

# Petri hálók strukturális és dinamikus tulajdonságai közti összefüggések (kiegészítő anyag)

dr. Bartha Tamás  
dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

# Petri háló tulajdonságok

## Dinamikus tulajdonságok:

- Élőség
- Holtpontmentesség
- Korlátosság
- Megfordíthatóság
  - Visszatérő állapot
- Perzisztencia
- Globális fair reláció
  - B-fair (korlátos fair) reláció

## Strukturális tulajdonságok:

- Strukturális élőség
- Vezérelhetőség
- Strukturális korlátosság
- Konzervativitás
  - P-invariáns (hely)
- Ismételhetség
  - T-invariáns (tüzelési)
- Konzisztencia
- Strukturális B-fair reláció

# Holtpontmentesség $\rightarrow$ T-invariáns

- Ha  $(N, M_0)$  Petri háló korlátos és holtpontmentes:  
 $\Rightarrow \exists \vec{\sigma}_T$  tüzelhető T-invariáns, melyre  $\boxed{\vec{\sigma}_T \geq 0 \neq 0}$
- Bizonyítás:
  - korlátosság  $\Rightarrow$  véges állapottér
  - holtpontmentesség  $\Rightarrow \exists$  legalább egy  $M_0$ -ból induló  $\vec{\sigma}_T$  végtelen tüzelési szekvencia
  - végesség  $\Rightarrow \exists$  legalább egy  $M' \in R(N, M_0)$  ismétlődő állapot  $\Rightarrow$  az  $M' \xrightarrow{\vec{\sigma}_T} M'$  szekvencia T-invariáns
- Következmény: ha korlátos és nincs T-invariáns, a hálózat minden úton elakad (nincs ciklusa)

# Élőség $\rightarrow$ T-invariáns

- Ha  $(N, M_0)$  Petri háló élő és korlátos  $\Rightarrow \exists$  tüzelhető  $\vec{\sigma}_T$  T-invariánsa, melyre  $\forall t \in T : \vec{\sigma}_T(t) > 0$
- Bizonyítás:
  - élő  $\Rightarrow \forall t \in T$  tranzíció  $\forall M \in R(N, M_0)$  állapotban  $L_1$ -élő
    - $\exists$  trajektória, hogy minden tranzíció végtelen sokszor tüzel
  - korlátos és holtpontmentes  $\Rightarrow \exists$  tüzelhető T-invariáns
  - indirekt: tegyük fel, hogy  $\exists t_i \in T$  tranzíció, ami nem eleme egyetlen T-invariánsnak sem
    - $S \subseteq R(N, M_0)$  azon állapotok halmaza, melyekből  $t_i$  kimenő él
    - $S$  véges elemű:  $t_i$  véges sokszor tüzelhető anélkül, hogy kétszer azonos állapotból indulnánk  $\Rightarrow$  a Petri háló nem élő!

# Másik gondolatmenet

- Ha  $PN(N, M_0)$  élő
  - $\exists$  olyan tüzelési szekvencia, amelyikben  $\forall t \in T$  tranzíció végtelen sokszor előfordul
  - Pl:  $M_0 \xrightarrow{\dots t_1} M_1 \xrightarrow{\dots t_2} \dots \xrightarrow{\dots t_n} M_n \xrightarrow{\dots t_1} \dots$
  - $\exists$  olyan véges szakaszok, amikben  $\forall t \in T$  tranzíció előfordul
  - végesség  $\Rightarrow$  az ezek által bejárt állapotok között  $\exists$  legalább egy  $M'$  ismétlődő állapot
  - A  $\vec{\sigma}_T : M' \rightarrow M'$  szekvencia T-invariáns, amelyben  $\forall t \in T$  tranzíció előfordul
  - Erre  $\vec{\sigma}_T > 0$

# Következmény

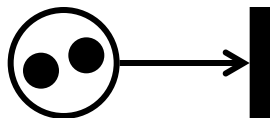
- Ha korlátos Petri hálóban nincs ilyen T-invariáns  $\Rightarrow$  a háló nem élő!
- Bizonyítás (a korábbi gondolatmenettel):
  - ha egy  $t \in T$  tranzíció nincs benne egyetlen T-invariánsban sem  $\Rightarrow$  nincs benne egyetlen ciklusban sem  $\Rightarrow$  csak véges sokszor tüzelhet
- A tétel megfordítása (hálónak  $\exists$  tüzelhető,  $\forall t \in T$  tranzíciót lefedő T-invariánsa  $\Rightarrow$  élő) **nem igaz!**

Ellenpélda:



# P-invariáns $\rightarrow$ Korlátosság

- Ha  $(N, M_0)$  Petri hálónak  $\exists$  minden helyet lefedő P-invariánsa  $\Rightarrow$  a háló korlátos
- Bizonyítás:
  - $\exists$  minden helyet lefedő P-invariáns  $\Rightarrow \exists \vec{\mu} > 0 : \mathbf{W}\vec{\mu} = 0$
  - teljesül a strukturális korlátosság feltétele:  $\vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0$
- A tétel megfordítása (korlátosságból következik a P-invariánsok léte) **triviálisan nem igaz!**



# Összefüggőség → Invariáns

- Minden összefüggő Petri háló, amelynek van
  - egy pozitív (minden tranzíciót fedő) T-invariánsa és
  - egy pozitív (minden helyet fedő) P-invariánsaerősen összefüggő
- Petri háló élő és korlátos  $\Rightarrow$  erősen összefüggő
  - gráf erős összefüggősége szükséges, de nem elégséges
  - létezik olyan erősen összefüggő Petri háló, amelynek
    - nincs korlátos kezdőállapota, amellyel élő
    - nincs nemüres kezdőállapota, amellyel korlátos} vagy