffer_x       :1,
         |        14.ok_x           :1,
         |        15.wait_1         :1,
         |        16.buffer_y       :1,
         |        17.ok_y           :1
```

```
minimal semipositive transition invariants=
1        |        0.lose_x          :1,
         |        4.sdata_x_0       :1,
         |        14.tout_x         :1
2        |        2.lose_0          :1,
         |        4.sdata_x_0       :1,
         |        11.sack_0         :1,
         |        14.tout_x         :1,
         |        18.drop_x         :1
3        |        4.sdata_x_0       :1,
         |        11.sack_0         :1,
         |        14.tout_x         :1,
         |        17.drop_0         :1,
         |        18.drop_x         :1
4        |        4.sdata_x_0       :1,
         |        5.rdata_y_1       :1,
         |        6.sack_1          :1,
         |        7.rack_0          :1,
         |        8.rack_1          :1,
         |        9.sdata_y_1       :1,
         |        10.rdata_x_0      :1,
         |        11.sack_0         :1,
         |        12.put_x          :1,
         |        13.put_y          :1,
         |        20.proc_x         :1,
         |        21.proc_y         :1
```

PetriDotNet: Invariáns analízis

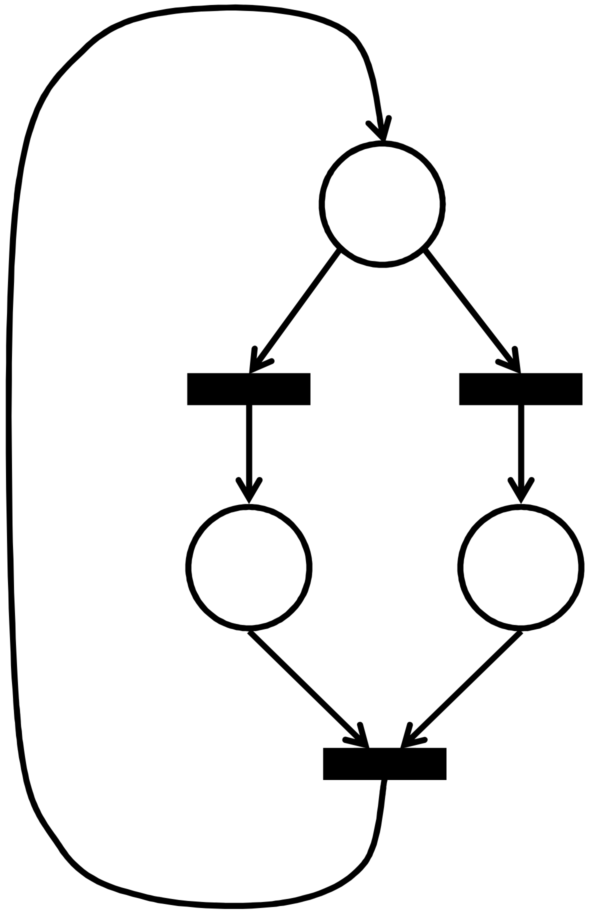


További strukturális tulajdonságok

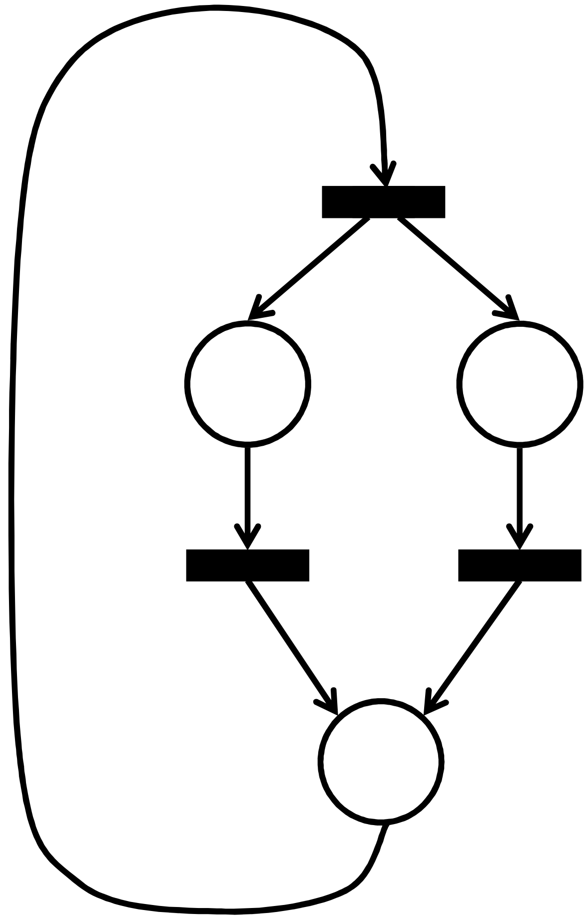
Strukturális élőség

- Egy N Petri háló strukturálisan élő, ha létezik olyan M_0 kezdőállapota, amelyben (N, M_0) (L_4-)élő
  - Szükséges feltétel: erősen összekötött gráf struktúra
  - Jelölt gráfok: egy (G, M_0) jelölt gráf a.cs.a. élő, ha M_0 állapotban minden G-beli irányított körben van legalább egy token $\rightarrow$ minden jelölt gráf strukturálisan élő
  - FC hálók: egy szabad választású háló strukturálisan élő, ha minden N–beli szifon tartalmaz csapdát
  - Általános (közönséges) Petri hálókra a strukturálisan élőség jellemzése (még) nem ismert

Strukturális élőség, korlátosság?



nincs élő jelölése



nincs nemüres biztos jelölése

Vezérelhetőség

- Egy *N* Petri háló teljesen vezérelhető, ha bármely korlátos M_0 kezdőállapot esetén:

$$\boxed{\forall M_i, M_j : M_i, M_j \in R(N, M_0) \Rightarrow M_i \in R(N, M_j) \wedge M_j \in R(N, M_i)}$$

  – azaz bármely állapot elérhető bármely más állapotból

- Elégséges feltétel: $\boxed{\mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}) = m}$
  – mert $M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \rightarrow \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = \Delta M$
  – rangfeltétel: $\mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \mid \Delta M) = m$
  ahol m a helyek száma.

- Ue. szükséges feltétel is jelölt gráfok esetén

Strukturális korlátosság

- Egy N Petri háló strukturálisan korlátos, ha bármely korlátos M_0 kezdőállapotra korlátos marad
- Feltétele: létezik egy m pozitív komponensű $\vec{\mu}$

$$\boxed{\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0}$$

- Szükségesség: $M \in R(N, M_0) \to M = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}, \vec{\sigma} \geq 0$
  - átrendezve: $M^{\mathrm{T}}\vec{\mu} = M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu} + \underbrace{\vec{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\vec{\mu}}_{\mathbf{W}\vec{\mu}\leq 0, \vec{\sigma}\geq 0}$ ← felhasználjuk a feltételt

    (belső szorzat)
  - felső korlát: $M^{\mathrm{T}}\vec{\mu} \leq M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu} \Rightarrow M(p) \leq \dfrac{M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu}}{\mu_p}$

Strukturális korlátosság: elégségesség

- $\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\mu} \le 0$ feltétel elégséges is, mert
  - egyébként $\exists \vec{\sigma} \ge 0 \colon \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\ge} 0$

$$\exists M, M_0 : M - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\ge} 0 \to M \underset{\neq}{\ge} M_0$$

  - ekkor megfelelő M_0 választásával $\vec{\sigma}$ tetszőlegesen sokszor végrehajtható és N nem korlátos

Lineáris mátrixegyenlőtlenségek

vagy az egyik, vagy a másik megoldható

Lemma	Rendszer$_1$	Rendszer$_2$
Minkowski-Farkas	$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} \vec{b}$, $\vec{\sigma}$ tetszőleges	$\mathbf{W}\vec{\mu} = 0, \vec{\mu} \geq 0, \vec{\mu}^{\mathrm{T}}\vec{b} > 0$
Minkowski-Farkas	$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} \vec{b}, \vec{\sigma} \geq 0$	$\mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0, \vec{\mu} \geq 0, \vec{\mu}^{\mathrm{T}}\vec{b} > 0$
Stiemke	$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$, $\vec{\sigma}$ tetszőleges $\rightarrow$ nem konzervatív	$\mathbf{W}\vec{\mu} = 0, \vec{\mu} > 0$ $\rightarrow$ konzervatív
Farkas	$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0, \vec{\sigma} \geq 0$ $\rightarrow$ nem strukturálisan korlátos	$\mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0, \vec{\mu} > 0$ $\rightarrow$ strukturálisan korlátos

Konzervativitás

- Egy *N* Petri háló (részlegesen) konzervatív, ha bármely korlátos M_0 és $M \in R(N, M_0)$ állapotra minden (néhány) $p \in P$ helyhez található egy μ_p pozitív egész súlytényező, hogy $M\vec{\mu} = M_0\vec{\mu} = \text{állandó}$
- Szükséges és elégséges feltétel: $\boxed{\exists \vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}\vec{\mu} = 0}$

Ismételhetőség

- Egy *N* Petri háló (részlegesen) ismételhető, ha létezik olyan M_0 kezdőállapot és M_0-ből induló σ tüzelési szekvencia, hogy minden (néhány) $t \in T$ tranzíció végtelen sokszor tüzel σ-ban
- Szükséges és elégséges feltétel: $\boxed{\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0}$
  - Bizonyítás: $\exists \vec{\sigma} > 0 \text{:}\ \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0$

    $$\exists M, M_0 : M - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0 \rightarrow M \geq M_0$$
  - ekkor megfelelő M_0 választásával $\vec{\sigma}$ tetszőlegesen sokszor végrehajtható

Konzisztencia

- Egy *N* Petri háló (részlegesen) konzisztens, ha létezik olyan M_0 kezdőállapot és M_0-ből induló és M_0-ba visszavezető σ tüzelési szekvencia, hogy minden (néhány) $t \in T$ tranzíció legalább egyszer tüzel σ-ban
- Szükséges és elégséges feltétel: $\boxed{\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} = 0}$
  - Bizonyítás: ismételhetőség feltételénél látott módon

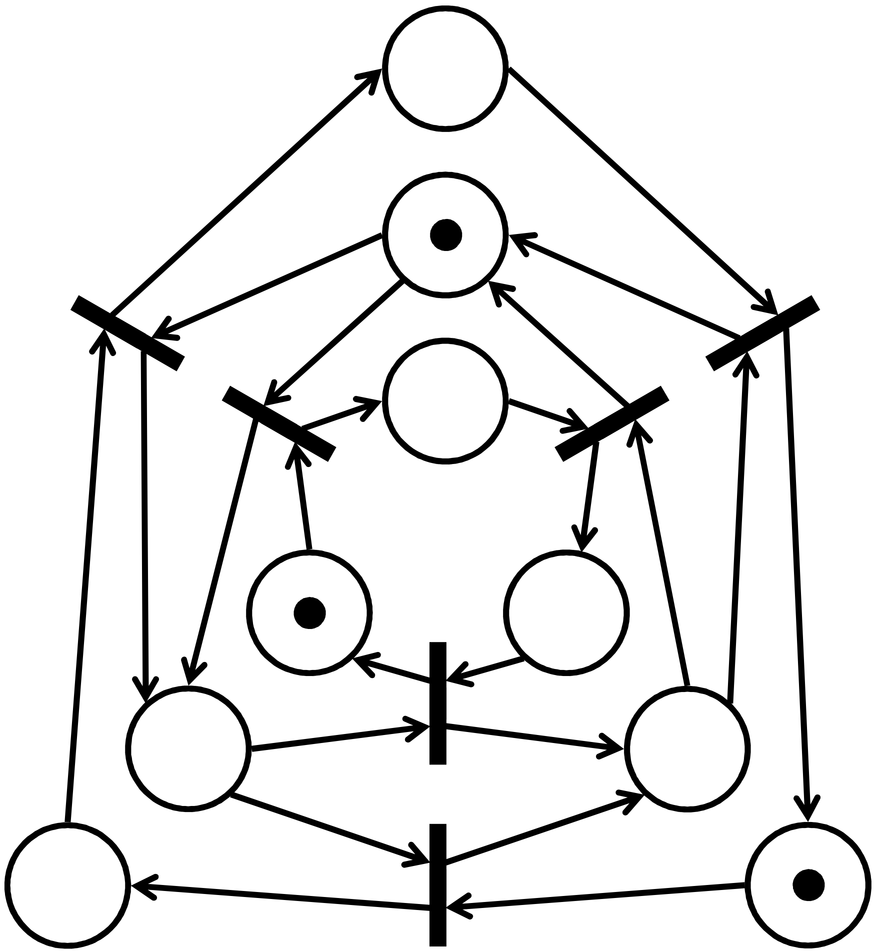
Strukturális B-fairség

- Két tranzíció strukturálisan B-fair, ha bármely M_0 kezdőállapot esetén B-fair (korlátos fair) relációban állnak.
- Egy *N* Petri háló B-fair, ha bármely két tranzíciója esetén a B-fair reláció teljesül
- Egy *N* Petri háló strukturálisan B-fair, ha bármely M_0 kezdőállapotra a háló B-fair
  - B-fair reláció ekvivalencia reláció $\rightarrow$ tranzíciókat ekvivalencia osztályokba csoportosítja
  - Strukturális B-fair reláció $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ B-fair reláció

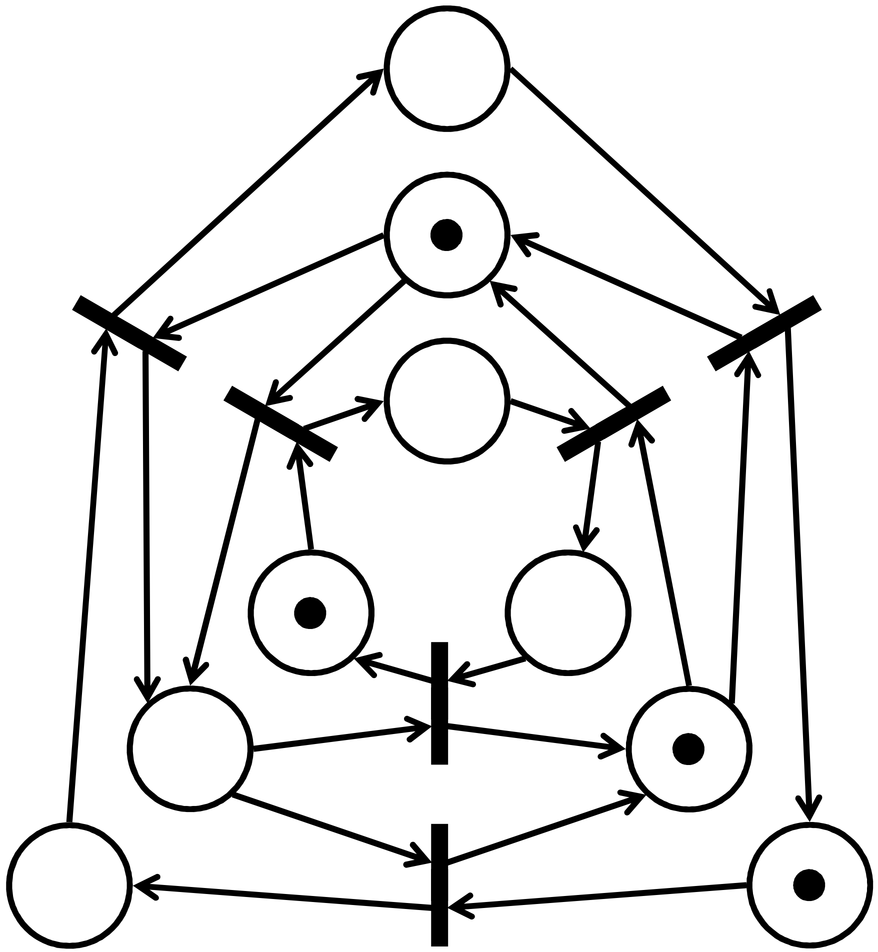
Strukturális B-fairség feltétele

- Egy strukturálisan korlátos Petri háló a.cs.a. strukturálisan B-fair, ha
  - konzisztens és <u>csak egy</u> minimális nemnegatív T-invariánsa van, vagy
  - nem konzisztens és nincs minimális nemnegatív T-invariánsa
- Minden erősen összekötött jelölt gráf strukturálisan B-fair

B-fair, de nem strukturálisan B-fair háló



élő és B-fair M_0



élő, de nem B-fair M_0

Összefoglalás

	Tulajdonság	Szükséges és elégséges felt.
SB	Strukturálisan korlátos	$\exists \vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0 \ (\text{vagy} \nexists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0)$
CN	Konzervatív	$\exists \vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} = 0 \quad (\text{vagy} \nexists \vec{\sigma}, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0)$
PCN	Részlegesen konzervatív	$\exists \vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}\vec{\mu} = 0$
RP	Ismételhető	$\exists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \geq 0$
PRP	Részlegesen ismételhető	$\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \geq 0$
CS	Konzisztens	$\exists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = 0 \quad (\text{vagy} \nexists \vec{\mu}, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0)$
PCS	Részlegesen konzisztens	$\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = 0$

További strukturális tulajdonságok

Ha	Akkor
N strukturálisan korlátos és strukturálisan élő	*N* konzervatív és konzisztens.
$\exists \vec{\mu} \geq 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\leq} 0$	Létezik nem élő M_0 *N*–hez. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\mu} \geq 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0$	(*N*, M_0) nem korlátos egy élő M_0 esetén. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\sigma} \geq 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\leq} 0$	Létezik nem élő M_0 strukturálisan korlátos *N*–hez. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\sigma} \geq 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$	*N* nem strukturálisan korlátos. *N* nem konzervatív.