Petri hálók strukturális tulajdonságai Invariánsok és számításuk

dr. Bartha Tamás

dr. Majzik István

dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Vizsgálati lehetőségek (ismétlés)

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció ⬅ Egy-egy trajektória bejárása
- Állapottér bejárása ⬅ Minden trajektória bejárása (kimerítő bejárás)
  - elérhetőségi gráf analízis
  - dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
- Strukturális tulajdonságok ⬅ Kezdőállapottól független (bármely kezdőállapotra)
  - állapotegyenlet analízis
  - invariáns tulajdonságok

Strukturális tulajdonságok

Petri hálók kezdőállapot-független tulajdonságai:

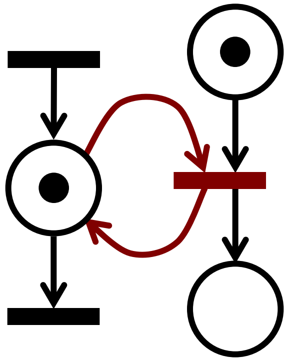
- Strukturális korlátosság
- Vezérelhetőség
- Konzervativitás
  - Hely invariáns,
    P- (place) invariáns
- Strukturális élőség
- Ismételhetőség
- Konzisztencia
  - Tüzelési invariáns,
    T- (transition) invariáns

Csak a háló struktúra határozza meg őket:

- vagy ∀ korlátos kezdő tokeneloszlásra igazak,
- vagy ∃ olyan korlátos kezdő tokeneloszlás, amire igazak

Állapotegyenlet bevezetése

- Petri háló dinamikája: tokeneloszlás módosulása
  - Egyenletekkel megadható változások
- Előfeltétel (egyértelműséghez): tiszta Petri háló
  - Nincs olyan tranzíció, amely egyazon helynek egyszerre bemenő és kimenő tranzíciója: $\forall t \in T : \bullet t \cap t \bullet = \varnothing$
  - Nincs „hurokél”
    - a tüzeléskor a tokeneloszlás nem változik
    - de a tüzelési feltételben szerepet játszik



Tüzelési szekvencia

- Tüzelési szekvencia:

$$\boxed{\vec{\sigma} = \left\langle M_{i_0} t_{i_1} M_{i_1} \ldots t_{i_n} M_{i_n} \right\rangle = \left\langle t_{i_1} \ldots t_{i_n} \right\rangle}$$

- Elérhetőség:

$$M_{i_0} \left[\vec{\sigma} > M_{i_n}\right.$$

- Tüzelési szekvencia engedélyezése:
  - $t_{i,j}$ tranzíció minden $p \in \bullet t_{i,j}$ bemenő helyén elég token

$$\boxed{\forall t_{i_j} \in \vec{\sigma}, \forall p \in \bullet t_{i_j} : M_{i_{j-1}}(p) \geq w^-(p, t_{i_j}) = \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}} \vec{e}_{i_j}}$$

Állapotegyenlet

- Tokeneloszlás módosulása:
  - $t_{i,j}$ tranzíció engedélyezett $\rightarrow$ tüzel
    - minden $p \in \bullet t_{i,j}$ bemenő helyéről $w^{-}(p, t_{i,j})$ tokent vesz el
    - minden $p \in t_{i,j}\bullet$ kimenő helyére $w^{+}(p, t_{i,j})$ tokent tesz ki

$$\boxed{M_{i_j} = M_{i_{j-1}} - \mathbf{W}^{-\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j} + \mathbf{W}^{+\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j} = M_{i_{j-1}} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_{i_j}}$$

    - összeadva és átrendezve adódik a tokeneloszlás módosulása:

$$\boxed{M_{i_0}\left[\vec{\sigma} > M_{i_n} \Rightarrow M_{i_n} - M_{i_0} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T\right.}$$

- Tüzelési szám vektor: az egyes tranzíciók tüzeléseinek száma a tüzelési szekvenciában

Állapotegyenlet levezetése

$$M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1}$$

$$M_2 = M_1 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} = \overbrace{M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2}}^{M_1 \text{ behelyettesítésével}}$$

$$\dots$$

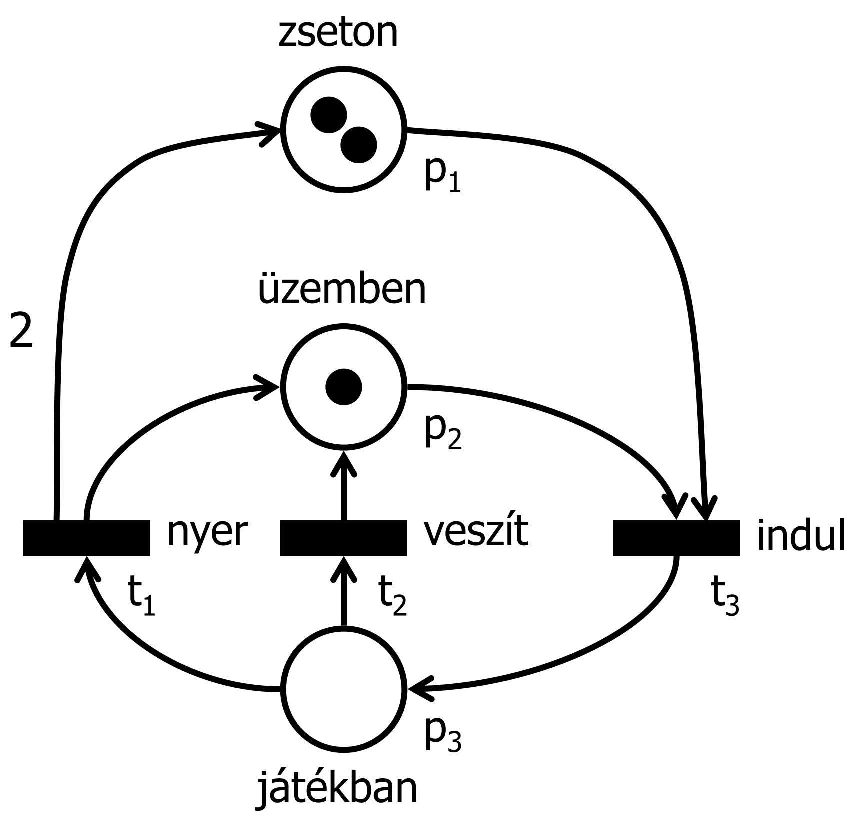
$$M_{n+1} = M_n + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_{n+1}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} + \dots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_{n+1}}$$

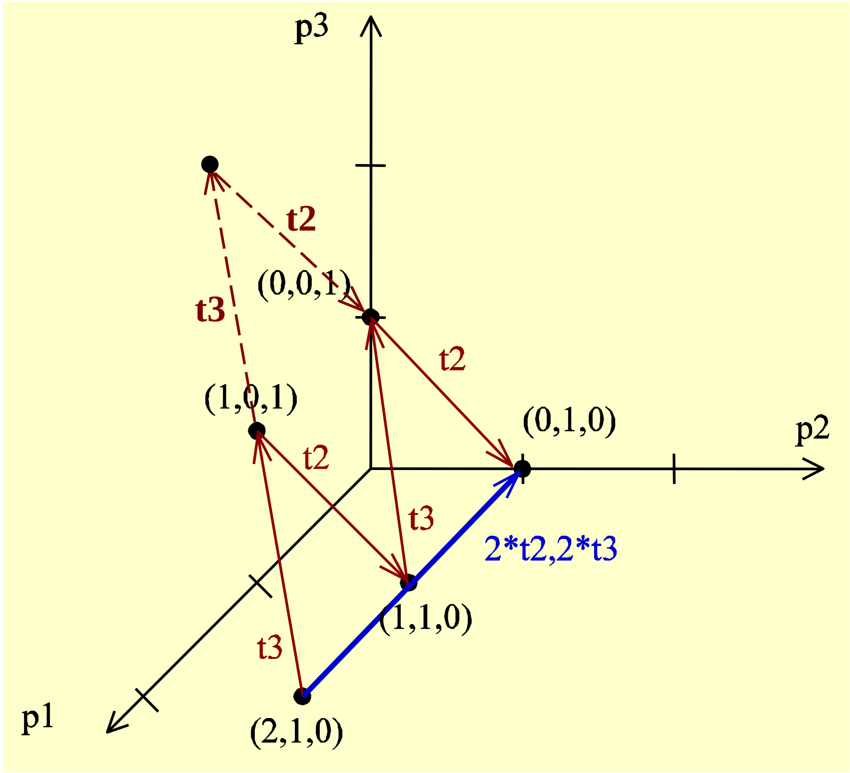
$$\dots \qquad \Downarrow$$

$$M_m = M_0 + \underbrace{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} + \dots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_m}}_{\text{összevonva}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{m}\vec{e}_{t_i}$$

$$M_m = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T \Rightarrow \boxed{M_m - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T}$$

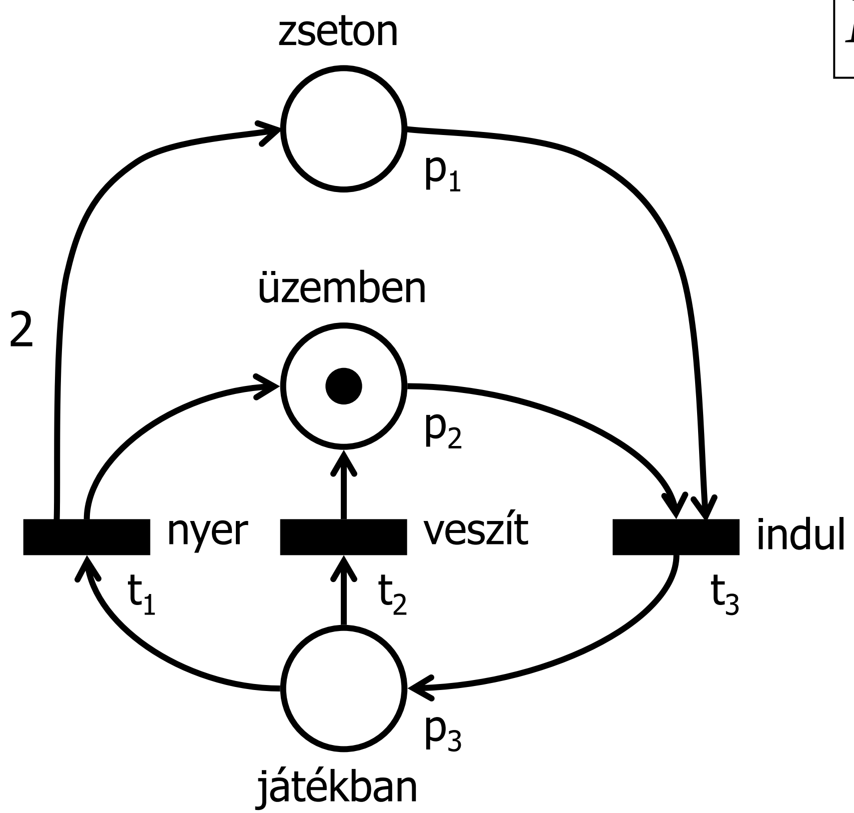
Állapotegyenlet és elérhetőség





- A tüzelési szám vektorban kevesebb az információ, mint a tüzelési szekvenciában! (Pl. a sorrend elveszik.)

Állapotegyenlet és elérhetőség



$$M_{i_0}\left[\vec{\sigma} > M_{i_n} \Rightarrow M_{i_n} - M_{i_0} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T\right.$$

- Kiszámolható olyan tüzelési szám vektor, amihez nem tartozik tüzelési szekvencia:

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(1,1,0)^{\mathrm{T}} - (0,1,0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot (1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

Itt t_1 és t_3 sem nem tüzelhető a (0,1,0) kezdőállapotban!

Tüzelési invariánsok és hely invariánsok

Tüzelési invariáns (T-invariáns)

A σ_T tüzelési szám vektor T-invariáns, ha végrehajtása nem változtatja meg a tokeneloszlást:

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0}$$

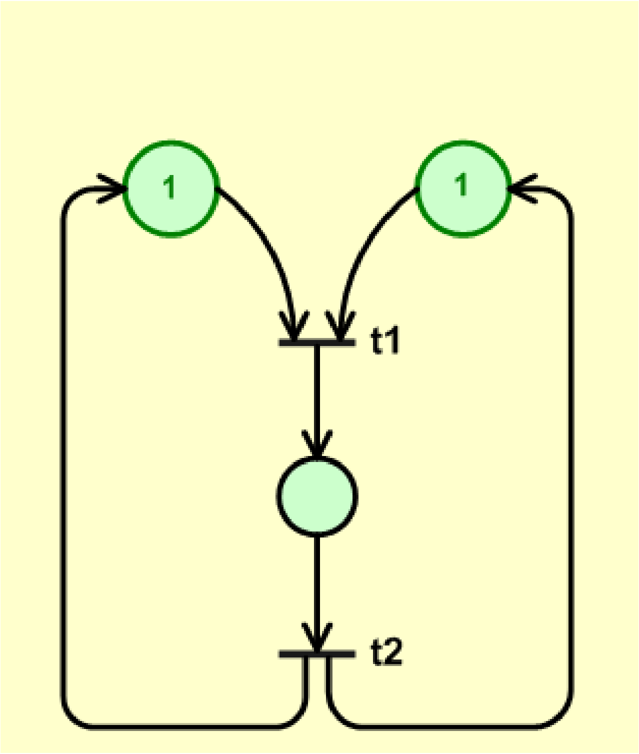
- Ciklus az állapottérben: $M_i\left[\vec{\sigma}_T > M_i\right.$
- Ha a σ_T szekvencia az M_i állapotból végrehajtható!

$$\boxed{\forall t_{i_j} \in \vec{\sigma}, \forall p \in \left\{\bullet t_{i_j}\right\} : m_{i_{j-1}}\left(p\right) \geq w^{-}\left(p, t_{i_j}\right) = \mathbf{W}^{-\mathrm{T}} \cdot \vec{e}_{i_j}}$$

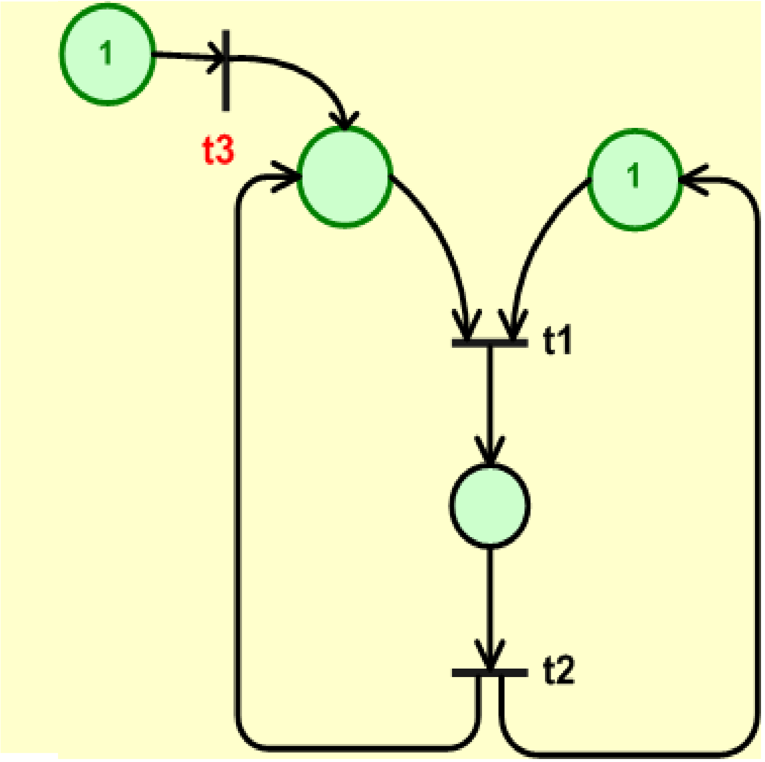
- Megjegyzés: bármely σ tüzelési szekvenciához található olyan M_0 kezdőállapot, amelyből σ végrehajtható
  - Pl. $M_0 \geq \mathbf{W}^{-^{\mathrm{T}}}\vec{\sigma}$ esetén induláskor annyira „teletömött”, hogy a σ tüzelési szekvencia által termelt tokenekre már nincs szükség!

Példa T-invariánsra

$t_1 - t_2$ után a tokeneloszlás ugyanez



$t_3 - t_1 - t_2$ tüzelési szekvencia nem ismételhető



T-invariánsok halmaza

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0}$$

Homogén, lineáris egyenletrendszer

- egy megoldás többszöröse is megoldás
  - ha tüzelhető, akkor többször is befutja a ciklust
- megoldások összege is megoldás
  - ha tüzelhető, akkor több ciklus kombinációját futja be
- megoldások lineáris kombinációi is megoldások

A megoldásokhoz bázis kereshető

- az összes megoldást előállító minimális halmaz

Minimális T-invariáns

- Jelölés: A σ tüzelési szekvencia sup(σ) alapja:
  - azon tranzíciók $T' = \{t_i \mid \sigma_i > 0\}$ részhalmaza, amelyek σ szekvenciában előfordulnak
- A σ_T tüzelési invariáns minimális alapú
  - ha nincs olyan T-invariáns, amelynek alapja σ_T alapjának valódi részhalmaza, vagy
  - ha részhalmaza azonos, annak tüzelési számai kisebbek

$$\boxed{\forall \sigma_T^1 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sigma_T^1 = 0 \Rightarrow \left(\sigma_T^1 \geq \sigma_T\right) \vee \left(\sup(\sigma_T) \not\subseteq \sup(\sigma_T^1)\right)}$$

Hely invariáns (P-invariáns)

A μ_P súlyvektor által kijelölt helyek, ahol a tokenek súlyozott összege nem változik:

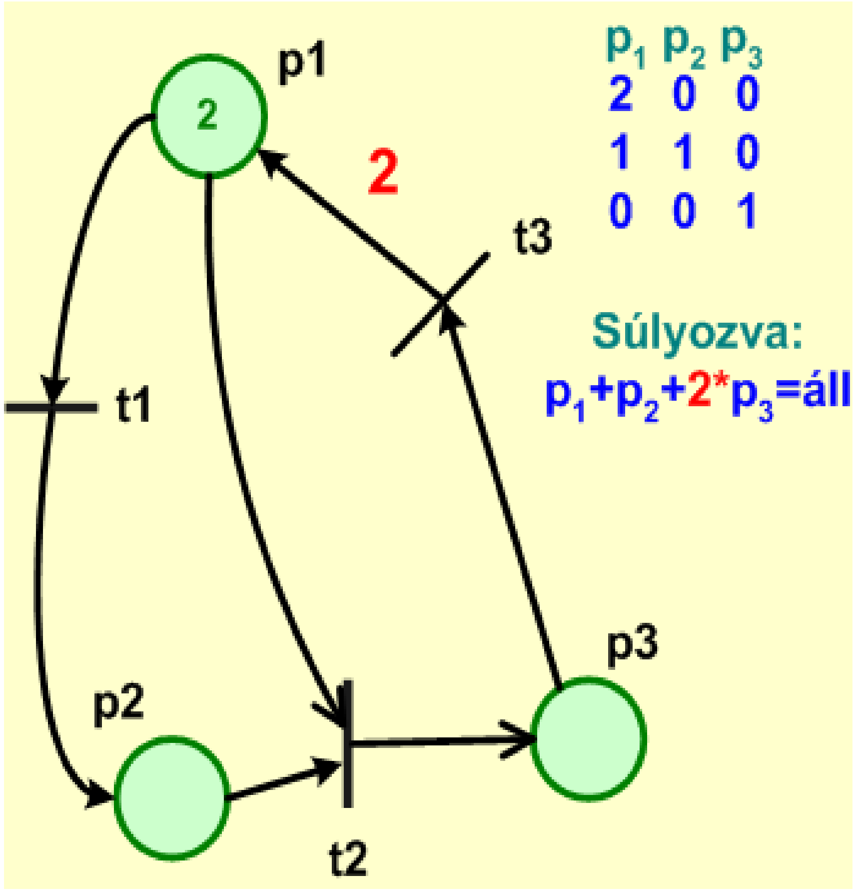
$$\boxed{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \text{állandó}}$$

– A tokenek (egy része) a helyek egy részhalmazában állandó (pl. erőforrások nem fogynak, nem keletkeznek)

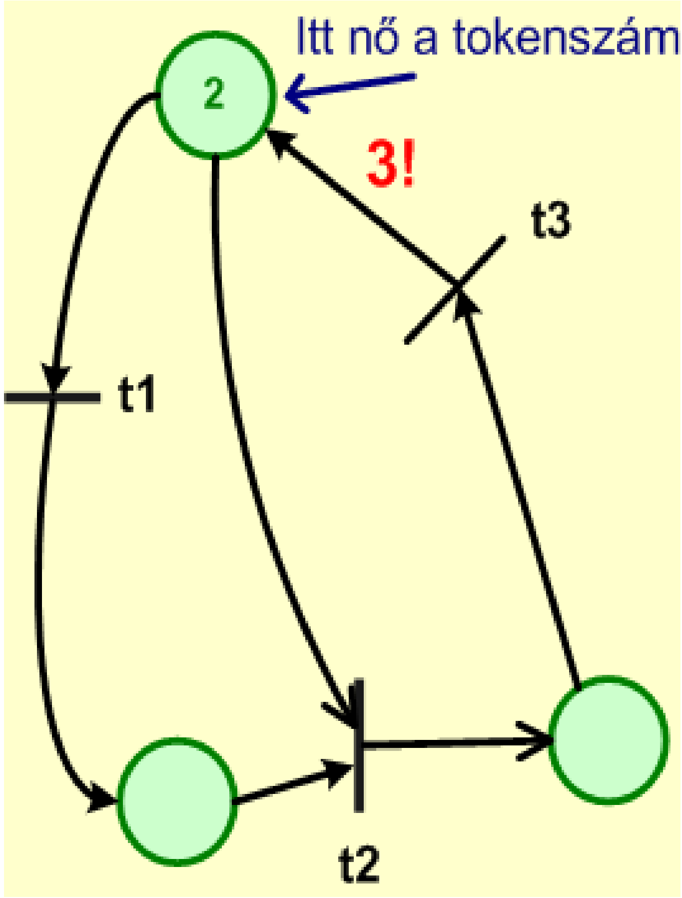
$$\left.\begin{aligned} &M = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \\ &\underbrace{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_0}_{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_0 = \text{állandó}} + \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \\ &\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \underset{\forall \vec{\sigma}}{\equiv} 0 \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\mathbf{W}\vec{\mu}_P = 0}$$

Példa P-invariánsra

P-invariáns p_1, p_2, p_3-ra:



NEM P-invariáns:

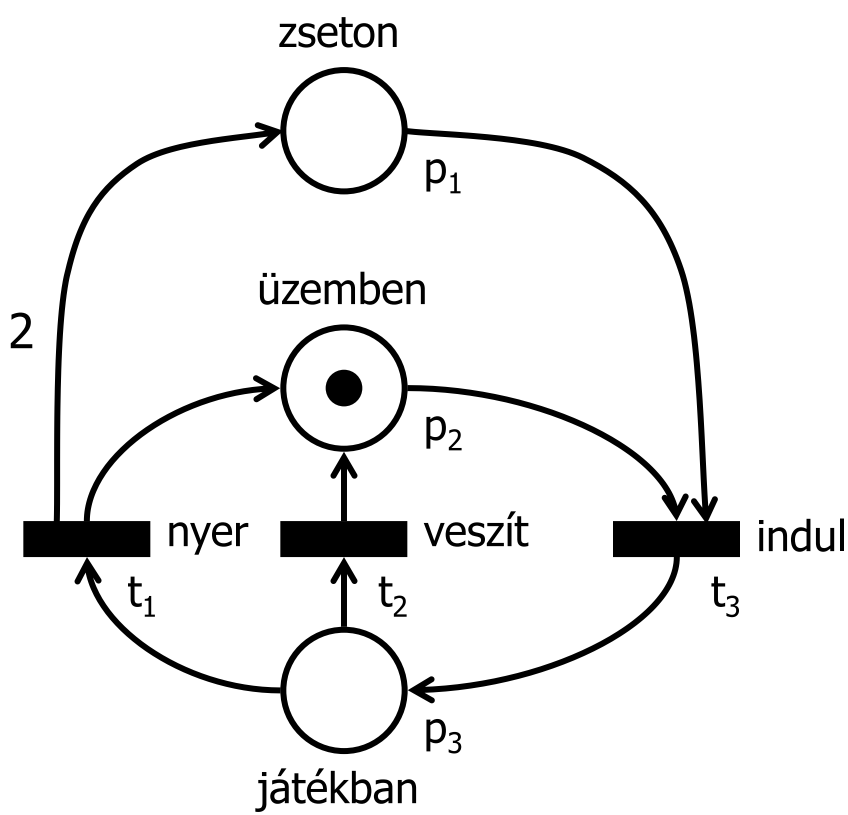


Invariánsok alkalmazásai

- T-invariánsok alkalmazásai
  - Folyamatok modellje esetén: Ciklikusság
  - Dinamikus tulajdonságok
    - Ciklikusan tüzelhető → megfordíthatóság, visszatérő állapot
    - Később is tüzelhető → élő tulajdonság, holtpontmentesség
- P-invariánsok alkalmazásai
  - Folyamatok modellje esetén: Erőforrások használata
  - Dinamikus tulajdonságok
    - token nem vész el → élő tulajdonság, holtpontmentesség
    - token nem termelődik → korlátosság

Invariánsok számítása

Van-e a példában invariáns?



- P-invariáns: $\mathbf{W} \cdot \mu_P = 0$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c|ccc|c} & t_1 & t_2 & t_3 & \\ \hline p_1 & 2 & 0 & -1 & \\ p_2 & 1 & 1 & -1 & \times 1 \\ p_3 & -1 & -1 & 1 & \times 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{W} \cdot (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} = 0$$

- T-invariáns: $\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma_T = 0$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c|ccc|} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline p_1 & 2 & 0 & -1 \\ p_2 & 1 & 1 & -1 \\ p_3 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & \times 1 & \times 1 & \times 2 \end{array}$$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot (1, 1, 2)^{\mathrm{T}} = 0$$

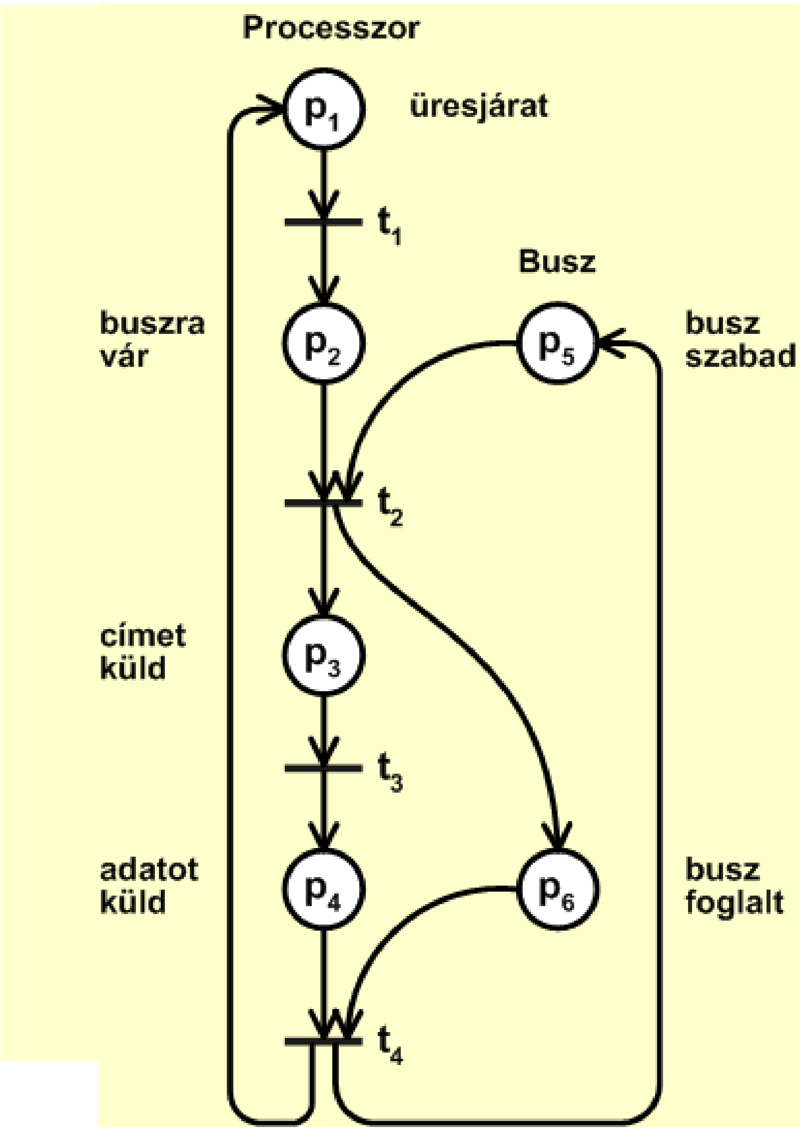
Megoldási módszerek

Kérdések:

- σ_T bázis komponenseinek értelmezési tartománya?
- a lineáris kombinációk együtthatóinak értelmezési tartománya?

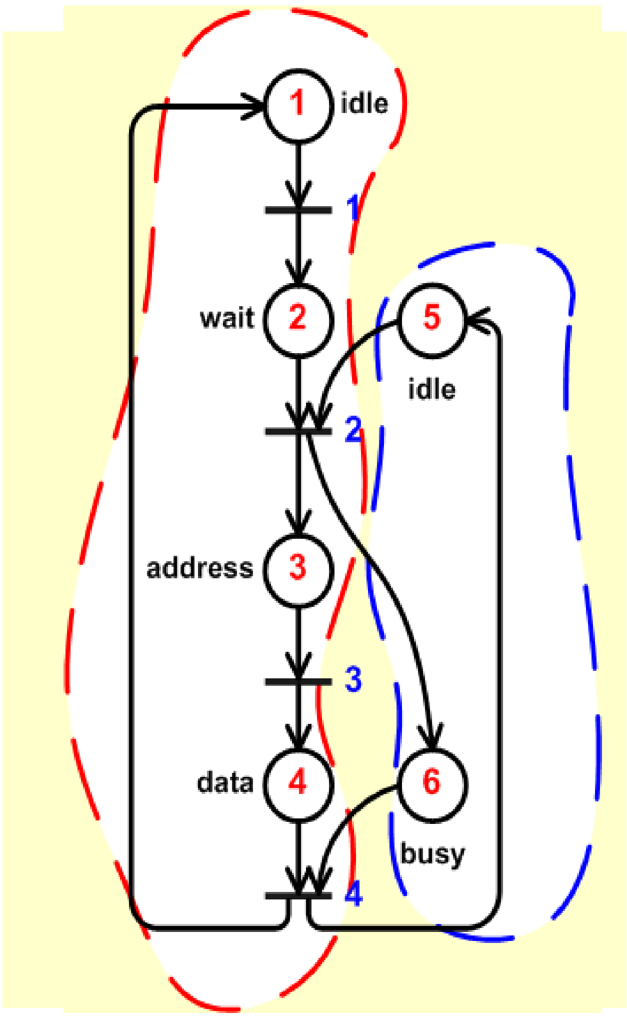
Szint	Tartomány	Együttható	Lineárisan független?	Egyértelmű?	Algoritmus
1	$x \in \mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	Igen	Nem	Gauss elimináció
2	$x \in \mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	Igen	Nem	Hermite redukció
3	$x \in \mathbf{N}_0$	$\mathbf{Q}_0$	Nem biztos	Igen	Martinez-Silva
4	$x \in \mathbf{N}_0$	$\mathbf{N}_0$	Nem biztos	Igen	Pascoletti
5	$x \in \mathbf{B}$	$\mathbf{B}$	Nem biztos	Igen	Jaxy

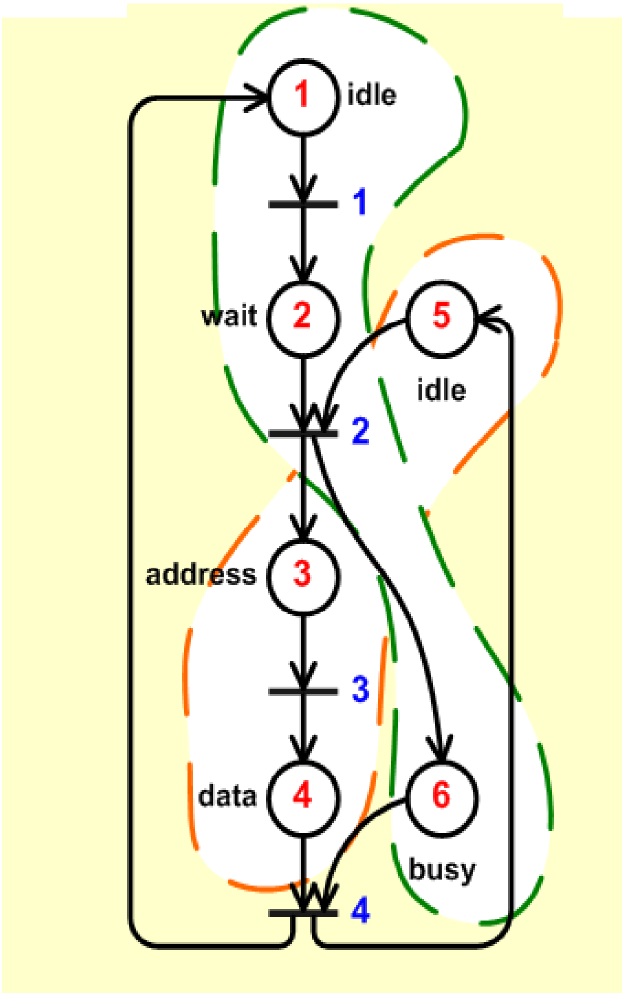
Példa: processzor adatátvitel



- Processzor
  - várakozik (idle - üresjárat)
  - busz hozzáférési jogot kér
  - címet tesz ki a címbuszra
  - adatot tesz ki az adatbuszra
- Busz(ok)
  - szabad (nem használja senki)
  - foglalt (processzor/periféria)
- Petri háló
  - n = 4 darab átmenet
  - m = 6 darab hely

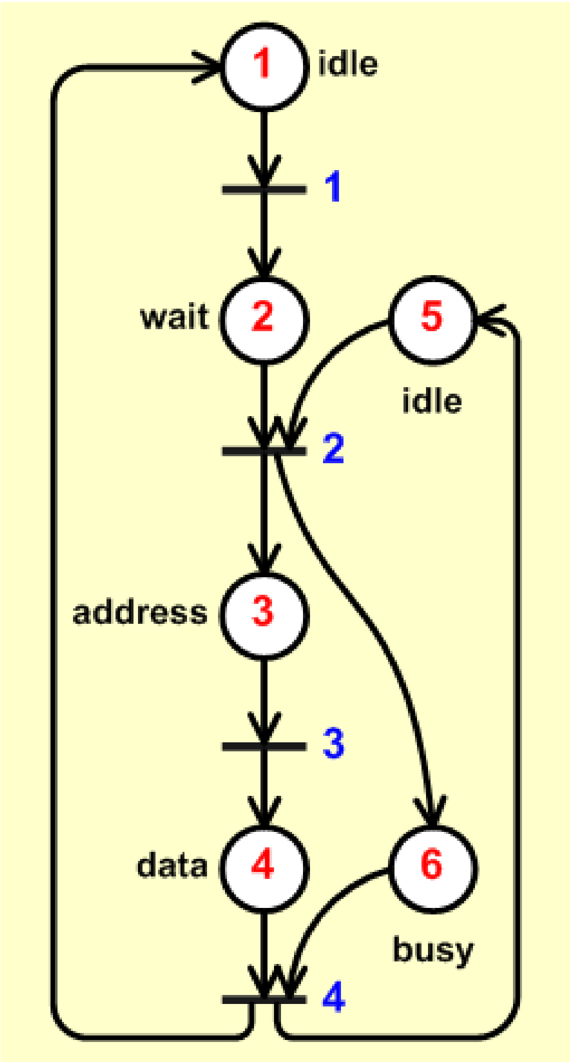
P-invariánsok: Keressük meg fejben a megoldást!





Négy P invariáns található

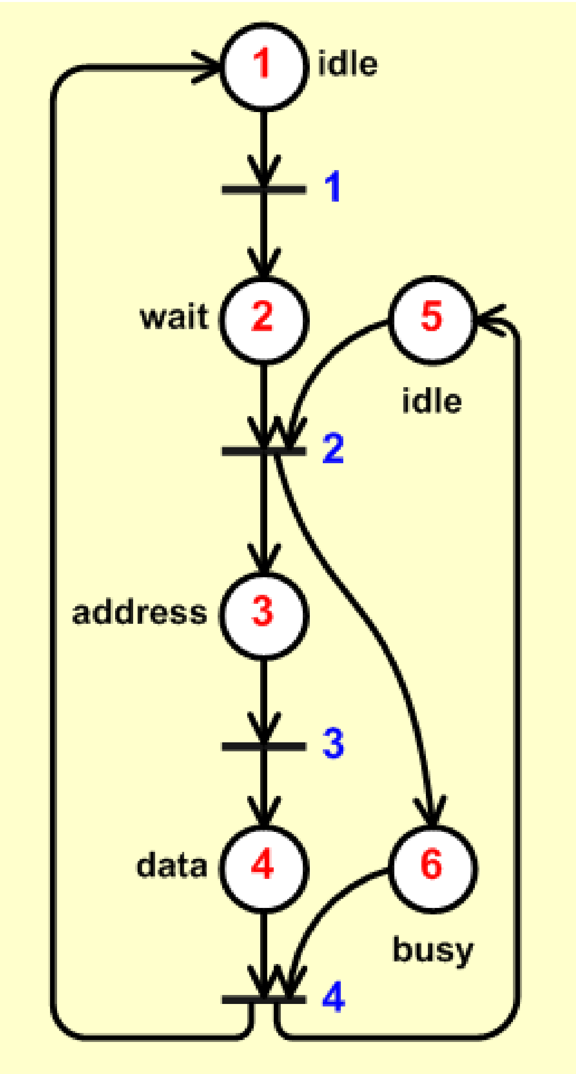
Szomszédossági mátrixok



$$W^{-} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} \end{array}$$

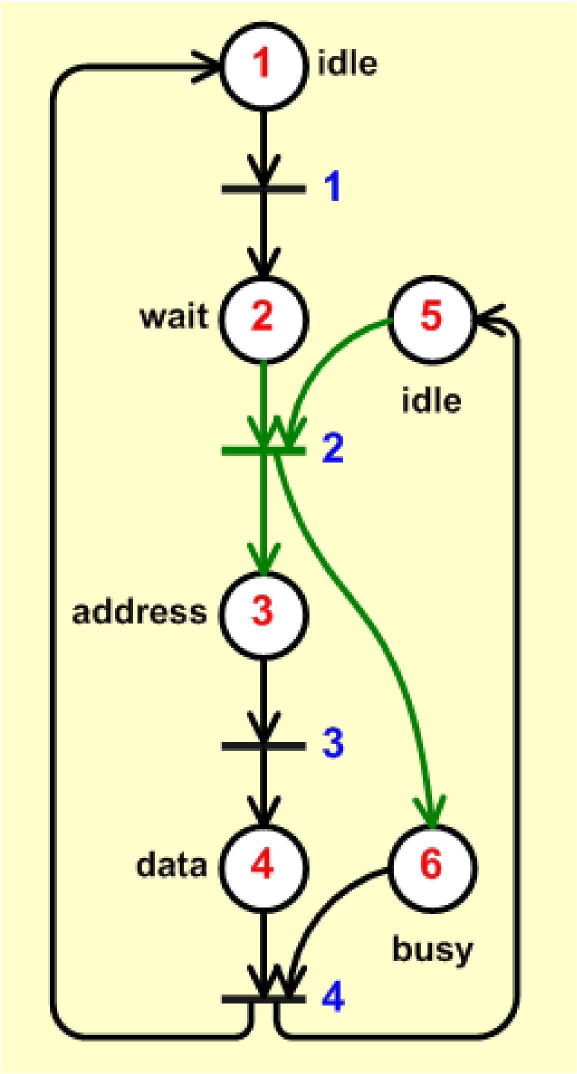
$$W^{+} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} \end{array}$$

Szomszédossági mátrixok



$$\mathbf{W} = W^{+}\text{-}W^{-} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccccc|c} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & t_3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & t_4 \end{array}$$

Szomszédossági mátrixok



$$W^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: inicializálás

$i \leftarrow 1$

$T_i \leftarrow \{\, t \in T \,\}$

$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{W}^\mathrm{T}$, $\mathbf{D} \leftarrow \mathbf{1}_n$ // $n = |P|$

$\mathbf{Q}_i \leftarrow [\mathbf{D} \mid \mathbf{A}]$ // egységmátrix és szomszédossági mátrix

$L_p \leftarrow$ a $\mathbf{Q}_i$ mátrix p. sora

$T_1 = \{\, t_1, t_2, t_3, t_4 \,\}$

$$\mathbf{Q_1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc:cccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \end{array}\right]$$

Martinez-Silva algoritmus: ciklus

```
while A_i ≠ 0
```

if $t_j \in T_i$ // válasszunk egy eddig nem vizsgált oszlopot

$T_{i+1} \leftarrow T_i \setminus \{ t_j \}$

$\mathrm{L}_{\mathrm{delete}} \leftarrow \varnothing$

$\mathbf{Q}_{i+1} \leftarrow \mathbf{Q}_i$

for all $u, v : \mathrm{A}_\mathrm{i}(u, j) \neq 0 \wedge \mathrm{A}_\mathrm{i}(v, j) \neq 0 \wedge$
$\exists \lambda_u, \lambda_v \in \mathbb{N}^+ : \lambda_u \mathrm{A}_\mathrm{i}(u, j) + \lambda_v \mathrm{A}_\mathrm{i}(v, j) = 0$

$\mathbf{Q}_{i+1}$-hez adjuk hozzá a $\lambda_u L_u + \lambda_v L_v$ sort

$\mathrm{L}_{\mathrm{delete}} \leftarrow \mathrm{L}_{\mathrm{delete}} \cup \{ L_u, L_v \}$

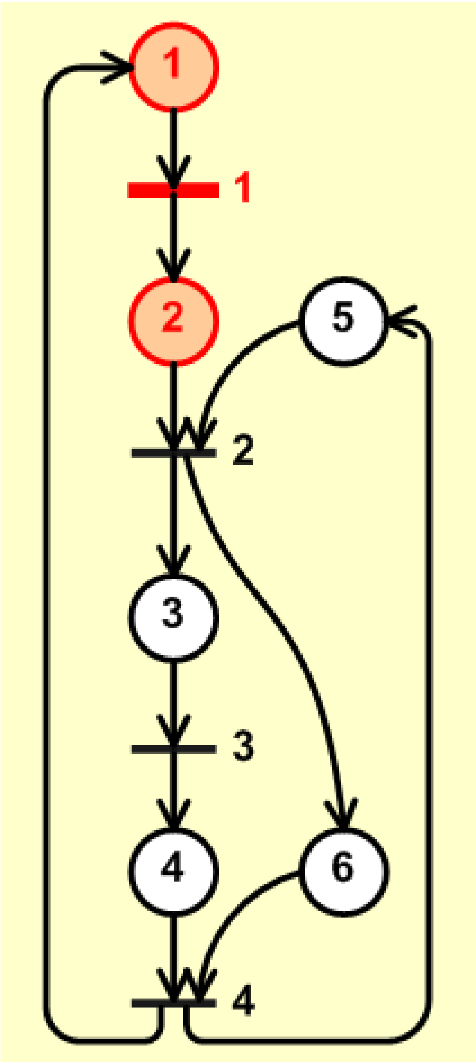
end for

$\mathbf{Q}_{i+1}$-ből töröljük az $\mathrm{L}_{\mathrm{delete}}$ halmazbeli sorokat

$i \leftarrow i + 1$

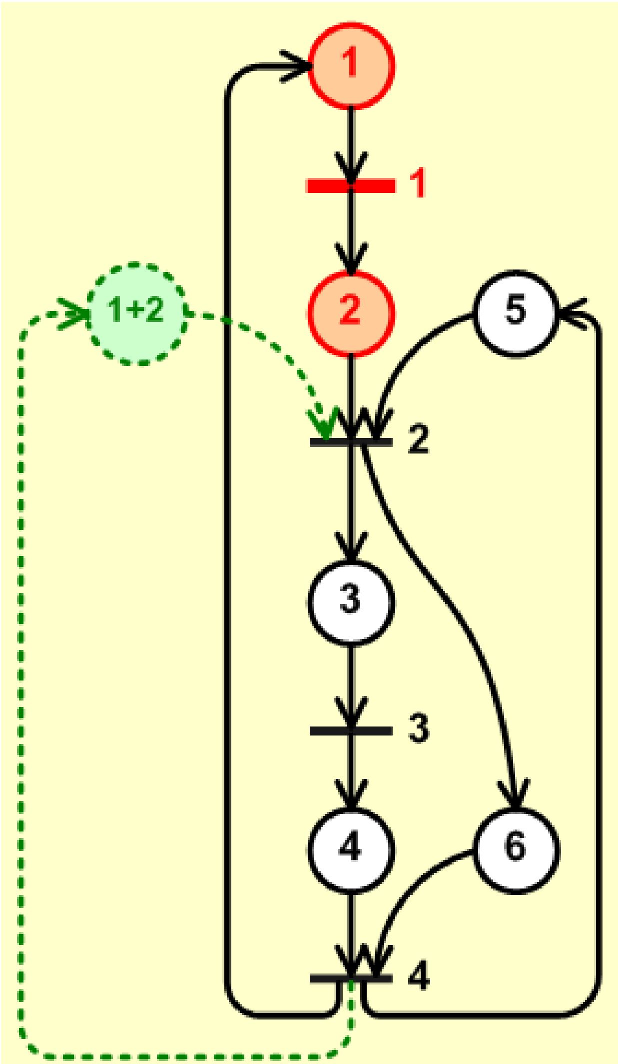
end while

Martinez-Silva algoritmus: 1-1. lépés



$$Q_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \end{array}$$

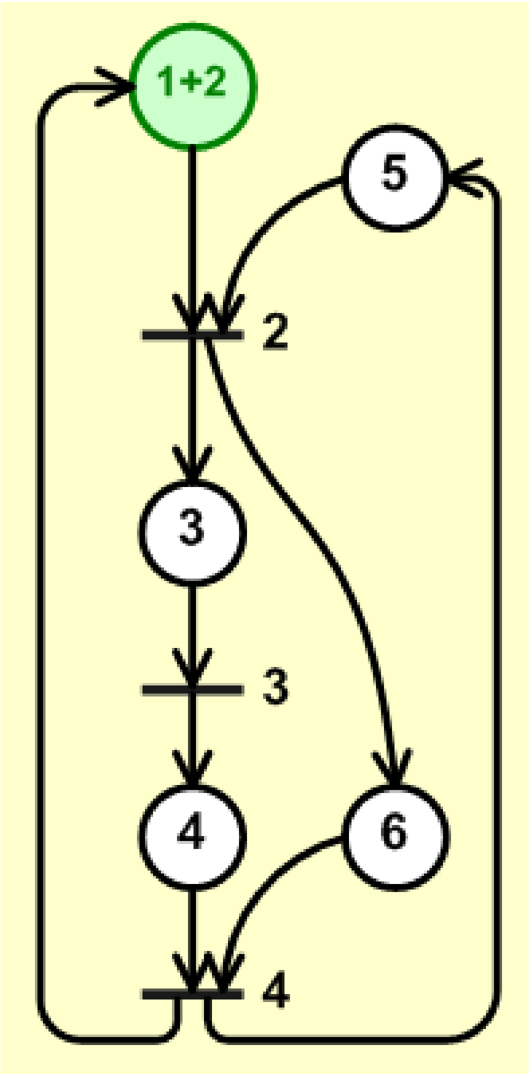
Martinez-Silva algoritmus: 1-2. lépés



$$Q_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}$$

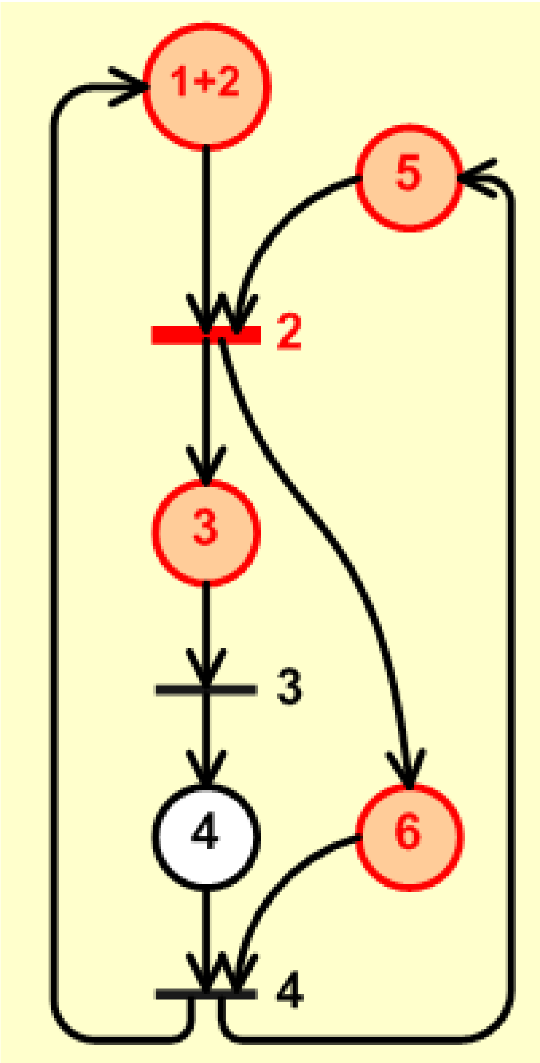
$$Q_1' = \left[\begin{array}{cccccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: 1. részeredmény



$$Q_1'' = \begin{array}{cccccc|cccc|l}
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_{1+2}
\end{array}$$

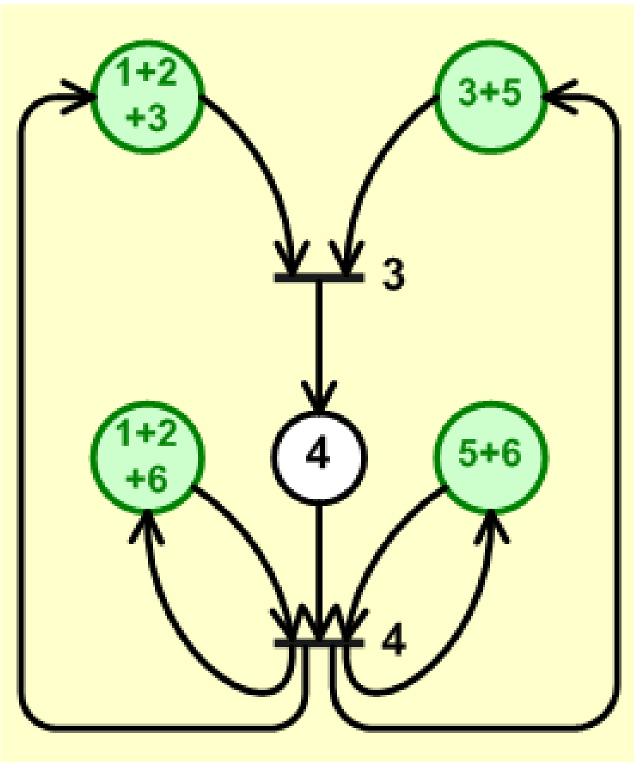
Martinez-Silva algoritmus: 2-1, 2-2. lépés



$$Q_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc:cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc:cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{array} \end{array}$$

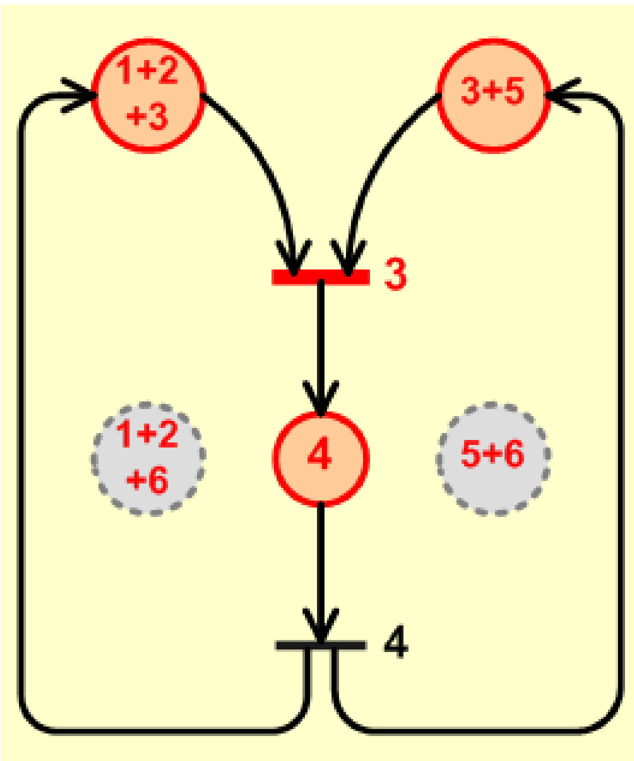
$$Q_2' = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: 2. részeredmény



$$Q_2'' = \begin{array}{cl} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{matrix} & \\ \left[\begin{array}{cccccc:cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{matrix} p_4 \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \end{matrix} \end{array}$$

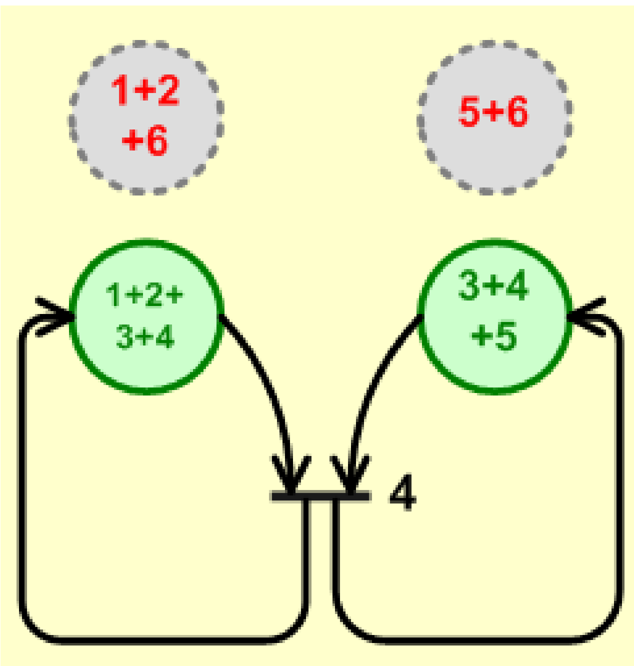
Martinez-Silva algoritmus: 3-1, 3-2. lépés



$$
Q_3 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc:cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc:cccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ p_4 \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \end{array}
$$

$$
Q_3' = \left[\begin{array}{cccccccc|c|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l} p_4 \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \\ p_{1+2+3+4} \\ p_{3+4+5} \end{array}
$$

Martinez-Silva algoritmus: végeredmény

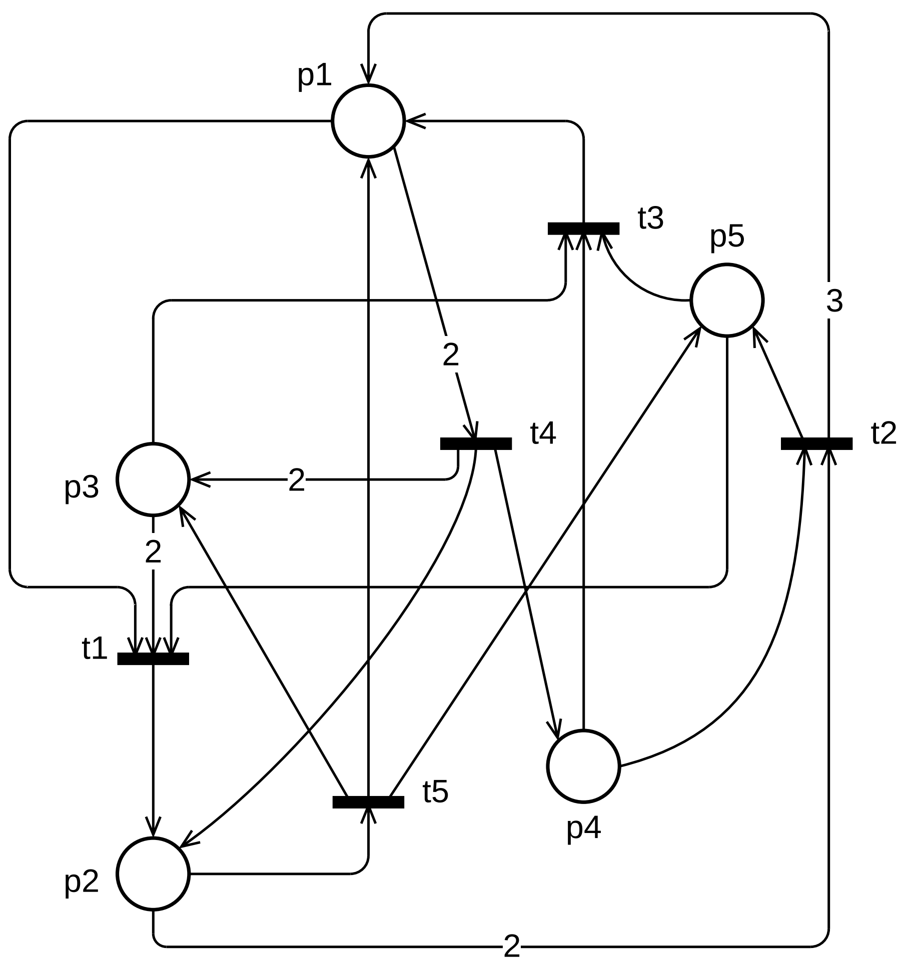


$$Q_3'' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \\ p_{1+2+3+4} \\ p_{3+4+5} \end{array}$$

- Invariánsok:
  - A végső $Q_m = [D_m|0]$ mátrix alapján a D_m mátrix soraiban található együtthatók
- Kiszámított P-invariánsok:
  1. $m(p_1)+m(p_2)+m(p_6) = 1$
  2. $m(p_5)+m(p_6) = 1$
  3. $m(p_1)+m(p_2)+m(p_3)+m(p_4) = 1$
  4. $m(p_3)+m(p_4)+m(p_5) = 1$

Összetettebb példa



Kiindulás

						p_1	p_2	p_3	p_4	p_5			
t_1	1	0	0	0	0	-1	1	-2	0	-1	s_{11}	X	(törölni)
t_2	0	1	0	0	0	3	-2	0	-1	1	s_{12}	X	
t_3	0	0	1	0	0	1	0	-1	-1	-1	s_{13}	X	
t_4	0	0	0	1	0	-2	1	2	1	0	s_{14}		
t_5	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	1	s_{15}	X	

1. lépés (5. oszlop szerint dolgozunk)

1	1	0	0	0	2	-1	-2	-1	0	(11+12)
0	1	1	0	0	4	-2	-1	-2	0	(12+13)
1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	(11+15)
0	0	1	0	1	2	-1	0	-1	0	(13+15)

(törlés és újrarendezés)

2. lépés előtt

0	0	0	1	0	-2	1	2	1	0	s_{21}	X
1	1	0	0	0	2	-1	-2	-1	0	s_{22}	X
0	1	1	0	0	4	-2	-1	-2	0	s_{23}	X
1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	s_{24}	
0	0	1	0	1	2	-1	0	-1	0	s_{25}	X

2. lépés előtt (4. oszlop szerint dolgozunk)

1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	(21+22)
0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	(21+25)
0	1	1	2	0	0	0	3	0	0	(2*21+23)

(törlés és újrarendezés)

3. lépés előtt

1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	s_{31}	X
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	s_{32}	
0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	s_{33}	X
0	1	1	2	0	0	0	3	0	0	s_{34}	X

3. lépés (3. oszlop szerint dolgozunk)

2	0	1	1	3	0	(2*31+33)
3	1	1	2	3		(3*31+34)

További strukturális tulajdonságok

Definíciók: szifon és csapda

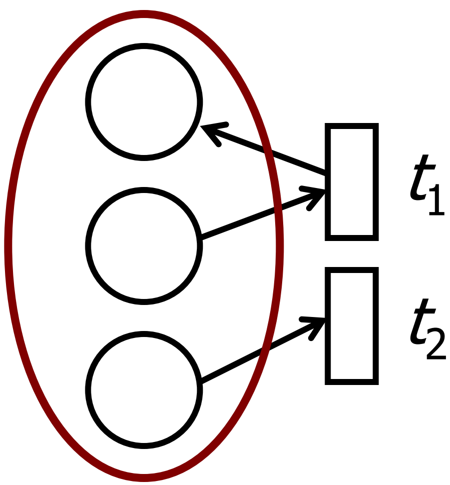
Egy S helyhalmaz szifon, ha $\bullet S \subseteq S\bullet$

- minden S-beli kimeneti helyhez bemeneti hely S-ben
- egy állapotban tokenmentes $\rightarrow$ követő állapotokban is

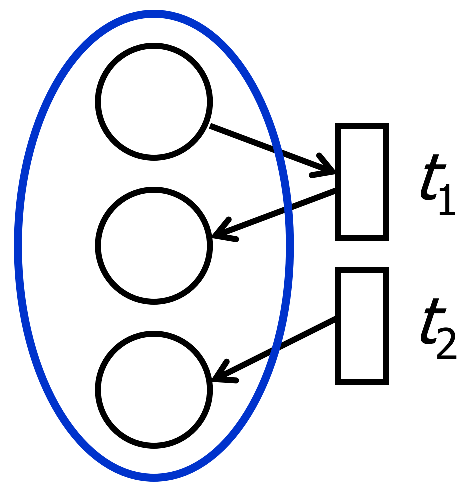
Egy Q helyhalmaz csapda, ha $Q\bullet \subseteq \bullet Q$

- minden Q-beli bemeneti helyhez kimeneti hely Q-ban
- egy állapotban jelölt $\rightarrow$ követő állapotokban is

$\bullet S = \{t_1\}$
$S\bullet = \{t_1, t_2\}$
$\bullet S \subseteq S\bullet$



$\bullet Q = \{t_1, t_2\}$
$Q\bullet = \{t_1\}$
$\bullet Q \supseteq Q\bullet$



Strukturális élőség

- Egy N Petri háló strukturálisan élő, ha létezik olyan M_0 kezdőállapota, amelyben (N, M_0) élő (L_4 élő)
  - Szükséges feltétel: erősen összekötött gráf struktúra
  - Jelölt gráfok: egy (G, M_0) jelölt gráf a.cs.a. élő, ha M_0 állapotban minden G-beli irányított körben van legalább egy token $\rightarrow$ minden jelölt gráf strukturálisan élő
  - Szabad választású hálók: egy FC háló strukturálisan élő, ha minden N–beli szifon tartalmaz csapdát
  - Általános (közönséges) Petri hálókra a strukturálisan élőség jellemzése (még) nem ismert

Vezérelhetőség

- Egy *N* Petri háló teljesen vezérelhető, ha bármely korlátos M_0 kezdőállapot esetén:

$$\boxed{\forall M_i, M_j : M_i, M_j \in R(N, M_0) \Rightarrow M_i \in R(N, M_j) \wedge M_j \in R(N, M_i)}$$

  – azaz bármely állapot elérhető bármely más állapotból

Vezérelhetőség feltételei

- Elégséges feltétel: $\boxed{\mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}) = m}$

  ahol m a helyek száma

  – mert $M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \rightarrow \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = \Delta M$

  – rangfeltétel: $\mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rang}(\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \mid \Delta M) = m$

- Ugyanez szükséges feltétel is jelölt gráfok esetén

Strukturális korlátosság

- Egy *N* Petri háló strukturálisan korlátos, ha bármely korlátos M_0 kezdőállapotra korlátos marad

- Feltétele: létezik egy m pozitív komponensű $\vec{\mu}$

$$\boxed{\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0}$$

Strukturális korlátosság feltételei

- Szükségesség: $M \in R(N, M_0) \rightarrow M = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}, \vec{\sigma} \geq 0$
  - átrendezve: $M^{\mathrm{T}}\vec{\mu} = M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu} + \underbrace{\vec{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\vec{\mu}}_{\mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0, \vec{\sigma} \geq 0}$ ← felhasználjuk a feltételt
    (belső szorzat)
  - felső korlát: $M^{\mathrm{T}}\vec{\mu} \leq M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu} \Rightarrow M(p) \leq \dfrac{M_0^{\mathrm{T}}\vec{\mu}}{\mu_p}$
- $\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\mu} \leq 0$ feltétel elégséges is, mert
  - egyébként $\exists \vec{\sigma} \geq 0 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$

    $$\exists M, M_0 : M - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 \rightarrow M \underset{\neq}{\geq} M_0$$
  - ekkor megfelelő M_0 választásával σ tetszőlegesen sokszor végrehajtható és N nem korlátos

Konzervativitás

- Egy *N* Petri háló konzervatív, ha bármely korlátos M_0 és $M \in R(N, M_0)$ állapotra minden $p \in P$ helyhez található egy μ_p pozitív egész súlytényező, hogy $M\vec{\mu} = M_0\vec{\mu} = \text{állandó}$
- Részlegesen konzervatív, ha a fenti ek csak néhány helyre vonatkoznak.
- Szükséges és elégséges feltétel:

$$\boxed{\exists \vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}\vec{\mu} = 0}$$

Ismételhetőség

- Egy *N* Petri háló ismételhető, ha létezik olyan M_0 kezdőállapot és M_0-ből induló σ tüzelési szekvencia, hogy minden $t \in T$ tranzíció végtelen sokszor tüzel σ-ban
- Részlegesen ismételhető, ha a fentiek csak néhány tranzícióra vonatkoznak.
- Szükséges és elégséges feltétel:

$$\boxed{\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0}$$

Ismételhetőség feltételei

- Szükséges és elégséges feltétel:

$$\boxed{\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0}$$

- Bizonyítás: $\exists \vec{\sigma} > 0 \colon \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0$

$$\exists M, M_0 : M - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} \geq 0 \rightarrow M \geq M_0$$

ekkor megfelelő M_0 választásával $\vec{\sigma}$ tetszőlegesen sokszor végrehajtható

Konzisztencia

- Egy *N* Petri háló konzisztens, ha létezik olyan M_0 kezdőállapot és M_0-ből induló és M_0-ba visszavezető σ tüzelési szekvencia, hogy minden $t \in T$ tranzíció legalább egyszer tüzel σ-ban
- Részlegesen konzisztens, ha a fentiek csak néhány tranzícióra vonatkoznak.
- Szükséges és elégséges feltétel:

$$\boxed{\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma} = 0}$$

Bizonyítás: ismételhetőség feltételénél látott módon

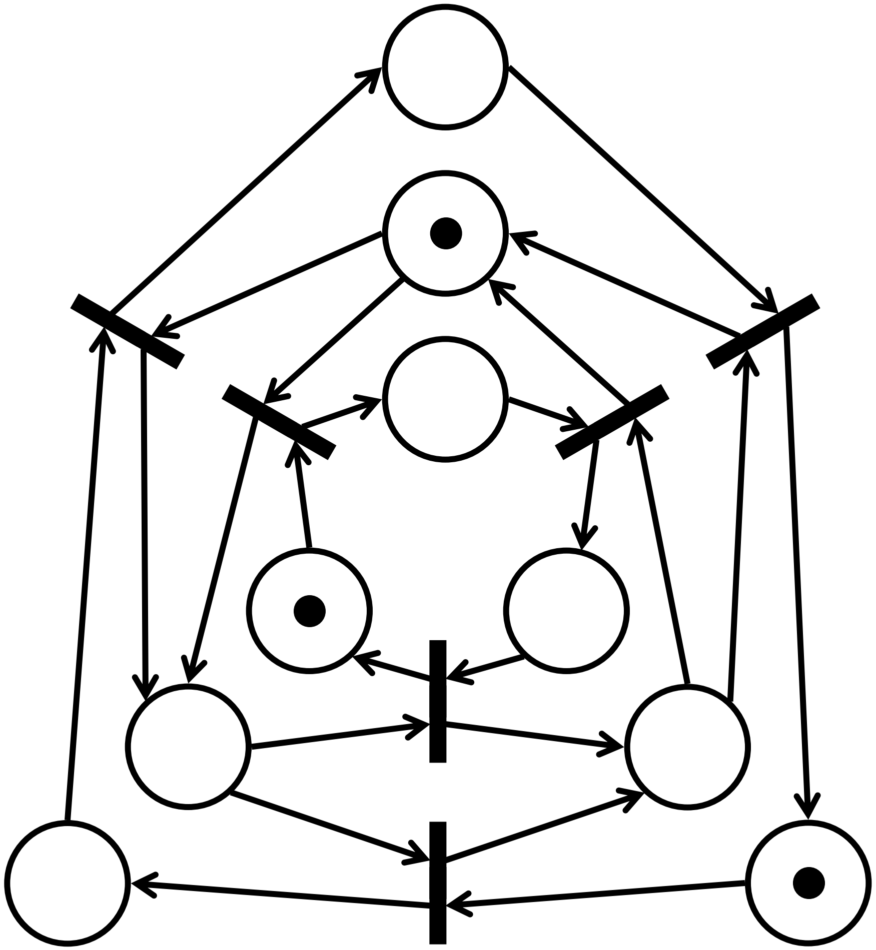
Strukturális B-fairség

- Két tranzíció strukturálisan B-fair, ha bármely M_0 kezdőállapot esetén B-fair (azaz korlátos fair) relációban állnak
  - az egyik maximum korlátos sokszor tüzelhet anélkül, hogy a másik tranzíció tüzelne
- Egy *N, M_0* Petri háló B-fair, ha bármely két tranzíciója esetén a B-fair reláció teljesül
- Egy *N* Petri háló strukturálisan B-fair, ha bármely M_0 kezdőállapotra a háló B-fair
  - B-fair reláció ekvivalencia reláció $\rightarrow$ tranzíciókat ekvivalencia osztályokba csoportosítja
  - Strukturális B-fair reláció $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ B-fair reláció

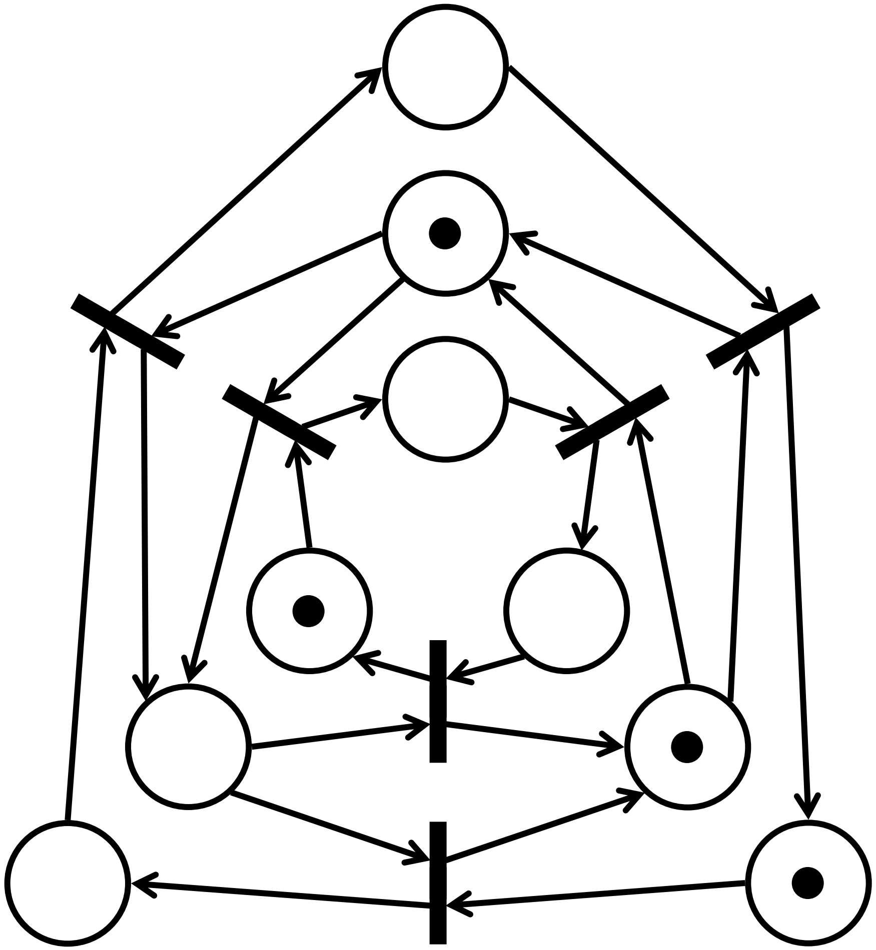
Strukturális B-fairség feltétele

- Egy strukturálisan korlátos Petri háló a.cs.a. strukturálisan B-fair, ha
  - konzisztens és <u>csak egy</u> minimális nemnegatív T-invariánsa van, vagy
  - nem konzisztens és nincs minimális nemnegatív T-invariánsa
- Minden erősen összekötött jelölt gráf strukturálisan B-fair

B-fair, de nem strukturálisan B-fair háló



élő és B-fair M_0



élő, de nem B-fair M_0

Összefoglalás

	Tulajdonság	Szükséges és elégséges feltétel
SB	Strukturálisan korlátos	$\exists \vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0$ (vagy $\nexists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$)
CN	Konzervatív	$\exists \vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} = 0$ (vagy $\nexists \vec{\sigma}, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$)
PCN	Részlegesen konzervatív	$\exists \vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}\vec{\mu} = 0$
RP	Ismételhető	$\exists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \geq 0$
PRP	Részlegesen ismételhető	$\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \geq 0$
CS	Konzisztens	$\exists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = 0$ (vagy $\nexists \vec{\mu}, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0$)
PCS	Részlegesen konzisztens	$\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = 0$

További strukturális tulajdonságok

Ha	Akkor
N strukturálisan korlátos és strukturálisan élő	*N* konzervatív és konzisztens.
$\exists \vec{\mu} \geq 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\leq} 0$	Létezik nem élő M_0 *N*–hez. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\mu} \geq 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0$	(*N*, M_0) nem korlátos egy élő M_0 esetén. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\sigma} \geq 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\leq} 0$	Létezik nem élő M_0 strukturálisan korlátos *N*–hez. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\sigma} \geq 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$	*N* nem strukturálisan korlátos. *N* nem konzervatív.