

Színezett Petri hálók

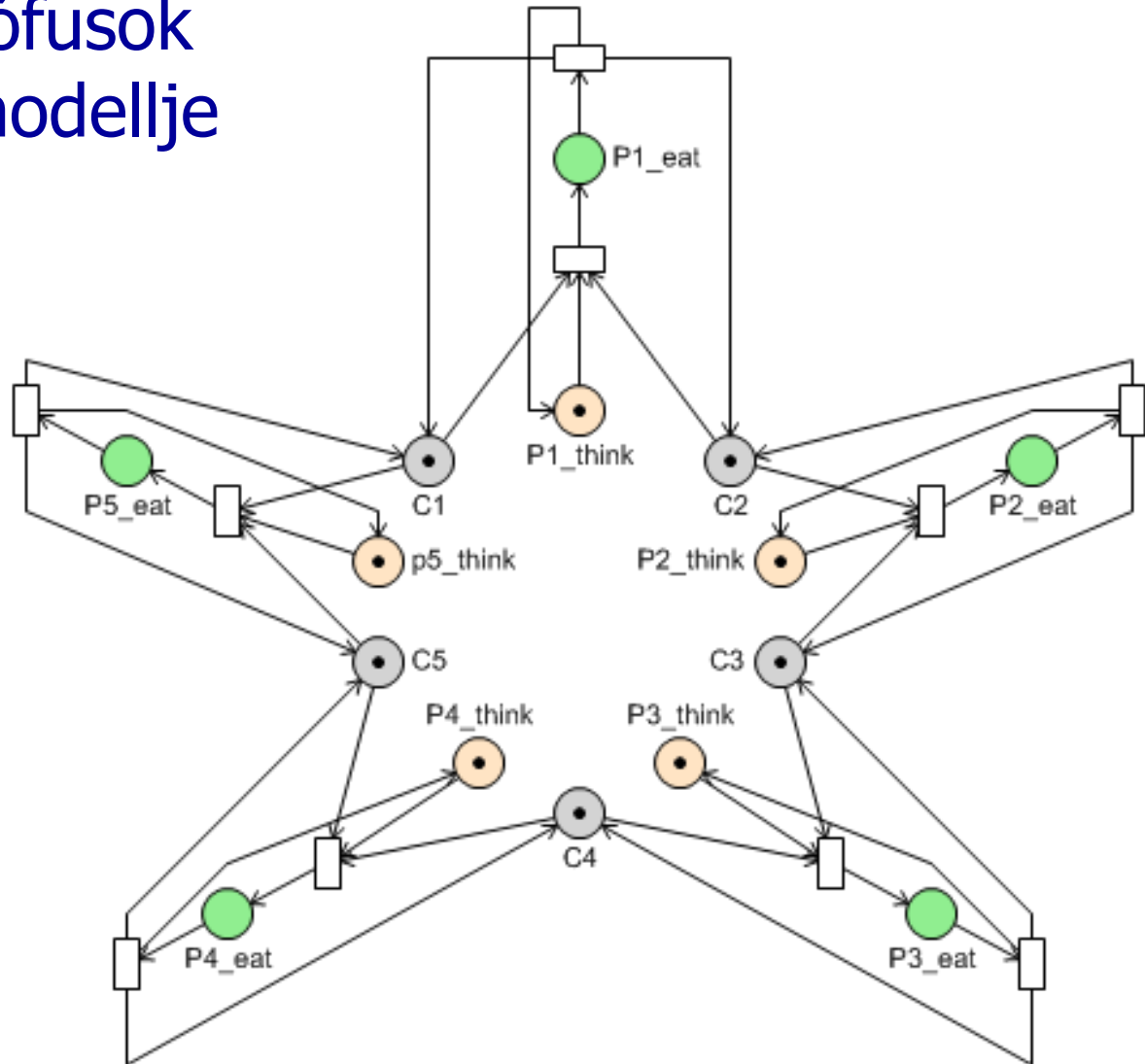
dr. Bartha Tamás

dr. Majzik István

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

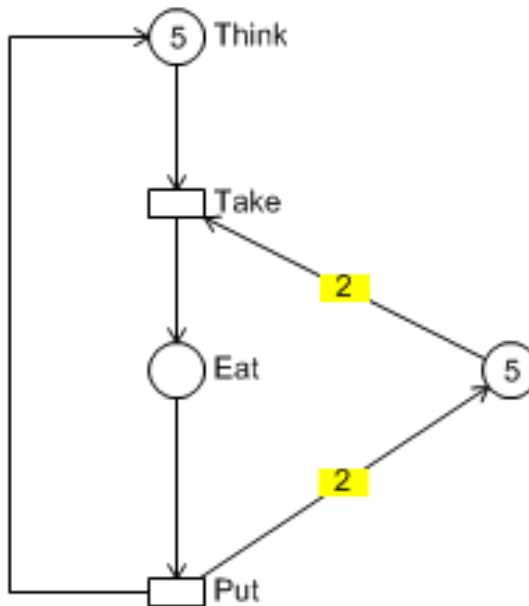
Motiváció

- Étkező filozófusok
Petri-háló modellje



Motiváció

- Miért nem így?

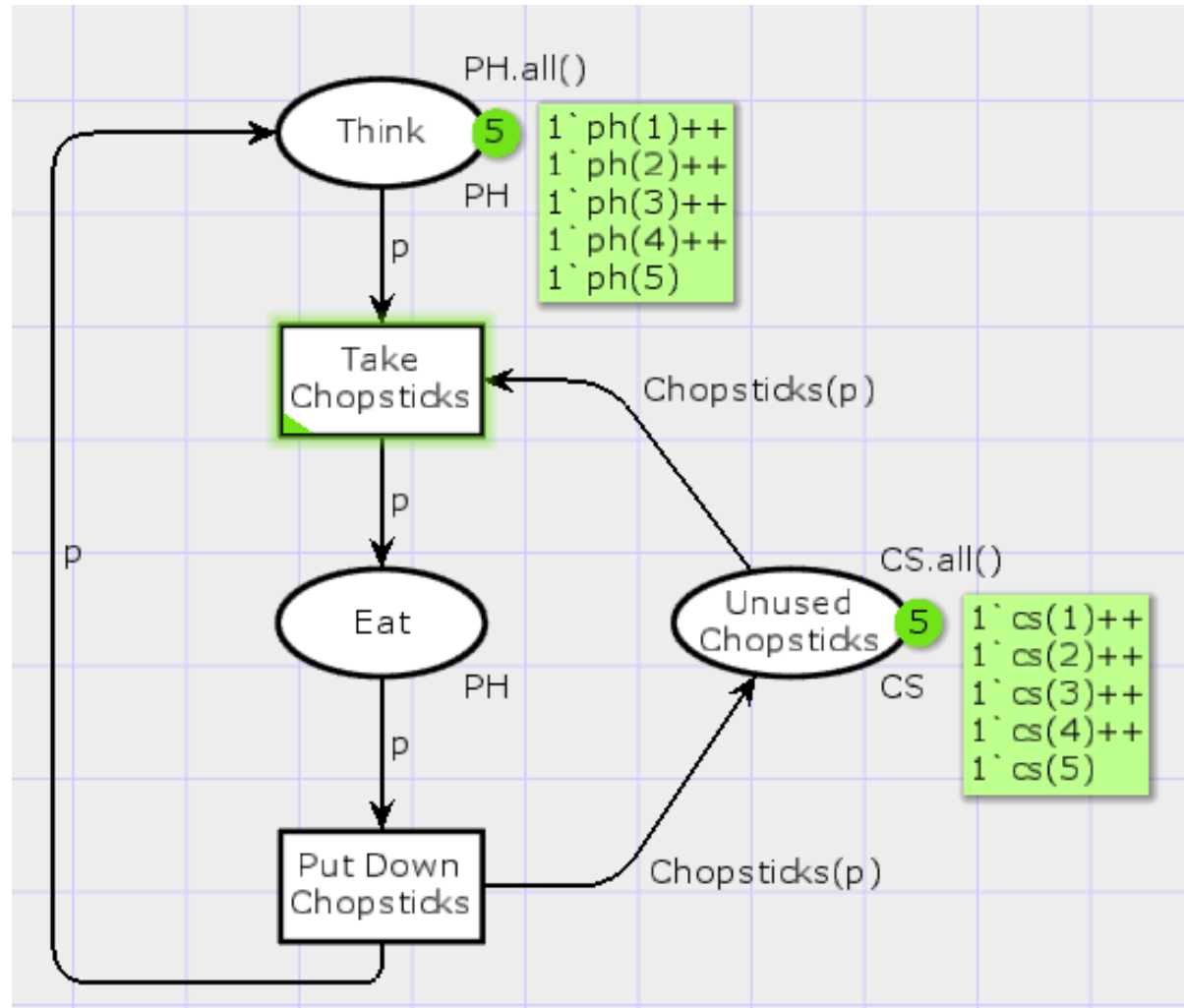


Motiváció

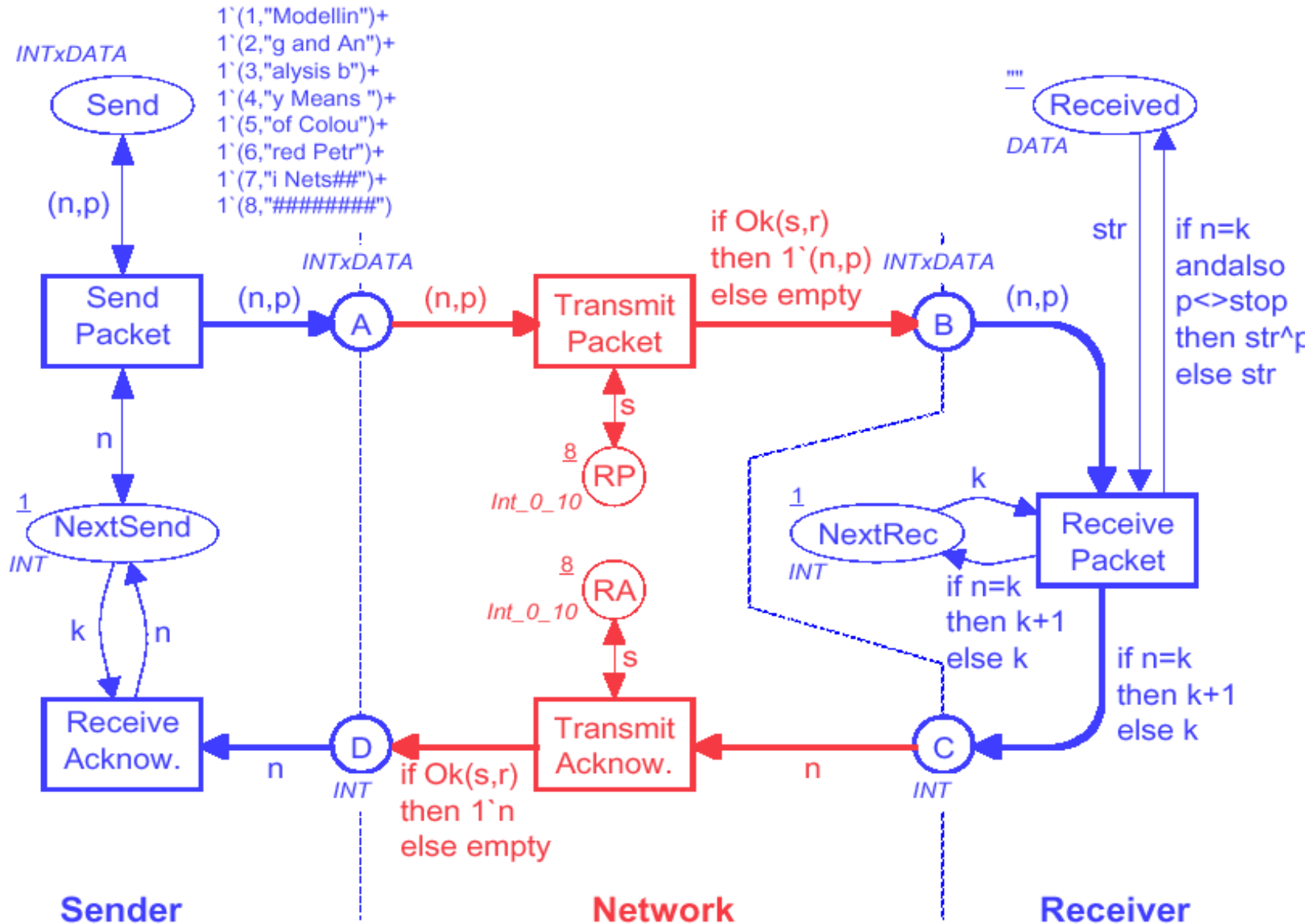
- Tokenek megkülönböztetése: Színezett Petri-háló

```
val n = 5;  
colset PH = index ph with 1..n;  
colset CS = index cs with 1..n;  
var p: PH;
```

```
fun Chopsticks(ph(i)) =  
  1`cs(i) ++  
  1`cs(if i=n then 1 else i+1);
```



Egy komplexebb példa (Id. külön)



Színezett Petri-hálók

- A színezett Petri-hálók (Coloured Petri Net, CPN)
 - A színezetlen hálók kiterjesztései:
 - Rugalmas adatszerkezetekkel
 - Adatmanipulációs nyelvvel
 - A színezett Petri-háló modellek ötvözik:
 - Grafikus reprezentáció → áttekinthetőség
 - Jól definiált szemantika → formális analízis
 - CPN modell = háló struktúra + deklarációk + háló jelölések, kifejezések + inicializáló kifejezések

Színezett Petri-hálók fő elemei (áttekintés)

- Adatmanipuláció
 - Adatérték: színezett token
 - Adattípus: színhalmaz (színosztály)
- Helyek kiterjesztései
 - Hely típusa
 - Hely inicializáló kifejezése
 - Hely aktuális jelölése: típusnak megfelelő színezett tokenek (multihalmaz)
- Élek kiterjesztései
 - Élkifejezés: mozgatott tokenek (változókkal)
- Tranzíciók kiterjesztései
 - Örfeltétel a tüzeléshez
 - Élkifejezések kötése színezett tokenekhez

Színezetlen és színezett Petri hálók összehasonlítása

Színezetlen (P-T) Petri hálók:

- színezetlen tokenek
- tokenek halmaza (számosság)
- token manipuláció
- kezdeti jelölés
- tiltó élek
- élsúlyok
- tranzíció engedélyezése
- konfliktus különböző engedélyezett tranzíciók között
- *~ assembly nyelv*

Színezett Petri hálók:

- színezett tokenek
- tokenek multihalmaza
- adatmanipuláció
- inicializáló kifejezések
- őrfeltételek
- élkifejezések (változókkal)
- lekötés engedélyezése
- konfliktus ugyanazon tranzíció engedélyezett lekötései között
- *~ magas szintű programnyelv*

Színezett Petri hálók felépítése

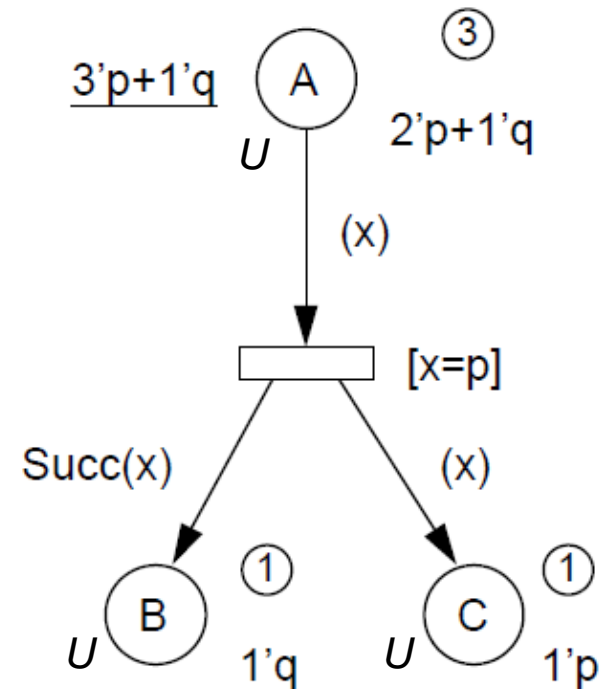
Színezett tokenek

- Színezett token
 - Adatérték reprezentálása
- Színhalmaz (színosztály):
 - Adattípus megadása
 - Komplex is lehet
 - Pl. color P = product U * I
- Deklaráció: formális nyelven
 - Standard ML

```
color U = with p | q;  
color I = int;  
color P = product U * I;  
color E = with e;  
var x : U;  
var i : I;
```

Színezett Petri háló helyek

- Színkészlet: helyek típusai (színhalmazai)
 - Milyen típusú tokeneket képes fogadni a hely (a deklarált típusok egyike)
 - Megjelenítés: hely mellé írva, dőlt
- Inicializáló kifejezés
 - A kezdeti jelölés (tokeneloszlás) megadása
 - A színhalmaz egy **multi-halmaza** (egy adott színű tokenből több is lehet)
 - Megjelenítés: hely mellé írva, aláhúzva
- Aktuális jelölés (tokeneloszlás):
 - Az aktuális tokenek megadása
 - Megjelenítés: hely mellé írva, bekarikázott számmal és hozzá fűzött részletes megadással



Színezett Petri háló tranzíciók

- **Élkifejezés:**

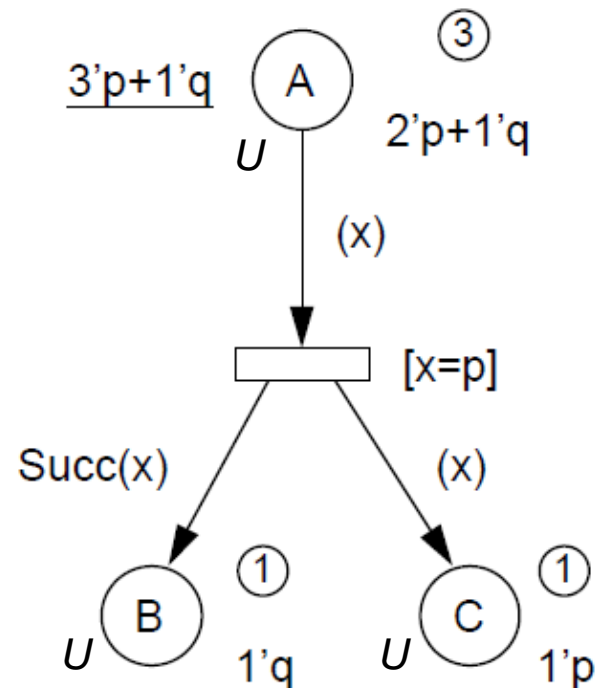
- Engedélyezés feltétele (elvett tokenek) illetve a tüzelés eredménye (kirakott tokenek)
- Típusa: az élhez tartozó hely típusa (egy tranzícióhoz több „típusú” él húzható)
- Megjelenítés: él mellett

- **Változó használható az élkifejezésben**

- Adatértékeket (színezett tokeneket) lehet hozzá kötni
- Típusa kell legyen (milyen színhalmaz elemei köthetők hozzá)

- **Örfeltétel:**

- Boole-kifejezés, a tranzíció engedélyezettségéhez igaz kell legyen
- Megjelenítés: tranzíció mellett, [] között



Színezett Petri háló felépítés: Összefoglalás

- Háló struktúra:
 - Megjeleníti a rendszer vezérlési illetve adatfolyam struktúráját
 - Helyek, tranzíciók, élek
- Deklarációk:
 - Definiálják az adatstruktúrákat és a felhasznált függvényeket
 - Színosztályok, változók, élkifejezések
- Jelölések, elnevezések:
 - Megadják a háló szintaktikai és adatmanipulációs elemeit
 - Nevek, színosztályok, bemenő/kimenő élkifejezések, őrfeltételek, aktuális állapot
- Inicializációs kifejezések:
 - Megadják a modell kezdőállapotát (konstansok)

```

color U = with p | q;
color I = int;
color P = product U * I;
color E = with e;
var x : U;
var i : I;

```

• CPN háló alkotóelemei:

– Helyek

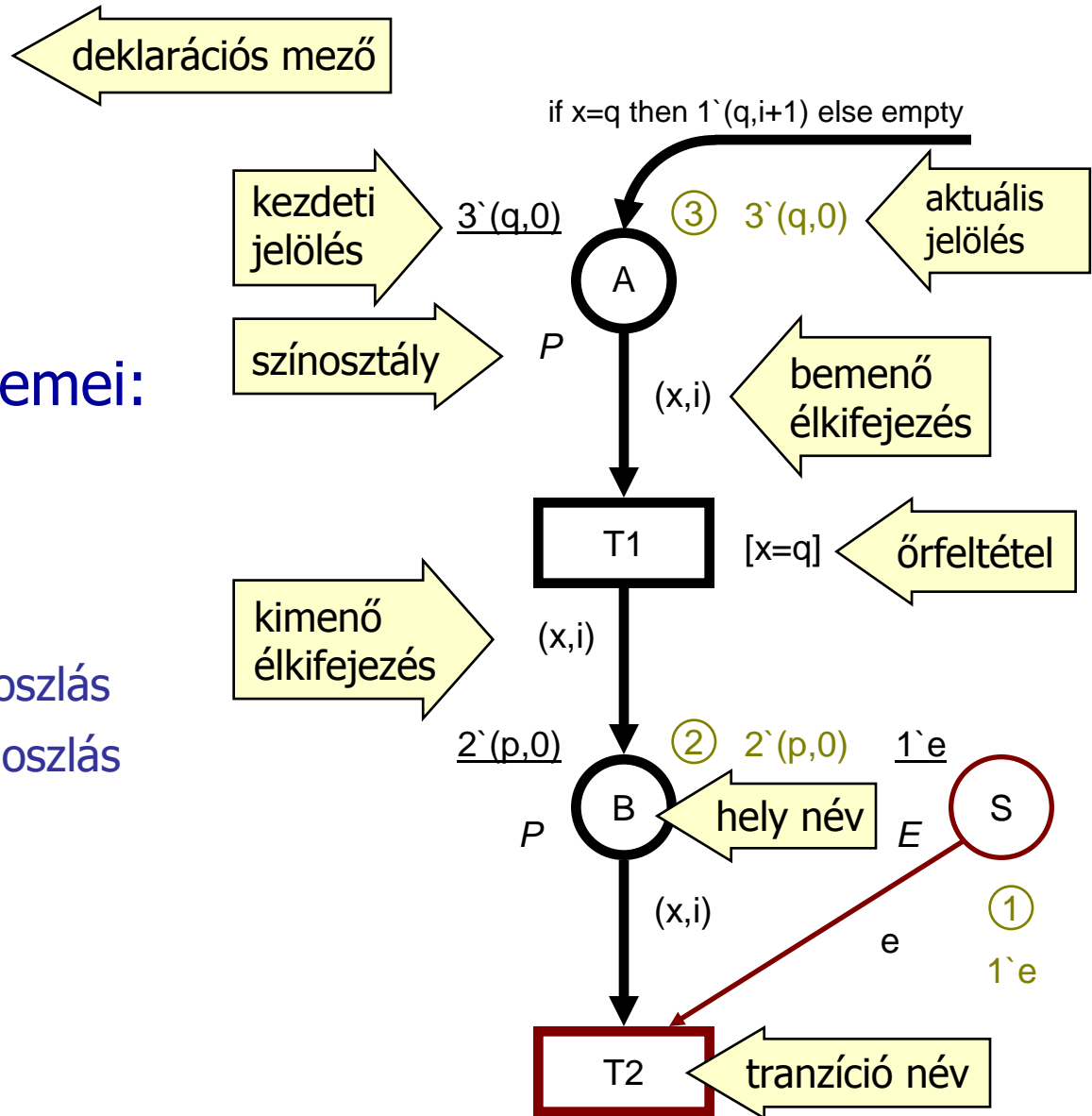
- név
- színsztály
- kezdeti tokeneloszlás
- aktuális tokeneloszlás

– Tranzíciók

- név
- őrfeltétel

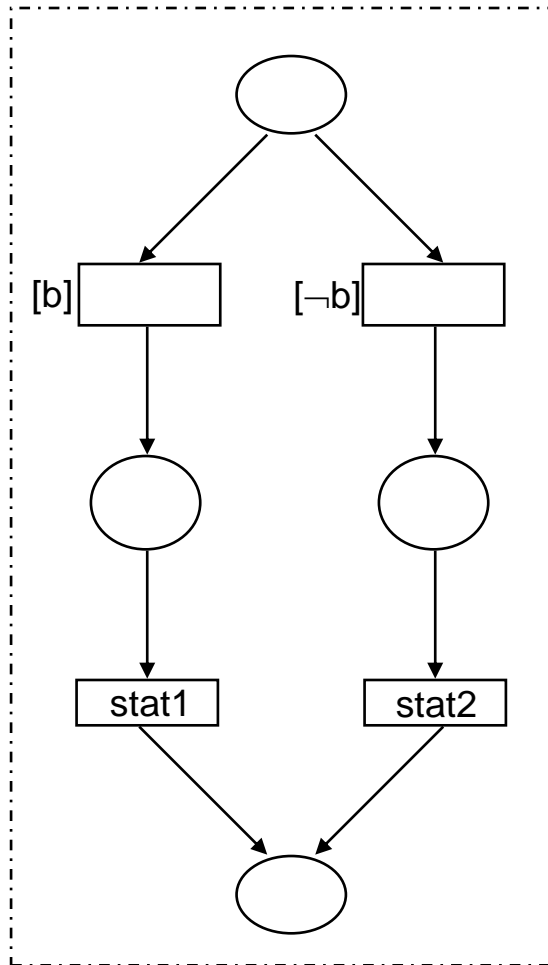
– Élek

- élkifejezések

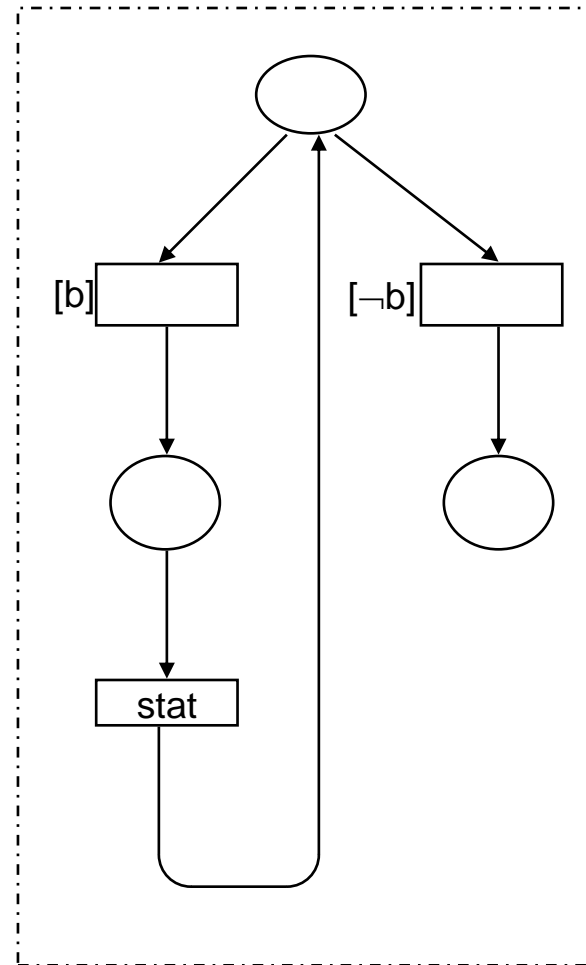


Példa: Vezérlési struktúrák 1.

IF b THEN stat1 ELSE stat2



WHILE b DO stat

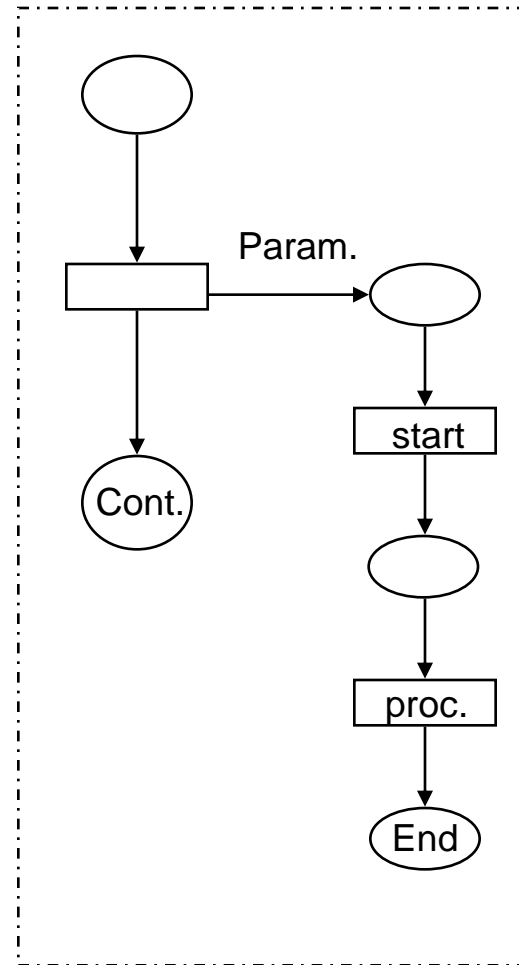
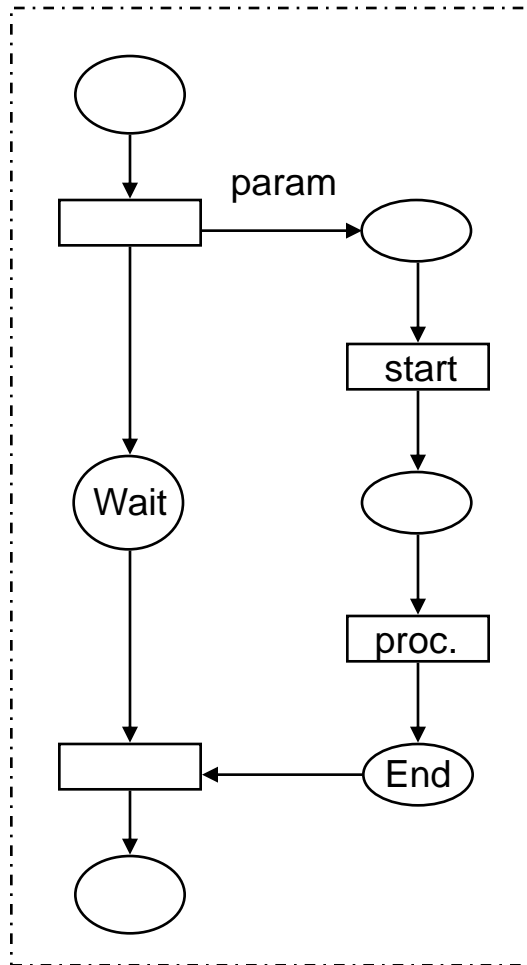
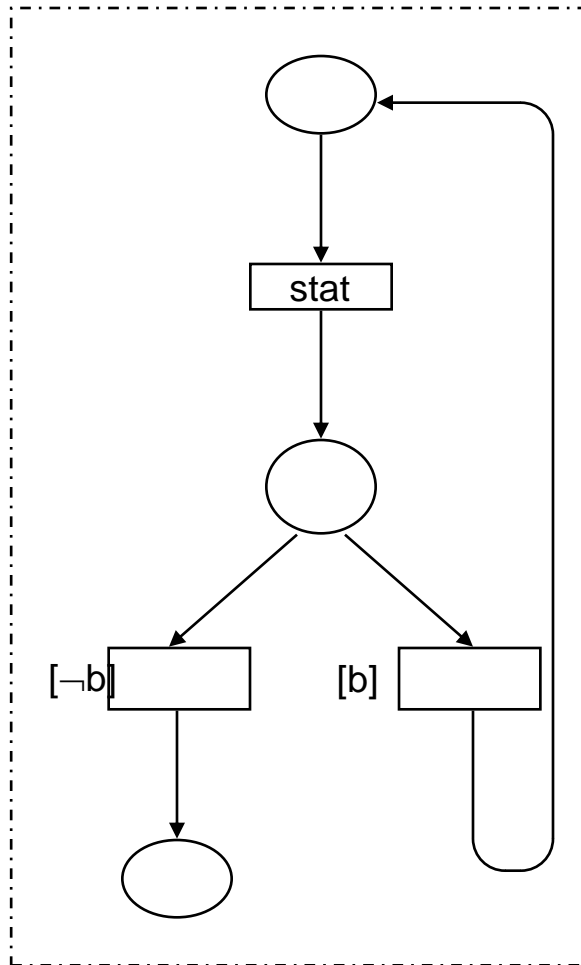


Példa: Vezérlési struktúrák 2.

REPEAT stat UNTIL b

Alprogram hívás

Processz indítása



Coloured Petri Nets (CPN) hálók eszközészlete

CPN hálók: Színosztályok definiálása

- Egyszerű színosztályok
 - Színezetlen tokenek:
`unit`
 - Alapvető típusok:
`int, bool, real, string`
 - Részhalmaz:
`with 1..4;`
 - Felsorolás:
`with true | false;`
 - Indexelés:
`index d with 1..4;`
- Az alábbi elemek definíciójában szerepelnek:
 - Összetett színosztályok
 - Változók, konstansok
 - Függvények, operátorok

Összetett színosztályok

- Módszerek kombinált színosztályok létrehozására
 - Unió képzés:
`union S + T;`
 - n-esek képzése (Descartes szorzat):
`product P * Q * R;`
 - Rekord (címkézett n-esek):
`record p:P * q:Q * r:R;`
 - Lista:
`list int with 2..6;`

További CPN háló elemek: Változók

- Változók

Tokenek szimbolikus nevei

- változódeklaráció:

```
var proc : P;
```

- Konstansok

Áttekinthetőbb, kezelhetőbb

- Konstansdeklaráció:

```
val n = 10;
```

```
val d1 = d(1):D;
```

- Az alábbi kifejezésekben:

- Élkifejezések

- Örfeltételek

- Az alábbi deklarációkban:

- Színosztályok

- Függvények, operátorok

- Élkifejezések, örfeltételek, inicializáló kifejezések

További CPN háló elemek: Függvények

- Függvények
 - Mellékhatás-mentes SML nyelvű függvények
- Műveletek, operátorok
 - Infix jelölésrendszer
- Az alábbi kifejezésekben:
 - Színosztályok
 - Függvények, operátorok, konstansok
 - Élkifejezések, őrfeltételek, inicializáló kifejezések

További CPN háló elemek: Kifejezések

- Háló kifejezések

- Értéke: a változók egy adott lekötésével értékelhető ki
- Típusa: az összes lehetséges kiértékelési eredmény halmaza
- Példák:

```
x=q
```

```
2` (x, i)
```

```
if x=q then 2`i else empty
```

```
Mes (s)
```

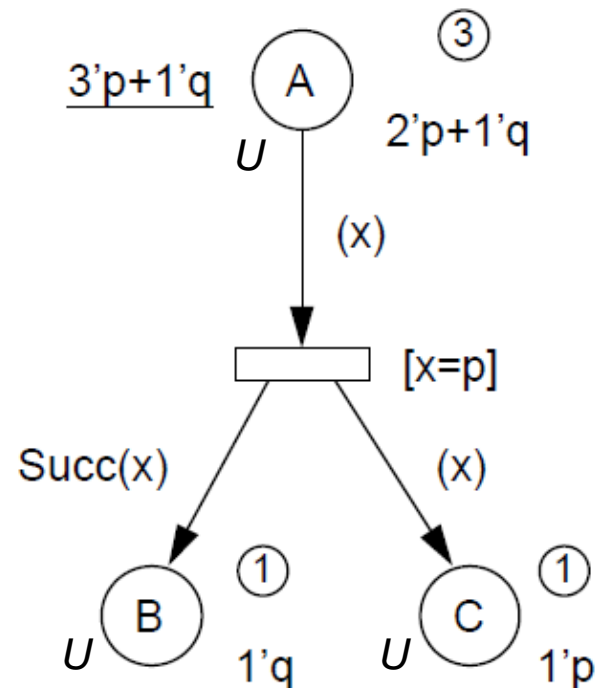
- Felhasználásuk:

- Élkifejezések, őrfeltételek, inicializáló kifejezések

Színezett Petri hálók működése (informális szemantika)

Jelölés és lekötés

- Jelölés:
 - Tokenek (szín és szám szerint) eloszlása a helyeken
- Lekötés:
 - A változókat adatértékekhez (színezett tokenekhez) kötjük
 - **Egy tranzíció** esetén egy adott változó minden előfordulása **ugyanúgy lesz lekötött** (azonos változó ugyanazt az értéket veszi fel)
 - **Különböző tranzíciók** a lekötés szempontjából **függetlenek** (azonos nevű változó lekötései függetlenek)



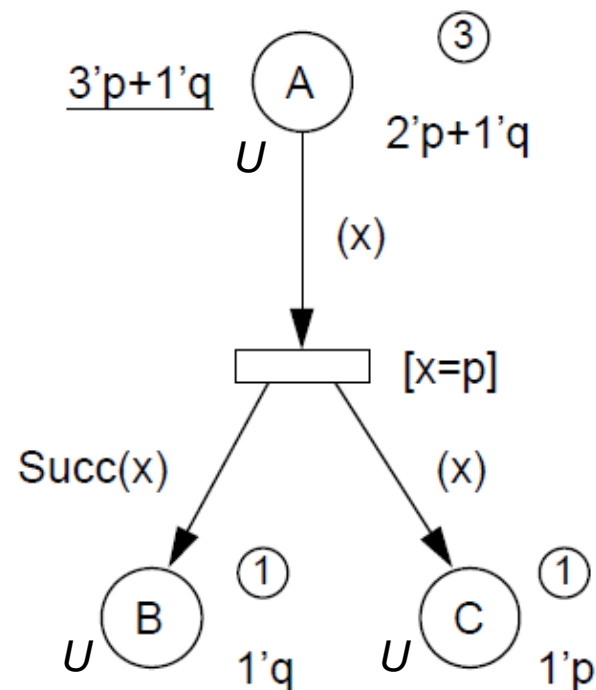
Engedélyezettség

- Tranzíció engedélyezett egy adott lekötésre egy adott jelölésben:

- A bemenő helyek tartalmazzák azokat a tokeneket, ami az élkifejezés értéke az adott lekötésben
- Az őrfeltétel igaz
- Ha egy tranzíció engedélyezett egy adott lekötésre, akkor **tüzelhet**

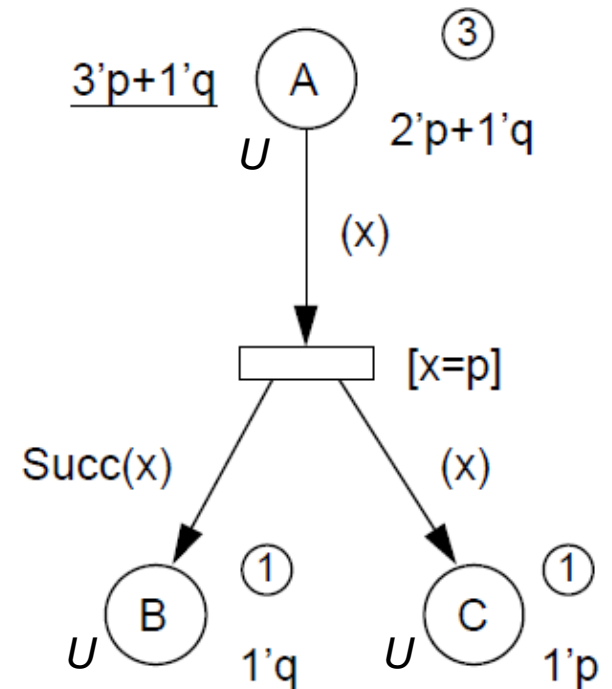
- Kötési elem:

- Egy (tranzíció, lekötés) pár, pl. $(T1, \langle x=p \rangle)$
- Engedélyezett lehet egy adott jelölésben -> tüzelhet
- Egy tranzíció esetén több lekötés, ezekből pedig több engedélyezett kötési elem képezhető



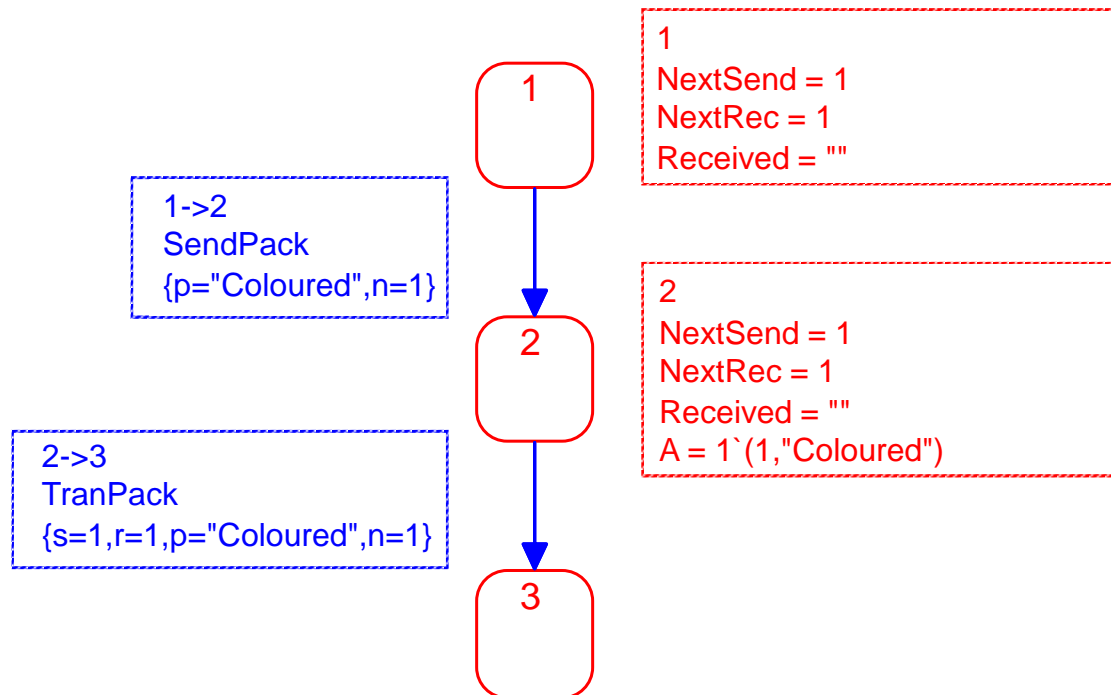
Tüzelés

- Tranzíció **tüzel** egy lekötésben (azaz egy kötési elem tüzel):
 - **Bemenő helyekről** az élkifejezés adott kötésben lévő értéke által meghatározott (számú, színű) token **elvétele**
 - **Kimenő helyekre** az élkifejezés adott kötésben lévő értéke által meghatározott (számú, színű) token **odarakása**
- Lépés (a tüzelés hatása az állapottérben):
 - A színezett Petri háló egy jelöléséből egy másik lesz



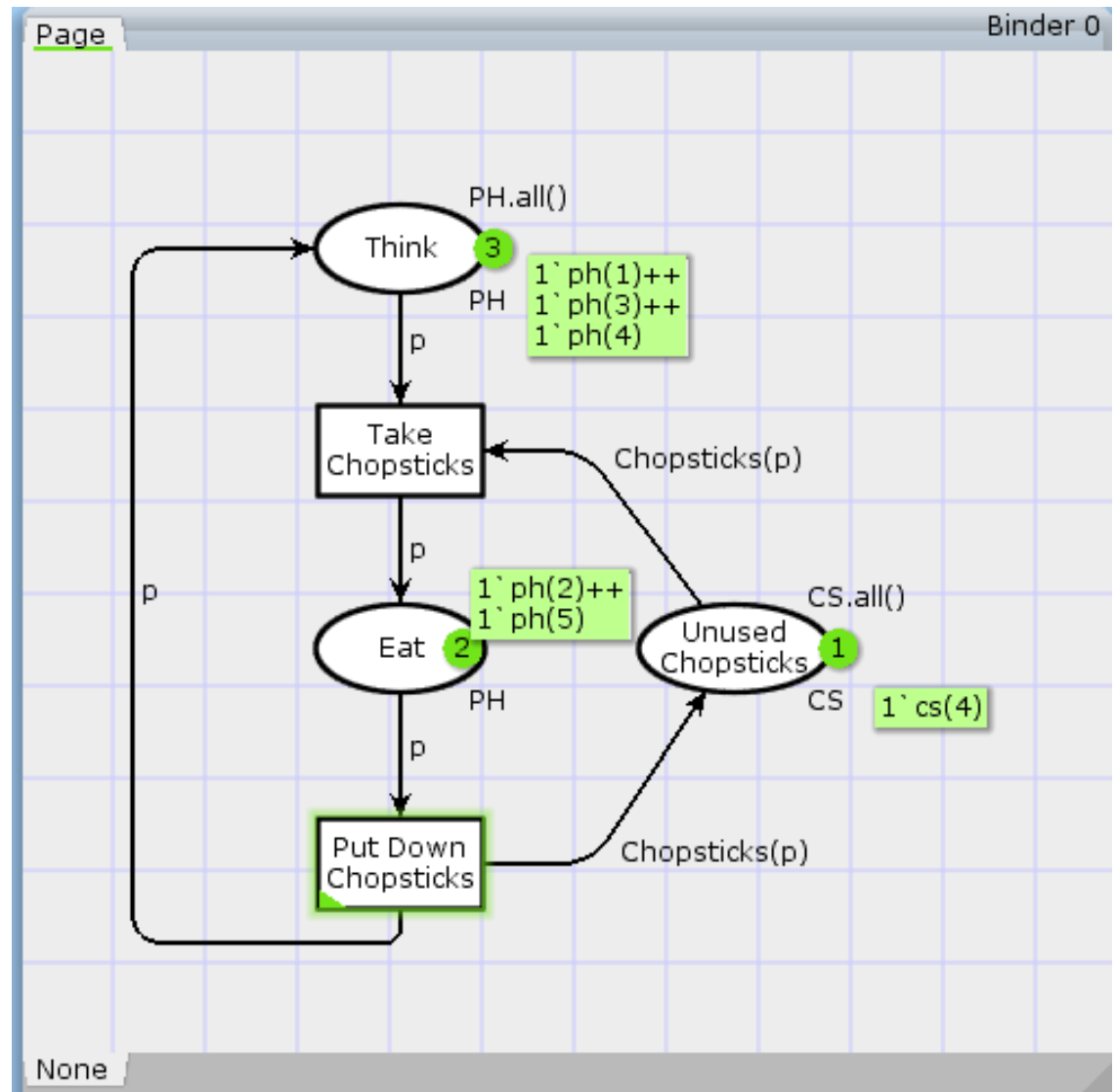
Elérhetőségi gráf

- Csomópont:
 - Egy **jelölés**: tokenek színe és száma minden helyre
 - Sorszám rendelhető hozzá, elődök és utódok lehetnek
- Él:
 - Egy kötési elem, amiben tüzelés történt: **tranzíció** és a **lekötés** megadása
 - Definíció szerint egyszerre egy tüzelő kötési elem van feltüntetve az elérhetőségi gráfban



CPN Tools demo

- Étkező filozófusok modellje
- Szimuláció
- Elérhetőségi gráf felvétele



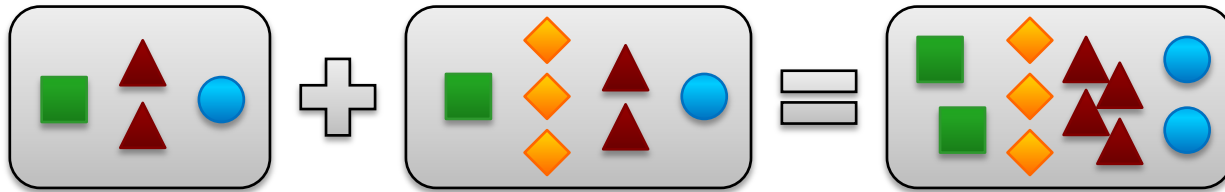
Színezett Petri hálók formális definíciója

Multihalmazok

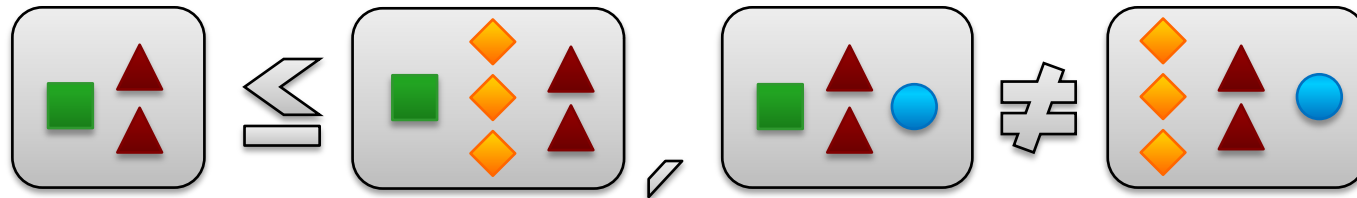
- Multihalmaz: azonos elemből több példány is lehet benne
 - Leképezés: $\text{Bag}(A)$, az A elemkészletre, $a \in [A \rightarrow \mathbf{N}]$
 - Formálisan: $a = \sum_{x \in A} a(x) \cdot x$ más jelölés (CPN): $a = \sum_{x \in A} a(x)'x$
- Műveletek multihalmazokkal:
 - Összehasonlítás: $a_2 \neq a_1$ ha $\exists x \in A, a_2(x) \neq a_1(x)$
 $a_2 \leq a_1$ ha $\forall x \in A, a_2(x) \leq a_1(x)$
 - Számosság: $|a| = \sum_{x \in A} a(x)$
 - Összegzés: $a_1 + a_2 = \sum_{x \in A} (a_1(x) + a_2(x)) \cdot x$
 - Különbség: $a_1 - a_2 = \sum_{x \in A} (a_1(x) - a_2(x)) \cdot x$ feltéve, hogy $a_2 \leq a_1$
 - Szorzás skalárral: $n \cdot a = \sum_{x \in A} (n \cdot a(x)) \cdot x$

Műveletek multihalmazokkal

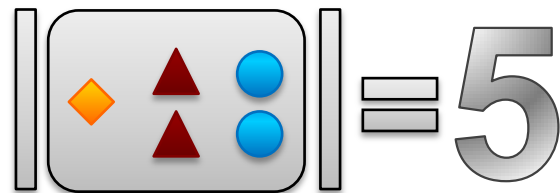
Összeadás: $a_1 + a_2$



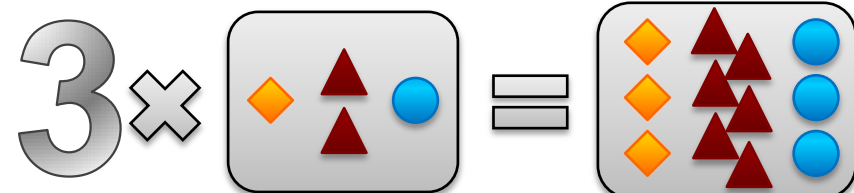
Összehasonlítás: $a_1 \leq a_2, a_1 \neq a_2$



Számosság: $|a_1|$



Szorítás skalárral: $n \cdot a_1$



Kivonás: $a_1 - a_2$ (csak ha $a_2 \leq a_1$)



Multihalmazok (folytatás)

- **Unió, multihalmazok egyesítése:** $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_m$
 - **Tartomány:** $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$
 - **Eleme:** $e_i \in \bigcup_1^m A_k$ ha $\exists A_j, e_i \in A_j$
- **n-esek képzése:** $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$
 - **Tartomány:** $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
 - **Eleme:** $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \in \prod_1^n A_j$ ha $\forall e_i \in A_i$
 - **Általánosítás:** $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

Színezett Petri hálók formális definíciója

$$\text{CPN} = (\Sigma, P, T, A, C, G, E, M_0)$$

Színhalmazok: $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\kappa\}$

Helyek: $P = \{p_1, p_2, \dots, p_\pi\}$

Tranzíciók: $T = \{t_1, t_2, \dots, t_\tau\}$

$$P \cap T = \emptyset$$

Élek: $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$

Színkészlet: $C : P \mapsto \Sigma$

Örfeltétel: $G : \forall t \in T, [\text{Type}(G(t)) = \mathbb{B} \wedge \text{Type}(\text{Var}(G(t))) \subseteq \Sigma]$

Élkifejezés: $E : \forall a \in A, [\text{Type}(E(a)) = C(p)_{\text{MS}} \wedge \text{Type}(\text{Var}(E(a))) \subseteq \Sigma]$

Kezdőállapot: $M_0 : \forall p \in P, [\text{Type}(M_0(p)) = C(p)_{\text{MS}}]$

A formális definíciókban alkalmazott jelölések

- Egy v változó típusa (színosztálya): $\text{Type}(v)$
- Egy $expr$ kifejezés típusa: $\text{Type}(expr)$
- Egy $expr$ kifejezésben szereplő változók halmaza: $\text{Var}(expr)$
- A v változó egy lekötése: $b(v) \in \text{Type}(v)$
- Kifejezés által b lekötésre visszaadott érték: $expr\langle b \rangle$
ahol $v \in \text{Var}(expr)$ és $b(v) \in \text{Type}(v)$

Színezett Petri hálók működése (formális szemantika)

Élkifejezések

- **Használhatók: Változók**
 - Rendelkeznek típussal: $\text{Type}(v)$
 - Értékük a típushoz tartozó multihalmaz egy eleme lehet
- **Lezárt élkifejezés: nem tartalmaz változókat**
- **Nyílt élkifejezés: változókat tartalmaz, amelyeket le lehet kötni egy értékkel**
 - **Lekötés:** egy konkrét értékhozzárendelés minden változóhoz
 - Adott lekötéssel az élkifejezés kiértékelhető
 - **Rendelkezik típussal:** $\text{Type}(expr) = C(p)_{MS}$
 - Az értékül kapott színosztály típusa
 - **Kifejezésben szereplő változók halmaza:** $\text{Var}(expr)$

Lekötött és lekötetlen változók

- **Lekötött változók**

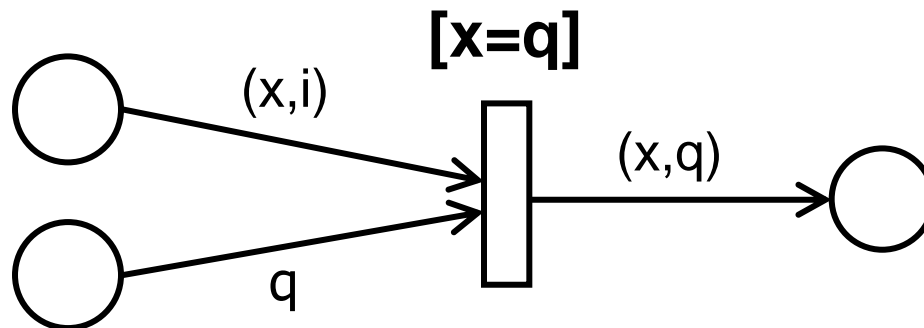
- Az értékhozzárendelést a bemenő élek határozzák meg
- Konzisztencia: változó értéke lekötésen belül azonos!
 - Minden, a tranzícióhoz tartozó élen: azonos név → azonos érték

- **Lekötetlen változók**

- Csak kimenő élkifejezésekben szereplő változók
- Az engedélyezés nem rendelt hozzá értéket: lekötetlen
- Tüzeléskor le kell kötni:
 - A színosztályából bármilyen értéket felvehet
 - Annyi lehetséges lekötés, amennyi a színosztály számossága
 - Nemdeterminisztikus választás

Őrfeltételek

- Tranzícióhoz rendelt őrfeltétel
 - Multihalmazok felett értelmezett kifejezés
 - Boolean visszatérési értékkel
- „Igaz” kiértékelési érték esetén engedélyezi a tranzíciót
 - „Szűri” az engedélyezett lekötéseket



Engedélyezettség színezett Petri hálóokban

- Tranzíció lekötése

- Érvényes lekötés: $\forall v \in \text{Var}(t): b(v) \in \text{Type}(v) \wedge G(t)\langle b \rangle$

$$\text{Var}(t) = \{v \mid v \in \text{Var}(G(t)) \vee \exists a \in A(t): v \in \text{Var}(E(a))\}$$

- Az összes érvényes lekötés halmaza: $B(t)$

- Egy érvényes lekötés **engedélyezett**, ha

- Örfeltétel igaz

- A bemenő helyeken van elég színezett token (lásd $E^-(p,t)\langle b \rangle$ élkifejezések) és a tiltó élek nem tiltják le a tüzelést (lásd $E^h(p,t)\langle b \rangle$ élkifejezések):

$$\forall p \in \bullet t: E^-(p,t)\langle b \rangle \leq M(p) \wedge E^h(p,t)\langle b \rangle > M(p)$$

Tüzelés színezett Petri hálóokban

- Egy engedélyezett tranzíció **tüzelhet**, ha **magasabb prioritású tranzíció nem engedélyezett**, azaz

– Ennek bemenő helyein nincs elég színezett token (lásd $E^-(p,t')\langle b' \rangle$ élkifejezések), vagy a tiltó élei tiltják le a tüzelését (lásd $E^h(p,t')\langle b' \rangle$ élkifejezések),

$$\forall t', \pi(t') > \pi(t) : \exists p \in \bullet t' :$$

$$E^-(p,t')\langle b' \rangle > M(p) \vee E^h(p,t')\langle b' \rangle \leq M(p)$$

– Vagy az őrfeltétele nem igaz

$$\neg G(t')\langle b' \rangle$$

Tüzelés színezett Petri hálóokban

- Tüzelés menete:

- Engedélyezett lekötések keresése

- Meghatározzák a bemenő élkifejezések, őrfeltételek

- Tranzíció engedélyezett adott lekötéssel → tüzelhet

- Tüzelés: Színezett tokenek elvétele a bemenő helyekről, színezett tokenek odarakása a kimenő helyekre

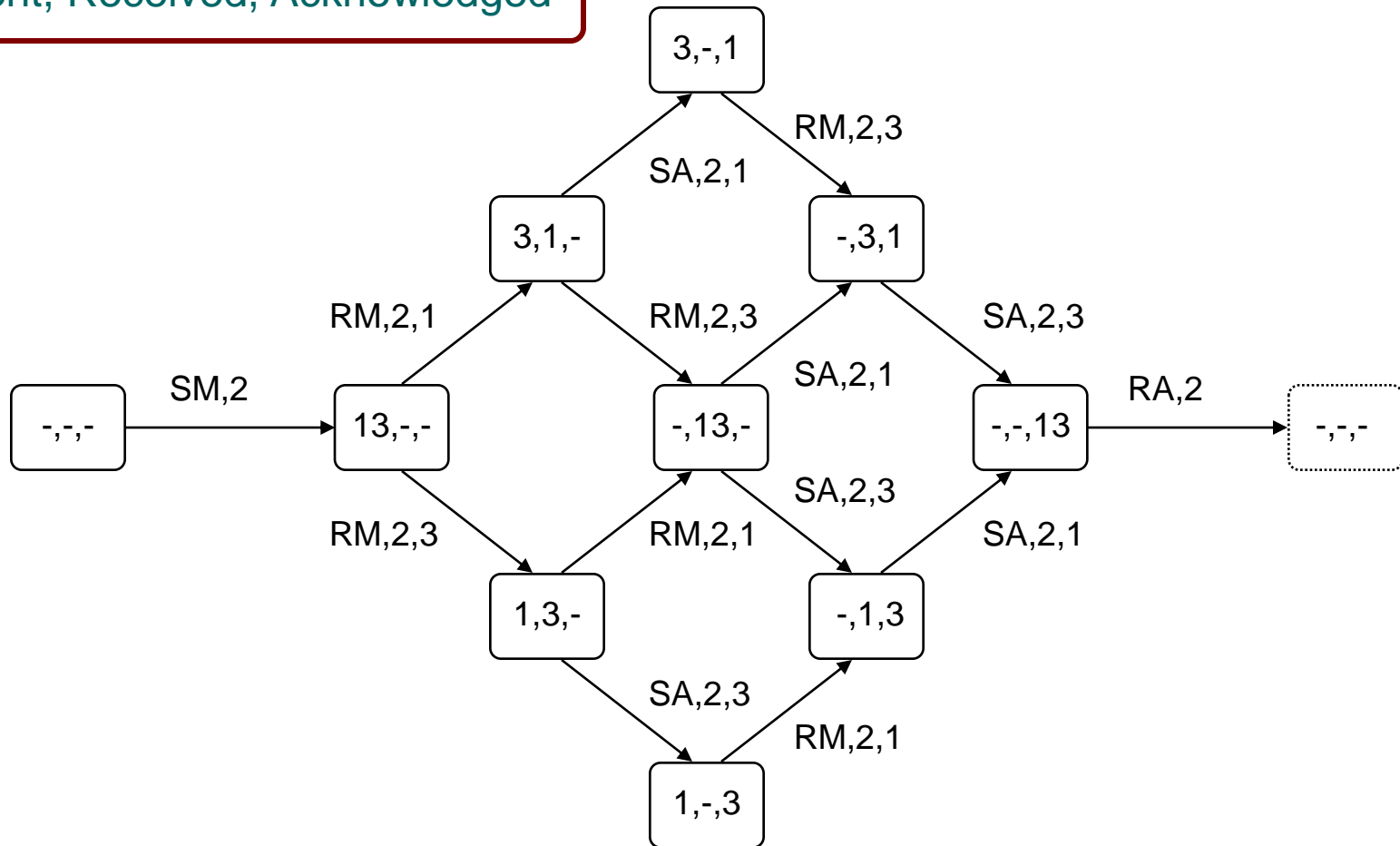
$$\forall p \in P : M'(p) = M(p) - \sum_{p \in \bullet t} E^-(p, t) \langle b \rangle + \sum_{p \in t \bullet} E^+(t, p) \langle b \rangle$$

- Ekkor M' közvetlenül elérhető M -ből: $M \xrightarrow{(t, b)} M'$

Színezett Petri hálók dinamikus tulajdonságai

Elérhetőségi gráf (részlet)

Sent, Received, Acknowledged



Színezett Petri hálók dinamikus tulajdonságai

- A színezetlen hálóknál megismert tulajdonságok kiterjesztései multihalmazokra

- Korlátosság

Egy hely **korlátos**, ha a tokenek száma bármely állapotban korlátos

- n egy felső **egész korlát** p -re, ha $\forall M \in [M_0\rangle : |M(p)| < n$
- m egy felső **multihalmaz korlát** p -re, ha $\forall M \in [M_0\rangle : M(p) < m$

- Visszatérő tulajdonság

Egy **visszatérő állapotba** mindig lehetséges visszajutni

- M egy **visszatérő állapot**, ha $\forall M' \in [M_0\rangle : M \in [M'\rangle$
- X egy **visszatérő csoport**, ha $\forall M' \in [M_0\rangle : X \cap [M'\rangle \neq \emptyset$

Színezett Petri hálók dinamikus tulajdonságai

- Élőség

Az élőség garantálja, hogy a lekötési elemek egy része aktív marad

- **Halott állapot** (deadlock): egy lekötési elem sem engedélyezett

$$\forall b \in BE: \neg M[b \rangle$$

- **Halott tranzíció**: egyik lekötése sem válhat engedélyezetté

$$\forall M' \in [M \rangle, b \in B(t): \neg M'[b \rangle$$

- **Élő tranzíció**: nincs olyan elérhető állapot, amelyből induló trajektóriákon minden lekötése halott lenne

$$\forall M' \in [M_0 \rangle, \exists M'' \in [M' \rangle, \exists b \in B(t): M''[b \rangle$$

Színezett Petri hálók dinamikus tulajdonságai

- Fair tulajdonság

Fairség megmutatja, hogy egy lekötési elem milyen gyakran tüzel

- Elfogulatlan (impartial) tranzíció: végtelen sokszor tüzel

$$\forall b \in B(t), |\sigma| = \infty : OC_b(\sigma) = \infty$$

- Fair tranzíció: végtelen sok engedélyezés \Rightarrow végtelen sok tüzelés

$$\forall b \in B(t), |\sigma| = \infty : EN_b(\sigma) = \infty \Rightarrow OC_b(\sigma) = \infty$$

- Igazságos (just) tranzíció: perzisztens engedélyezés \Rightarrow tüzelés (nincs perzisztens engedélyezés tüzelés nélkül)

$$\forall b \in B(t), \forall i \geq 1 :$$

$$\left[EN_{b,i}(\sigma) \neq 0 \Rightarrow \exists k \geq i : \left[EN_{b,k}(\sigma) = 0 \vee OC_{b,k}(\sigma) \neq 0 \right] \right]$$

Színezett Petri hálók strukturális tulajdonságai

T-invariáns színezett Petri hálóknban

- Tranzíció invariáns

Olyan σ tüzelési szekvencia, ami nem hat az állapotra:

$$M'(p) = M(p) - \sum_{p \in \bullet t, b \in \sigma} E^-(p, t) \langle b \rangle + \sum_{p \in t \bullet, b \in \sigma} E^+(t, p) \langle b \rangle$$

ahol $M'(p) - M(p) = 0$ minden p -re

$$\text{ekkor } \sum_{p \in \bullet t, b \in \sigma} E^-(p, t) \langle b \rangle = \sum_{p \in t \bullet, b \in \sigma} E^+(t, p) \langle b \rangle$$

P-invariáns színezett Petri hálóknban

- Hely invariáns

Alapötlet: Egyenlet, ami minden elérhető állapotban fennáll

– Súlyozott tokenösszeg állandó:

$$W_{p_1}(M(p_1)) + W_{p_2}(M(p_2)) + \dots + W_{p_n}(M(p_n)) = m_{\text{inv}}$$

– Súlyfüggvény: hely színekészletét egy közös multihalmazra képezi le

– W_p egy **P-invariáns**:

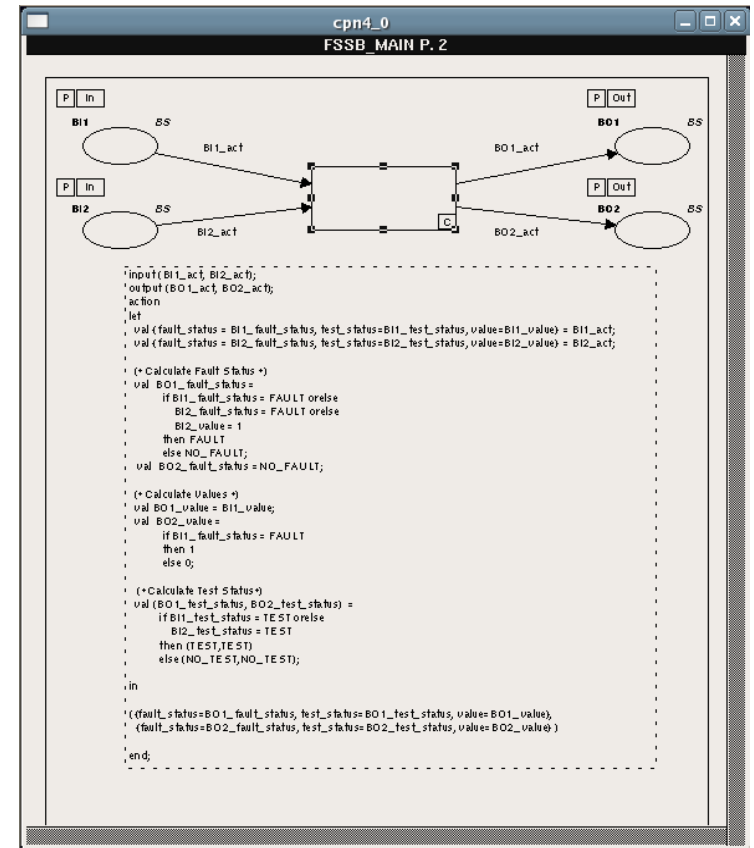
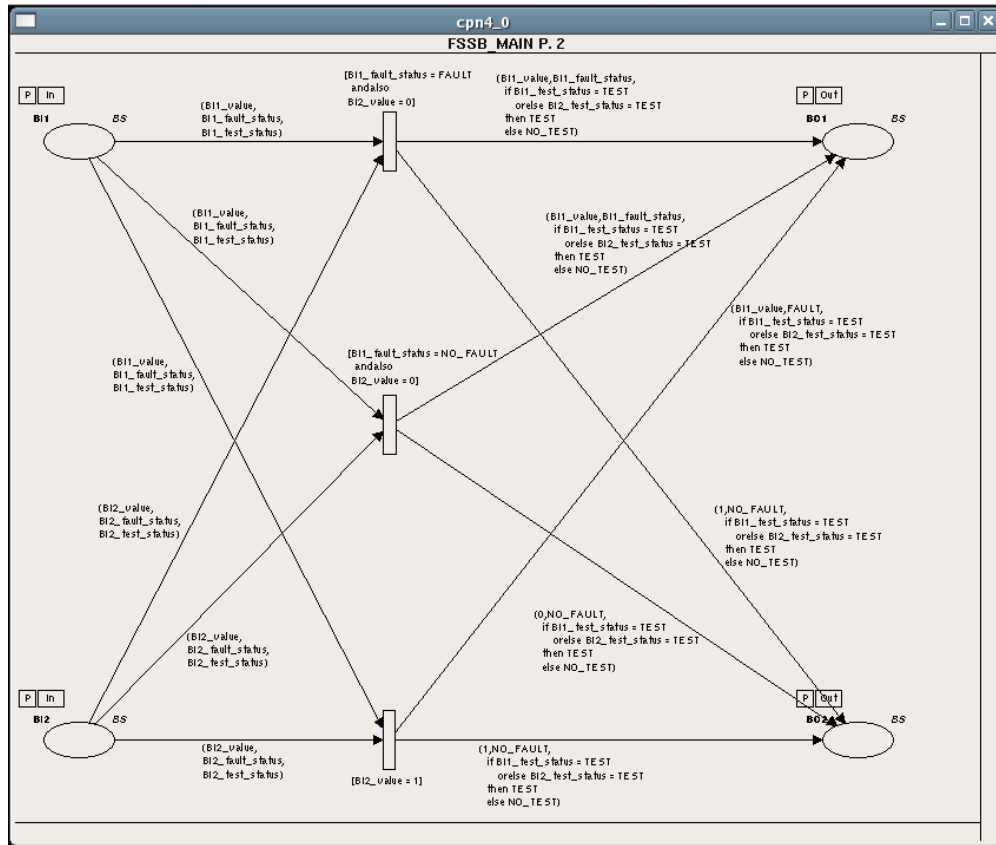
$$\forall M \in [M_0\rangle : \sum_{p \in P} W_p(M(p)) = \sum_{p \in P} W_p(M_0(p))$$

Színezett Petri hálók széthajtogatása

Színezett Petri hálók felépítésének lehetőségei

- CPN hálók: strukturális és adattartalom is lehet
- Szélsőségek
 - Tisztán strukturális információ, nincs adattartalom:
 - Közöséges Petri-háló (előállítható CPN-ből is)
 - Nincs struktúra, csak adattartalom (adat és vezérlési információ):
 - Egy hely + egy tranzíció, komplex színosztályok és élkifejezések
- Kompromisszumra van szükség
 - Érthető, áttekinthető CPN háló legyen

Példa: Modellezési lehetőségek



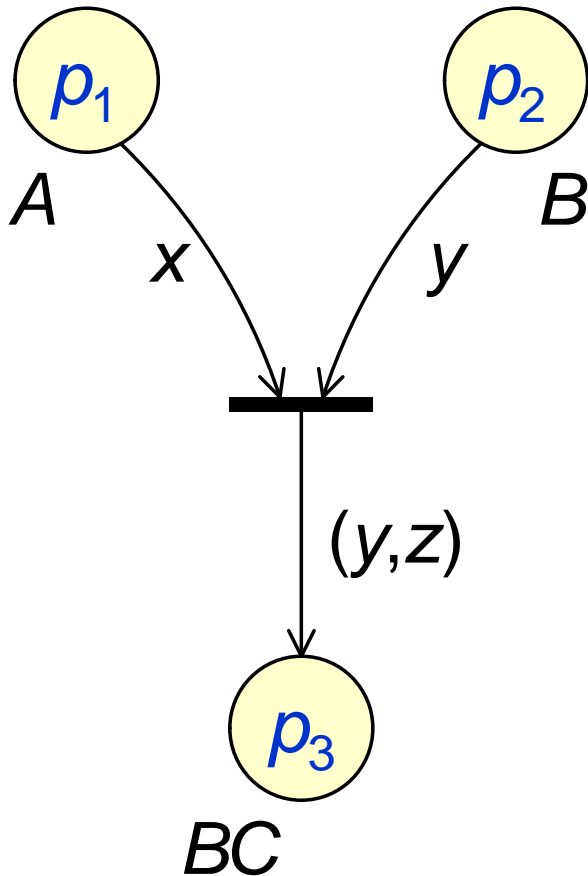
vezérlési folyamat struktúrában kifejezve

ugyanaz csak kódban
(„összehajtogatva”)

Széthajtogatás

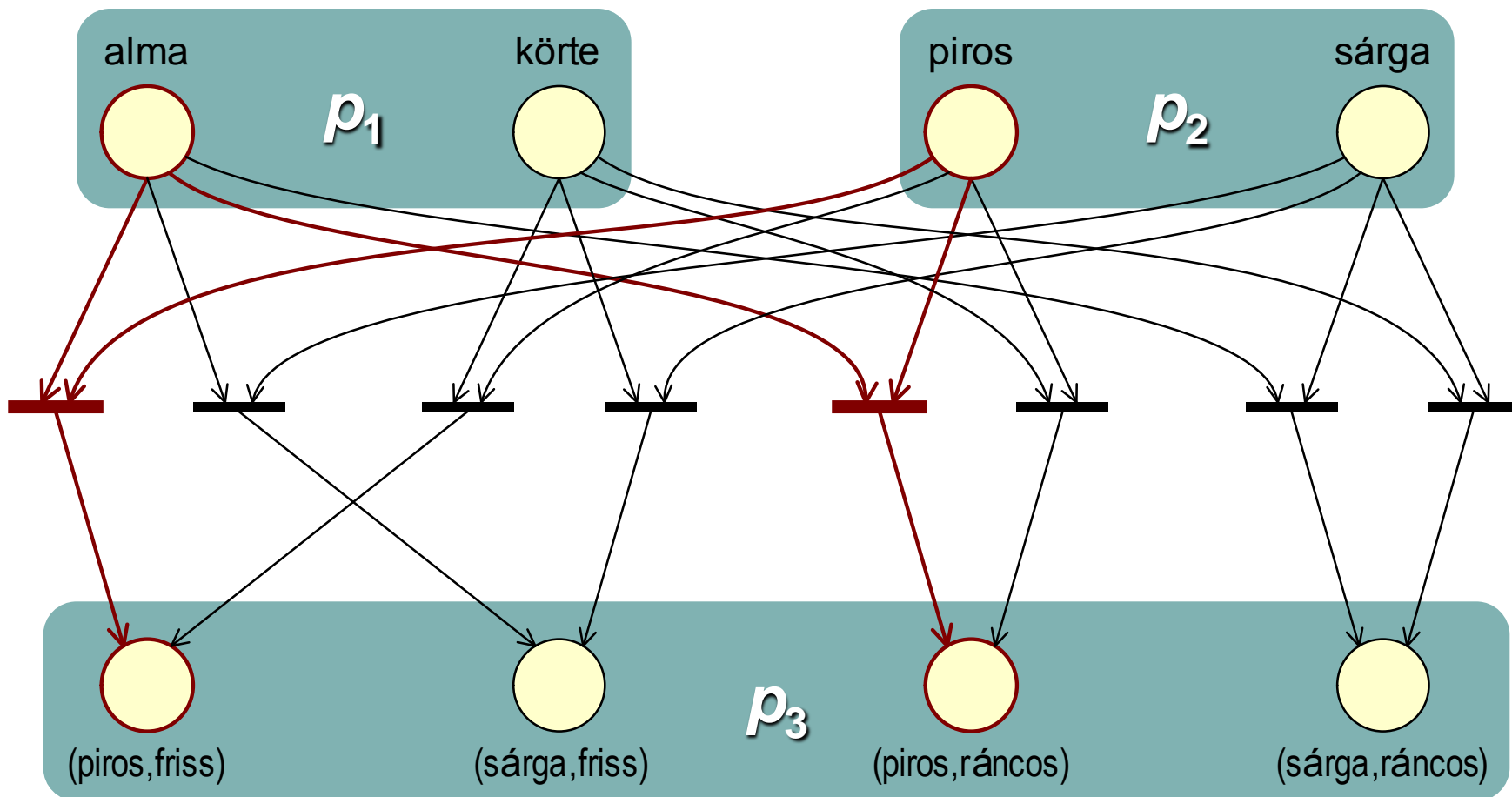
- (Prioritásos) színezett háló modellező ereje megfelel a tiltó éllel kiegészített (prioritásos) színezetlen hálókénak
 - Minden színezett hálónak megfeleltethető egy ekvivalens működésű színezetlen háló (automataelméleti értelemben → lépésekre biszimuláció)
 - Ekvivalens színezetlen háló: széthajtogatott háló
 - Széthajtogatás:
 - Tokenek adattartalmát struktúrában fejezzük ki
 - Minden eseménynek a színezett hálóban megfelel egy és csak egy esemény a széthajtogatott hálóban

Egyszerű színezett háló



```
color A = with alma | körte;  
color B = with piros | sárga;  
color C = with friss | ráncos;  
color BC = product B*C declare mult;  
var x: A;  
var y: B;  
var z: C;
```

A széthajtogatott, színezetlen háló



Példa: Egy egyszerű commit protokoll

A probléma leírása:

- Egy rendszerben három egység van: c_1 , c_2 és c_3
- Közülük véletlenszerűen az egyik lesz a koordinátor, aki kérést küld a másik kettőnek
- A kérés hatására a felkért egység vagy **abort**, vagy **commit** szavazatot ad
- A két egység szavazata alapján a koordinátor dönt: ha mindkét egység **commit** döntést hozott, akkor a döntés **commit**, egyébként **abort**

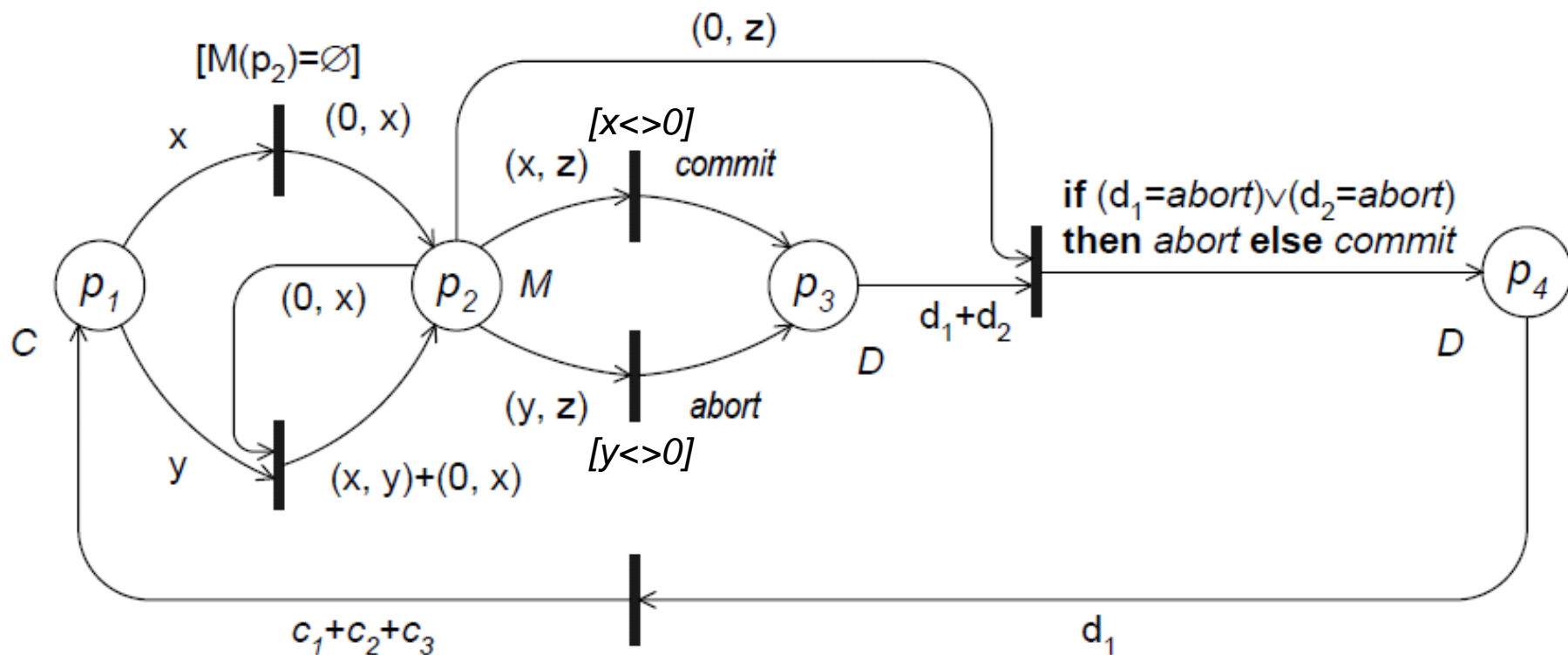
Példa: Az egyszerű commit protokoll modellje

- A színezett Petri háló modellben három színosztály definiált. Ebből kettő egyszerű halmaz:
 - $C = \{0, c_1, c_2, c_3\}$ az egységeknek,
 - $D = \{\text{commit}, \text{abort}\}$ a szavazatoknak / döntéseknekEgy pedig kompozit színosztály:
 - $M = C \times C$, a felkéréseknek (ki kit kért szavazásra);
a $(0, x)$ típusú token jelöli,
hogy a koordinátort senki sem kéri fel
- Öt változót használunk, értékészletük: $x, y, z \in C$;
és $d1, d2 \in D$
- Az **if** élkifejezés a programozási nyelveknél megszokott jelentést hordozza
- A háló kezdőállapotában a p_1 helyen 3 token van:
 $M(p_1) = c_1 + c_2 + c_3$, a többi hely üres
- A \emptyset jel az üres halmazt jelöli

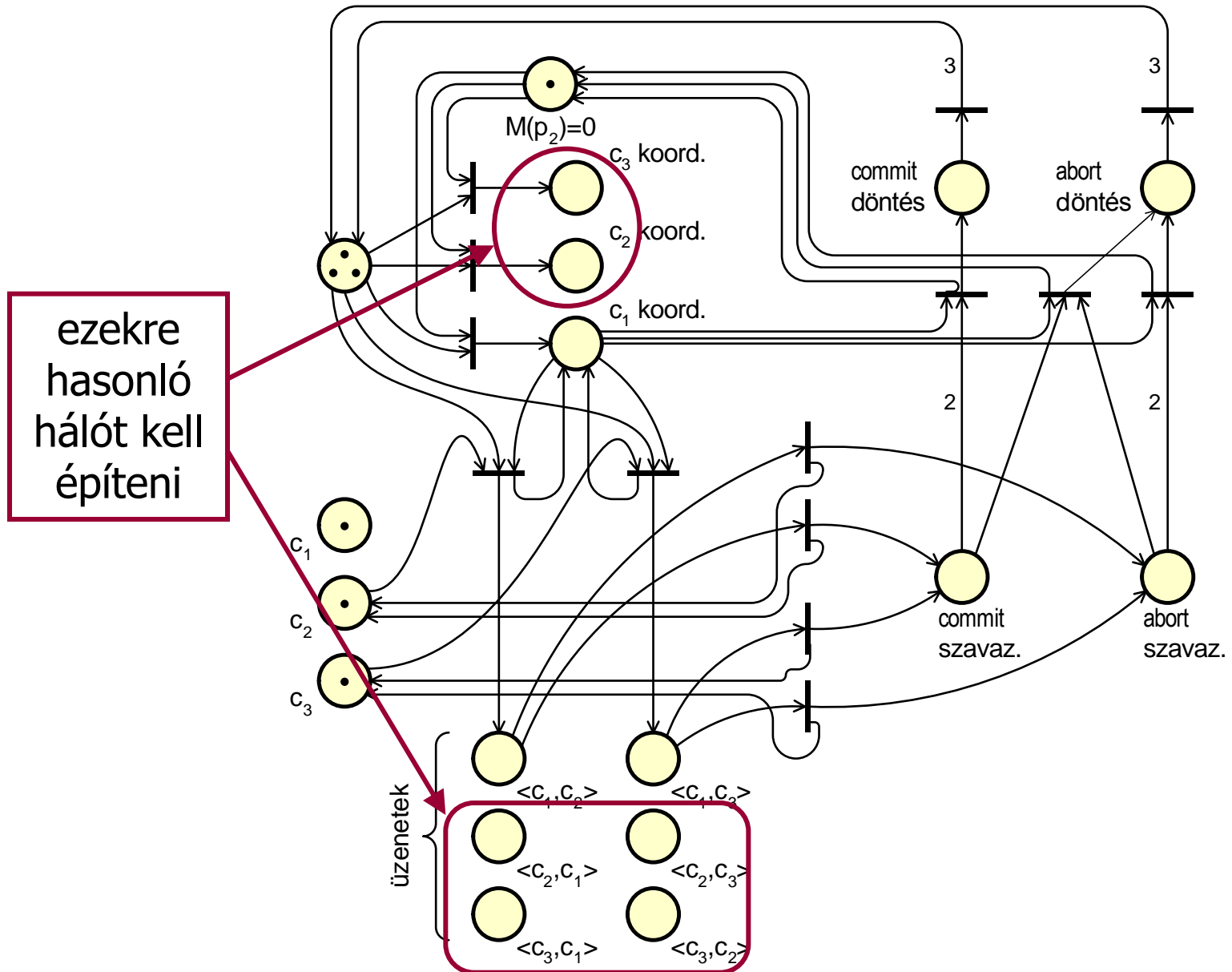
Példa: Az egyszerű commit protokoll modellje

- Színezett Petri háló modellje:

- p_1 : Résztvevők (kezdeti állapotban c_1, c_2, c_3 tokenek)
- p_2 : Kérések
- p_3 : Szavazatok
- p_4 : Döntés



Példa: Az egyszerű commit protokoll modellje



Színezett Petri háló példa: Elosztott adatbáziskezelő

Az elosztott adatbáziskezelő specifikációja

- n különböző szerver, minden szerverhez egy adatbázis példány, amit egy lokális adatbázis menedzser kezel

$$DBM = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}, n \geq 3$$

- Rendszer állapota: Active, Passive
- Adatbázis menedzserek állapota: Inactive, Waiting (nyugtázásra vár), Performing
- Lokális frissítés lehetséges, de a menedzsernek minden más menedzsert egy üzenettel értesítenie kell a frissítésről
- Üzenet fejléc: küldő és fogadó (címezett)
 $MES = \{(s,r) \mid s,r \in DBM \wedge s \neq r\}, \quad Mes(s) = \sum_{r \in DBM - \{s\}} 1 \cdot (s,r)$
- Üzenetek állapota: Unused, Sent, Received, Acknowledged

Elosztott adatbáziskezelő: Deklarációk

Deklarációs mező

```
val n = 4;  
color DBM = index d with 1..n declare ms;  
color PR = product DBM * DBM declare mult;  
fun diff(x,y) = (x<>y);  
color MES = subset PR by diff declare ms;  
color E = with e;  
fun Mes(s) = mult'PR(1`s, DBM--1`s)  
var s, r : DBM;
```

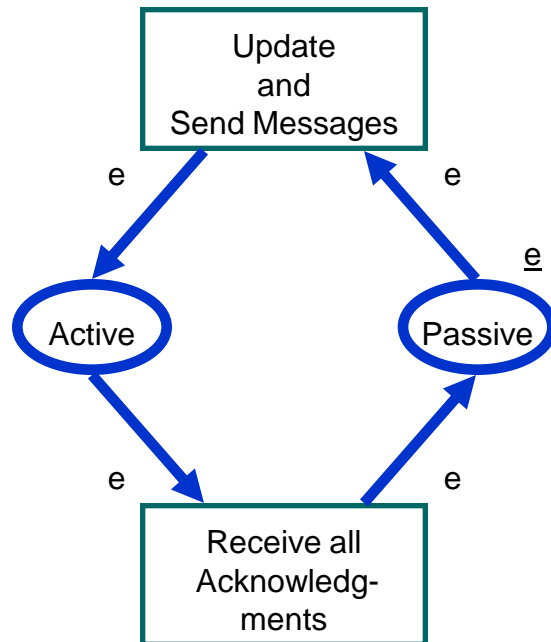
Jelentése:

$$\text{DBM} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

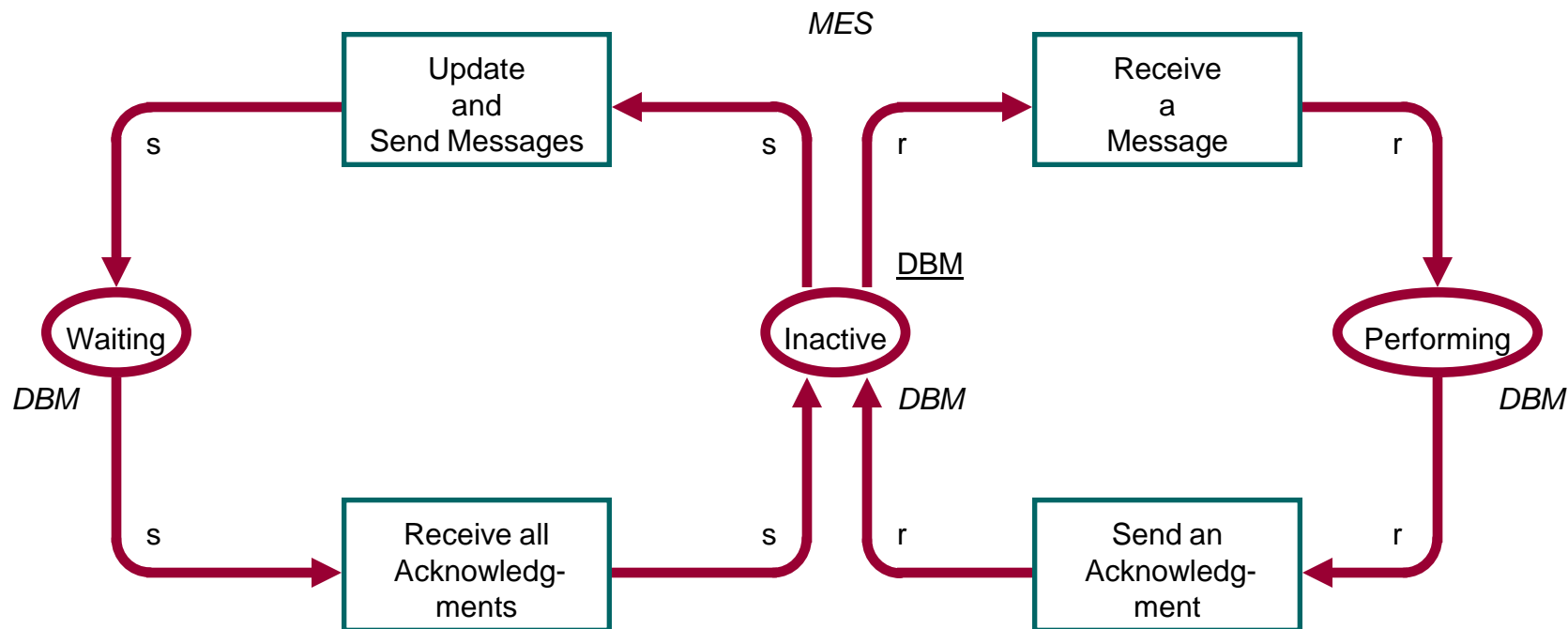
$$\text{MES} = \{(s, r) \mid s, r \in \text{DBM} \wedge s \neq r\}$$

$$\text{Mes}(s) = \sum_{r \in \text{DBM} - \{s\}} 1'(s, r)$$

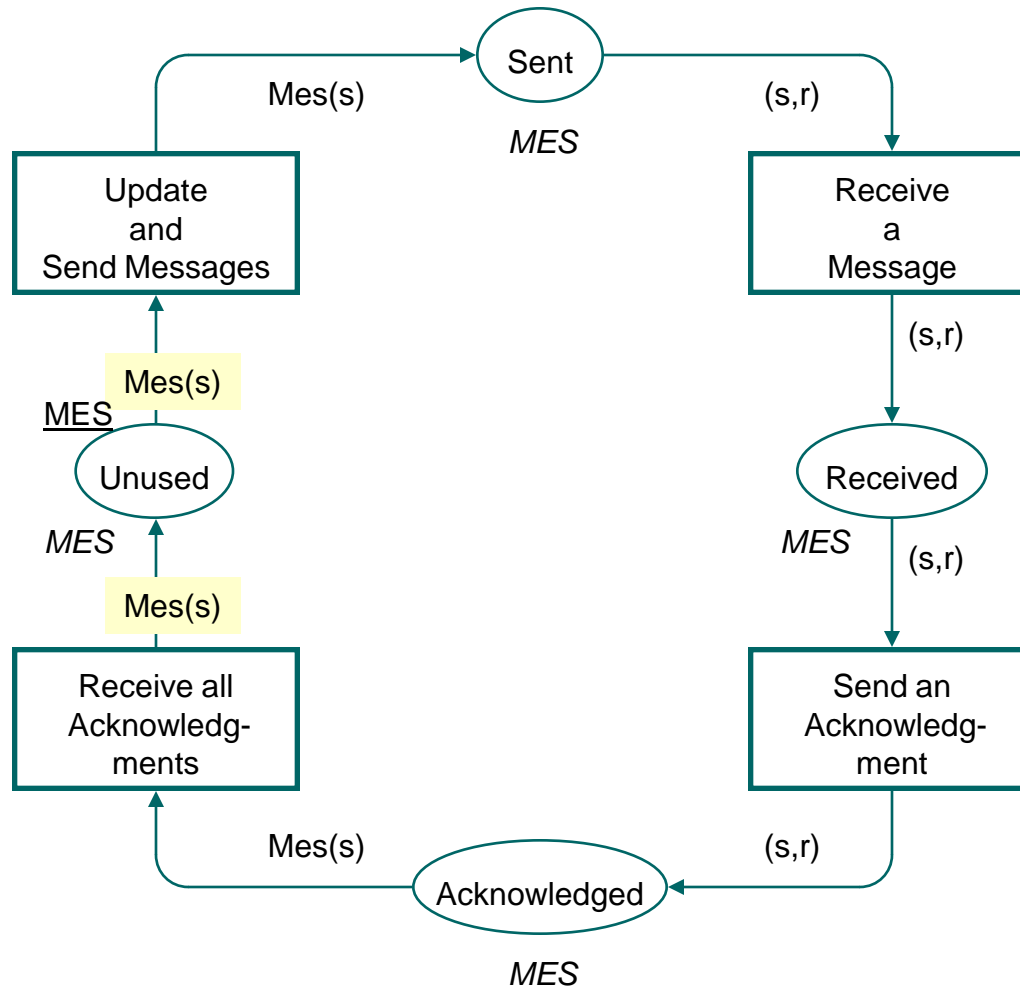
Elosztott adatbáziskezelő: Rendszer komponens



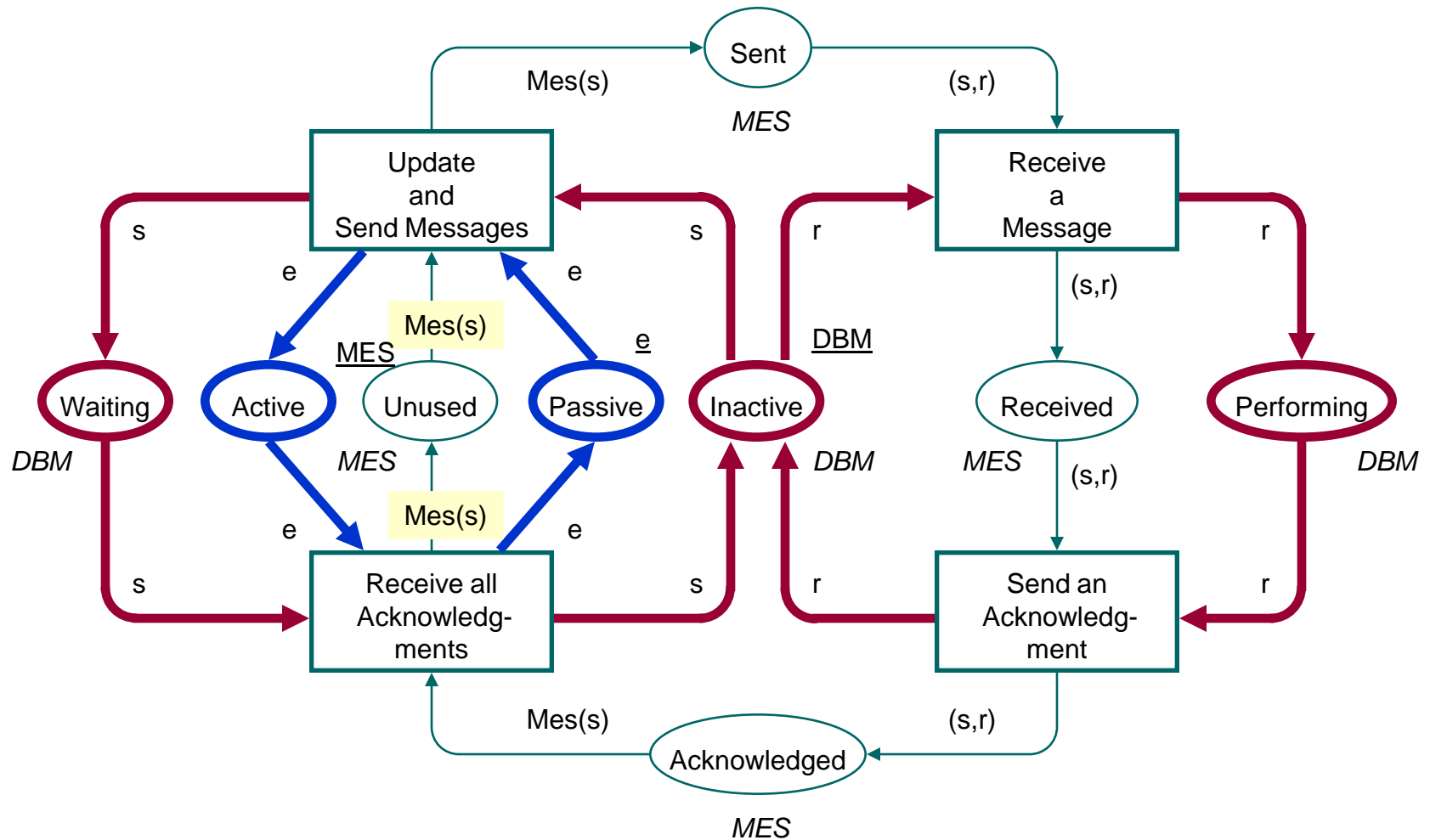
Elosztott adatbáziskezelő: Adatbázis menedzserek



Elosztott adatbáziskezelő: Üzenetek



Elosztott adatbáziskezelő: A teljes CP háló modell



Dinamikus tulajdonságok: korlátosság

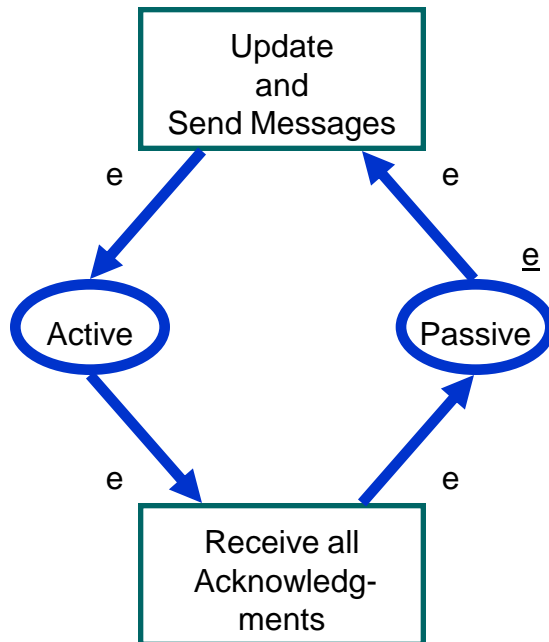
	multihalmaz	integer
– Inactive	DBM	n
– Waiting	DBM	1
– Performing	DBM	n - 1
– Unused	MES	$n*(n - 1)$
– Sent, Received, Acknowledged	MES	n - 1
– Passive, Active	E	1

Strukturális tulajdonságok: P-invariánsok

- $M(\text{Active}) + M(\text{Passive}) = 1 \cdot e$
- $M(\text{Inactive}) + M(\text{Waiting}) + M(\text{Performing}) = \text{DBM}$
- $M(\text{Unused}) + M(\text{Sent}) + M(\text{Received}) + M(\text{Acknowledged}) = \text{MES}$
- $M(\text{Performing}) - \text{Rec}(M(\text{Received})) = \emptyset$
- $M(\text{Sent}) + M(\text{Received}) + M(\text{Acknowledged}) - \text{Mes}(M(\text{Waiting})) = \emptyset$
- $M(\text{Active}) - \text{Ign}(M(\text{Waiting})) = \emptyset$
 - $\text{Ign}()$ függvény tetszőleges színű tokent $e \in E$ színű tokenre vált

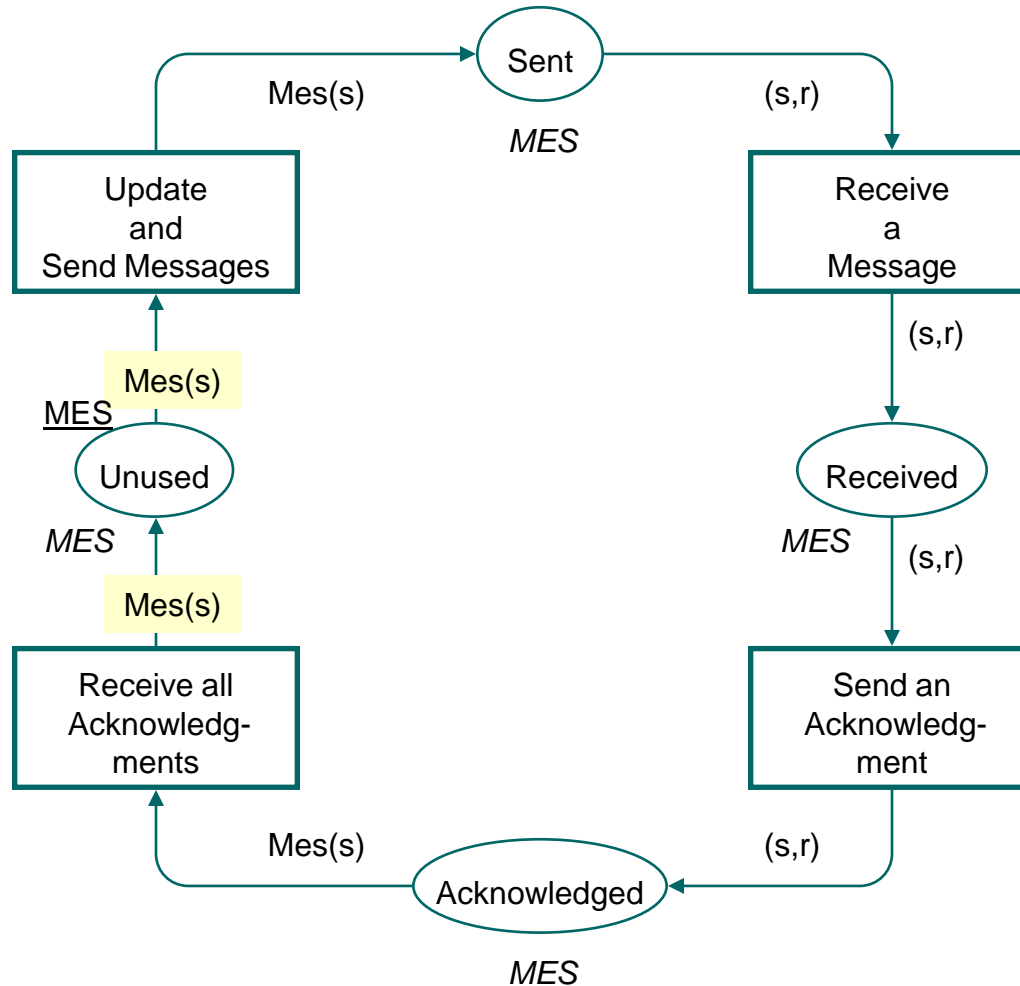
P-invariáns: a rendszer állapota

$$M(\text{Active}) + M(\text{Passive}) = 1 \cdot e$$

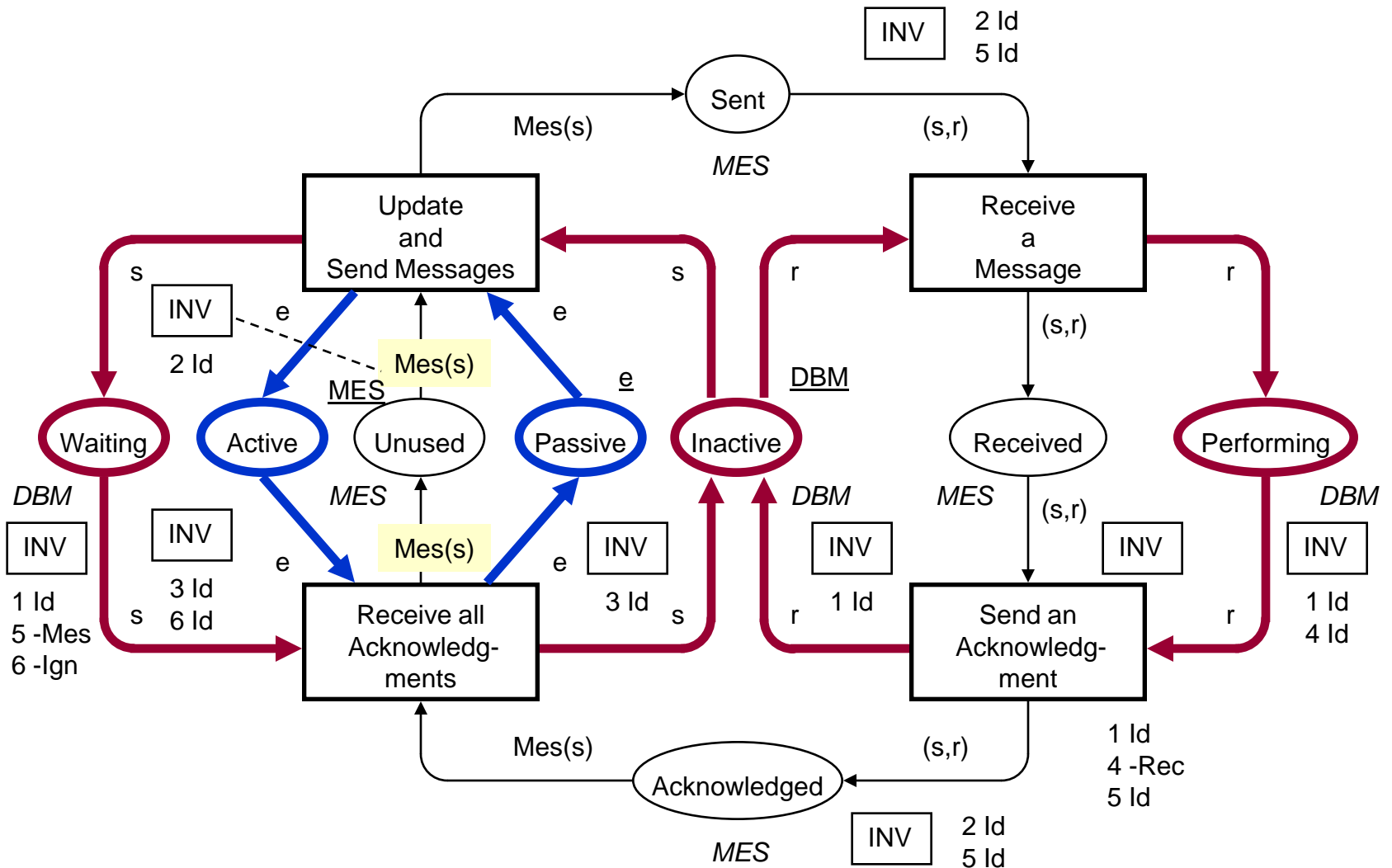


P-invariáns: üzenetvábbító alrendszer

$$M(\text{Unused}) + M(\text{Sent}) + M(\text{Received}) + M(\text{Acknowledged}) = \text{MES}$$

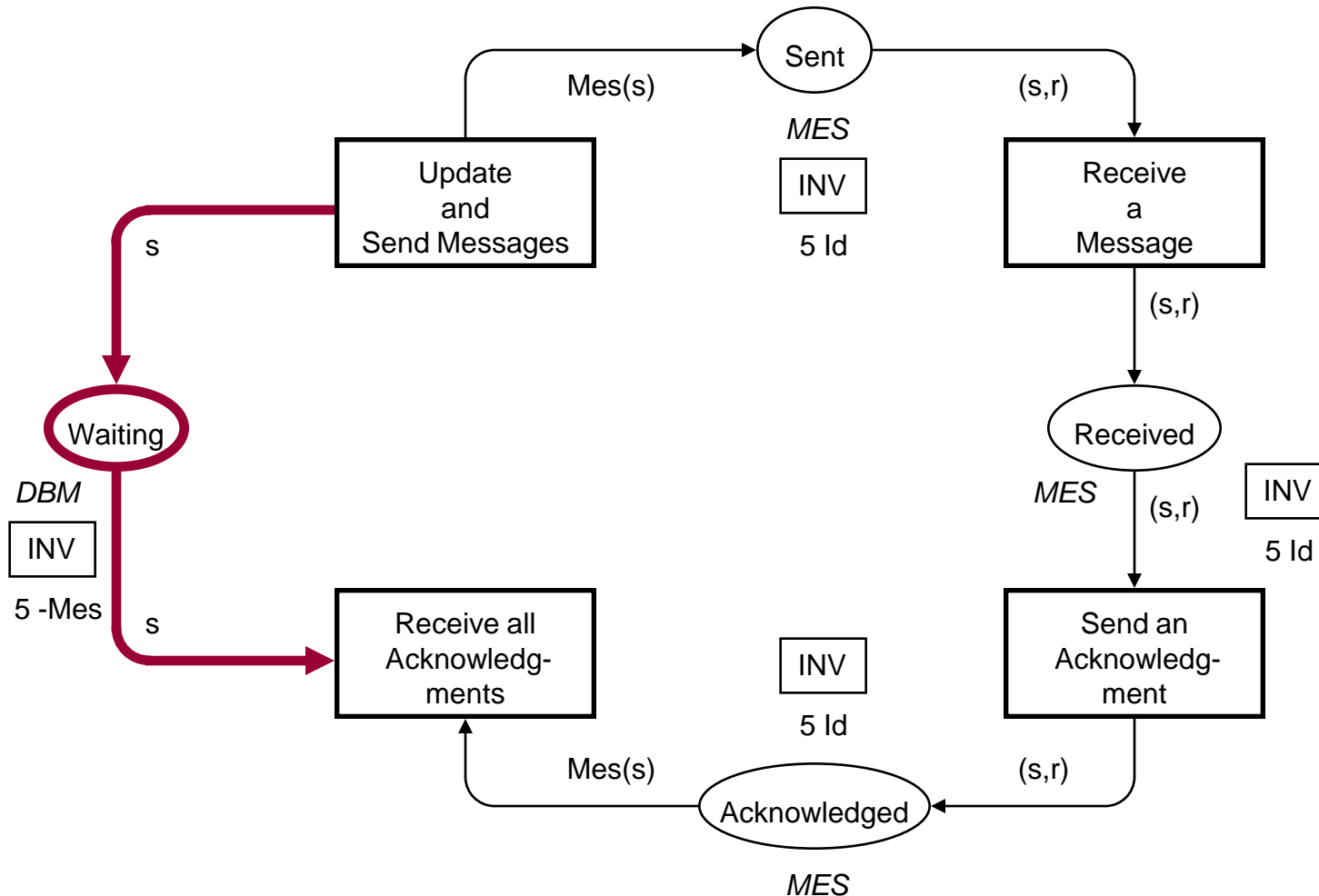


P-invariánsok a modellben

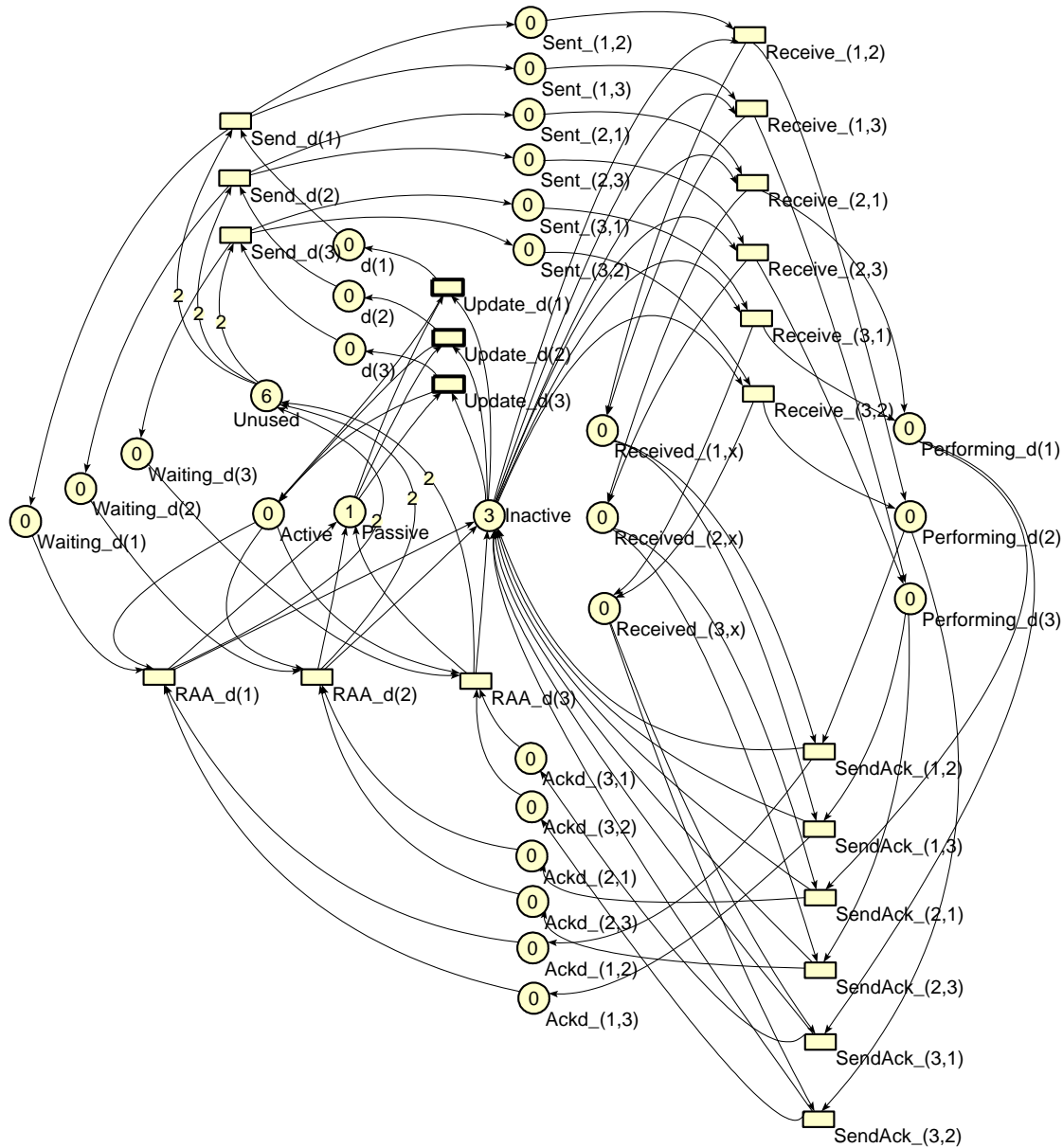


A modell egyik P-invariánsa

$$M(\text{Sent}) + M(\text{Received}) + M(\text{Acknowledged}) - \text{Mes}(M(\text{Waiting})) = \emptyset$$



A modell széthajtogatása



Hierarchikus színezett Petri hálók

Hierarchikus színezett Petri hálók

- Alhálók integrálása egyetlen összetett CPN hálóvá hierarchikus rendszerben
 - **Lapok: színezett Petri háló modellek**
 - Lapszám, lapnév: alternatívák a lapra való hivatkozáshoz
 - A lapok példányosíthatók (a hierarchia bármelyik szintjén)
 - A jelölés (tokeneloszlás) minden példányra egyedi
 - **Hierarchikus jelölések: Al-lap ↔ felettes lap**
 - Fő (prime) lap: legfelső szint
 - Másodlagos lap példányok (al-lapok)
 - Azonosítás: lap példány azonosító szám
 - Laphierarchia gráf

Hierarchikus felépítés eszközei

1. Helyettesítő tranzíciók

- Port kiosztás (interfészek): al-lap → felettes lap
 1. „Port” hely (az al-lapon) → ezekkel kapcsolódik az alháló; port típus: bemenet, kimenet, I/O (kétirányú), általánosított
 2. „Socket” hely (a főlapon) → az alhálók beillesztési pontjai

2. Fúziós helyek

- Azonos névvel, de több példányban létrehozott helyek, amik ugyanazon helyet jelölik a háló több pontján
- A tokenek egyszerre kerülnek be / távolítódnak el egy adott fúziós helyhez tartozó helyhalmazba/-ból

Példa: az egyszerű protokoll hierarchikus változata

