Gyakorló feladatok: Modellezés Petri-hálókkal. Petri-hálók tulajdonságai

Majzik István
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Elméleti kérdések

1. Adja meg a P-invariánsok formális definícióját (a definícióban szereplő változók jelentésének megadásával), és adjon egy példát ezek gyakorlati felhasználhatóságára!
2. Rajzoljon le egy forrás tranzíciót és egy nyelő tranzíciót! Indokolja meg, miért veszélyeztetik ezek egy Petri-háló élőségét és biztosságát!
3. Adja meg a tanult tulajdonságmegőrző transzformációk segítségével az alábbi topológiával megadott Petri-háló redukciós lépéseit, és rajzolja le a végeredményt!

   - $\bullet p_1 = \varnothing$
   - $\bullet p_2 = \{t_1, t_2\}$
   - $\bullet t_1 = \{p_1\}$
   - $\bullet t_2 = \{p_1\}$

Elméleti kérdések: Megoldás

1. Adja meg a P-invariánsok formális definícióját (a definícióban szereplő változók jelentésének megadásával), és adjon egy példát ezek gyakorlati felhasználhatóságára!
   - P-invariánsok: Egy nemnegatív μ_P súlyvektor által kijelölt helyeken a tokenek súlyozott összege állandó marad:

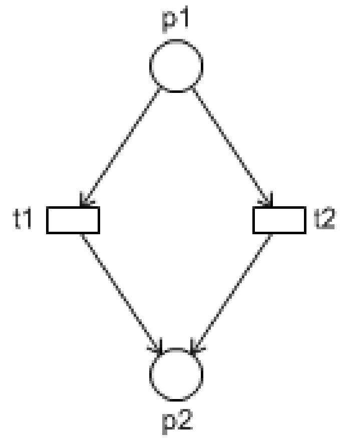
$$\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \text{állandó}$$

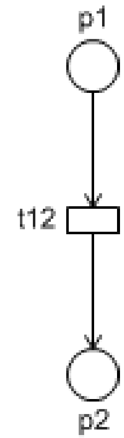
   - Alkalmazási példa: Munkafolyamat modellje esetén a tokenekkel modellezett erőforrások száma nem változik (egyszeres súlyozással)
2. Rajzoljon le egy forrás tranzíciót és egy nyelő tranzíciót! Indokolja meg, miért veszélyeztetik ezek egy Petri-háló élőségét és biztosságát!
   - Forrás tranzíció: Csak kimenő éle van. Tokeneket „termel”, így a korlátosságot és biztosságot veszélyezteti a kimenő helyein.
   - Nyelő tranzíció: Csak bemenő éle van. Tokeneket „fogyaszt”, így az élőséget veszélyezteti.

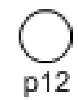
Elméleti kérdések: Megoldás

3. Adja meg a tanult tulajdonságmegőrző transzformációk segítségével az alábbi topológiával megadott Petri-háló redukciós lépéseit, és rajzolja le a végeredményt!

- $p_1 = \varnothing$
- $p_2 = \{t_1, t_2\}$
- $t_1 = \{p_1\}$
- $t_2 = \{p_1\}$





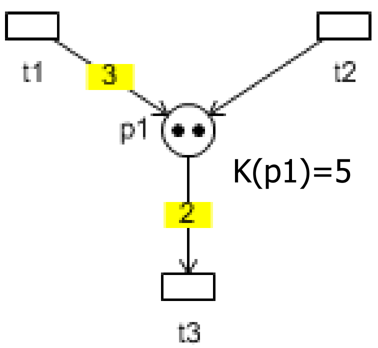


1. lépés: Párhuzamos tranzíciók szabálya

2. lépés: Soros helyek szabálya

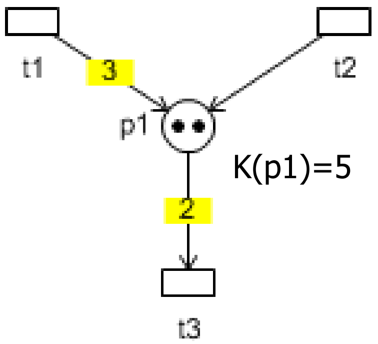
Kapacitáskorlát Petri-hálókban

- Mit jelent az, hogy egy Petri-hálóban egy hely kapacitáskorlátos?
- A mellékelt véges kapacitású hálóból rajzoljon ekvivalens, kapacitáskorlát nélküli hálót!

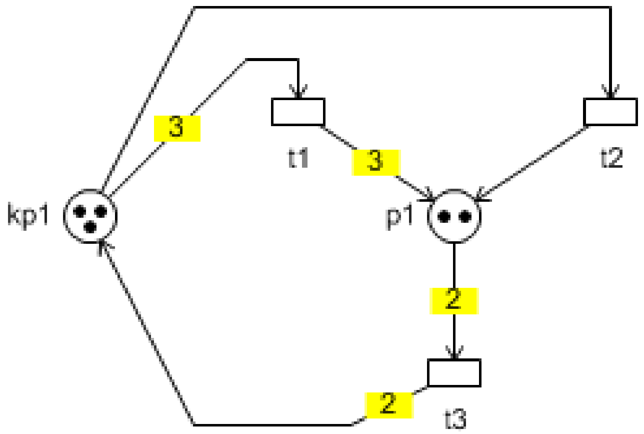


Kapacitáskorlát Petri-hálókban: Megoldás

- Mit jelent az, hogy egy Petri-hálóban egy hely kapacitáskorlátos?
  - Tüzelés után a tokenszám nem lehet nagyobb, mint a kapacitáskorlát értéke az adott helyen.



- A mellékelt véges kapacitású hálóból rajzoljon ekvivalens, kapacitáskorlát nélküli hálót!
  - A szabad kapacitás megjelenítésére kp1 kiegészítő hely

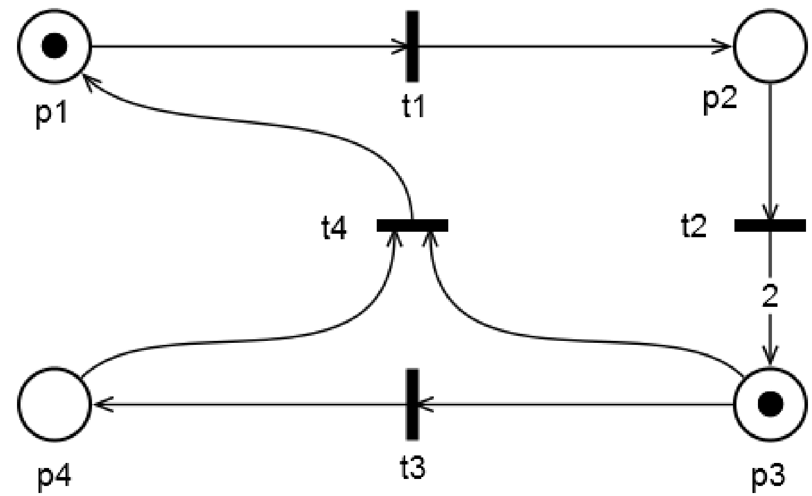


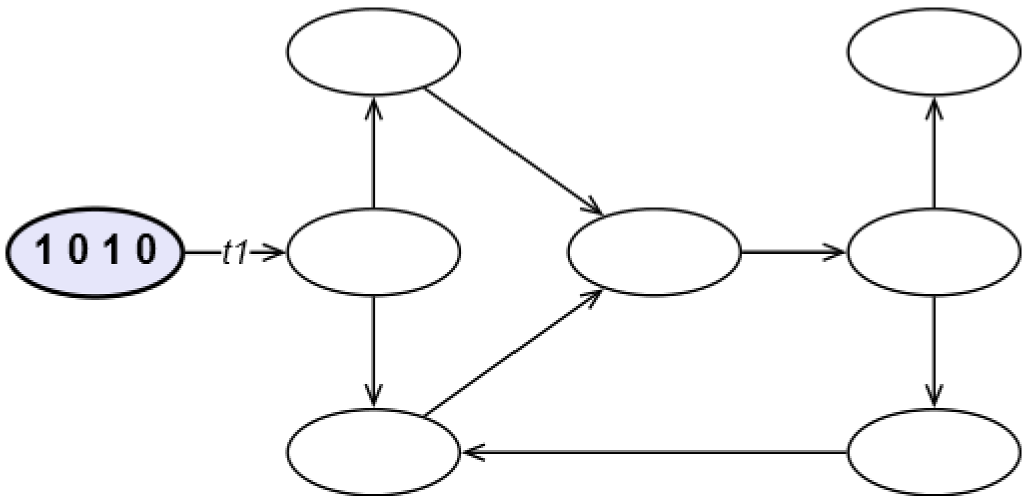
Állapottér felvétele

- Egészítse ki a Petri-háló alábbi elérhetőségi gráfját!

  A gráfból hiányoznak élek, élcímkék és állapotcímkék.

  A kezdőállapot a baloldalon található szürke hátterű állapot.



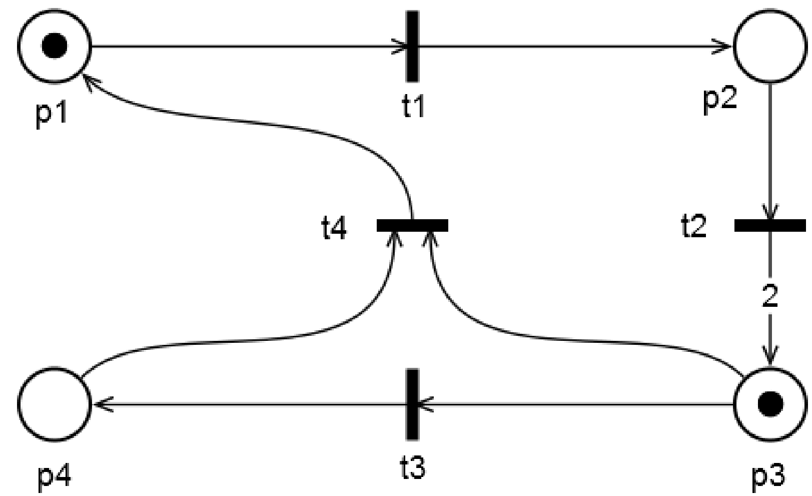


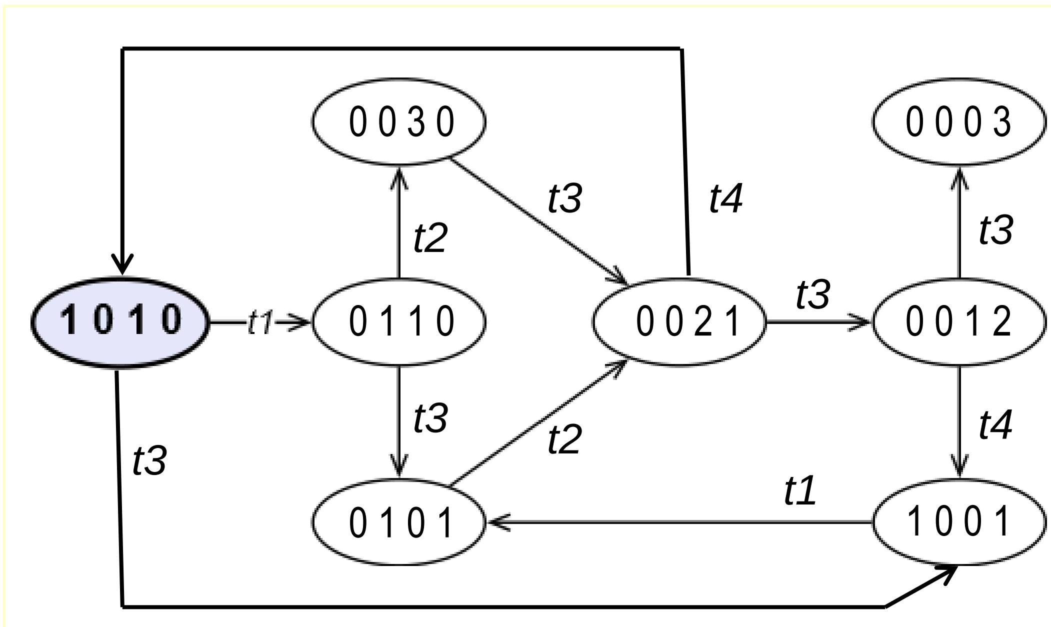
Állapottér felvétele: Megoldás

- Egészítse ki a Petri-háló alábbi elérhetőségi gráfját!

  A gráfból hiányoznak élek, élcímkék és állapotcímkék.

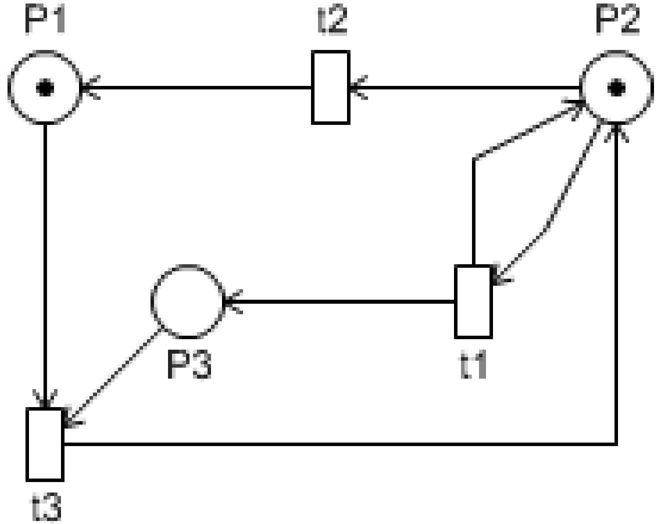
  A kezdőállapot a baloldalon található szürke hátterű állapot.





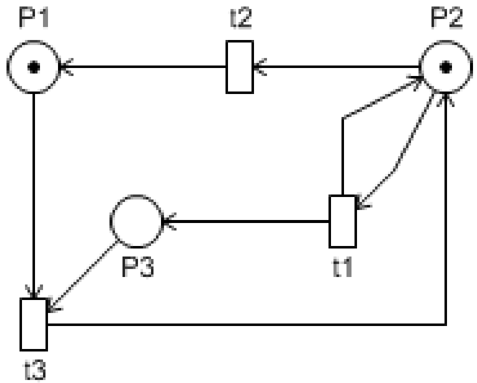
Fedési gráf felvétele

- Rajzolja fel az alábbi Petri-háló fedési gráfját!
- Hogyan változik a gráf, ha a P2 hely kapacitáskorlátos, 1 korláttal?

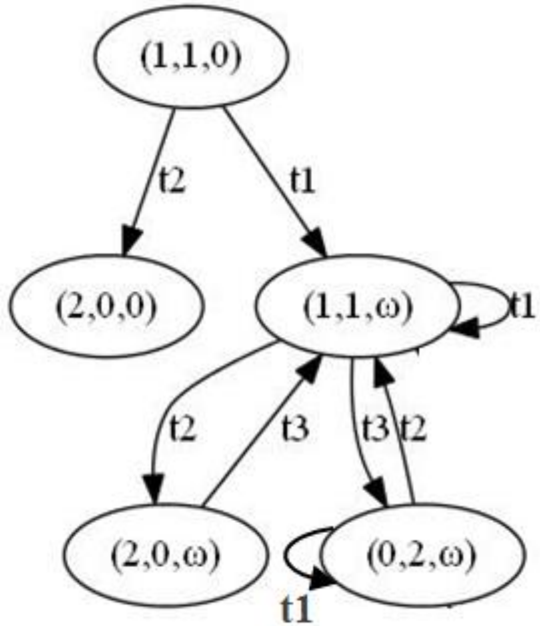


Fedési gráf felvétele: Megoldás

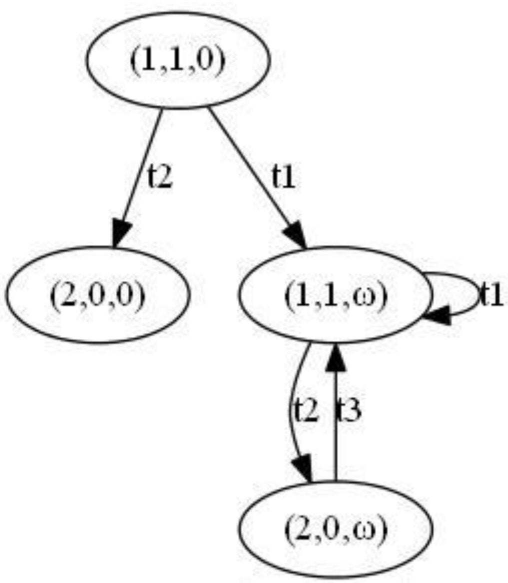
- Rajzolja fel az alábbi Petri-háló fedési gráfját!



Kapacitáskorlát nélkül (P1, P2, P3):



Kapacitás-korláttal (P1, P2, P3):



Dinamikus tulajdonságok

- Vizsgálja meg az előző példában elkészített elérhetőségi gráfot és a Petri-hálót, majd jelölje be az alábbi táblázatban a Petri-háló dinamikus tulajdonságait!

		igaz	hamis	nem dönthető el
(a)	A háló elérhetőségi és fedési gráfja azonos	☐	☐	☐
(b)	A háló nem perzisztens	☐	☐	☐
(c)	A hálóban van holtpont (deadlock)	☐	☐	☐
(d)	*t3* tranzíció L2-élő	☐	☐	☐

		igaz	hamis	nem dönthető el
(e)	A *t1*, *t2*, *t4* tüzelési szekvencia egy T-invariánst alkot	☐	☐	☐
(f)	*t3* és *t4* tranzíció korlátos fair	☐	☐	☐
(g)	A (0 1 0 1) állapot visszatérő állapot	☐	☐	☐
(h)	A háló globális fair	☐	☐	☐

Dinamikus tulajdonságok: Megoldás

		igaz	hamis	nem dönthető el			igaz	hamis	nem dönthető el
(a)	A háló elérhetőségi és fedési gráfja azonos	☐	☐	☐	(e)	A *t1*, *t2*, *t4* tüzelési szekvencia egy T-invariánst alkot	☐	☐	☐
(b)	A háló nem perzisztens	☐	☐	☐	(f)	*t3* és *t4* tranzíció korlátos fair	☐	☐	☐
(c)	A hálóban van holtpont (deadlock)	☐	☐	☐	(g)	A (0 1 0 1) állapot visszatérő állapot	☐	☐	☐
(d)	*t3* tranzíció L2-élő	☐	☐	☐	(h)	A háló globális fair	☐	☐	☐

a) Igaz, mert korlátos.
b) Igaz, ld. (0 0 1 2) esetén t3 és t4.
c) Igaz, ld. (0 0 0 3)
d) Igaz, mert t3-at tartalmazó ciklusból kilépve holtpontra juthat.
e) Hamis, ilyen ciklus nincs.
f) Igaz, mert egymás nélkül nem szerepelnek ciklusban.
g) Hamis, mert (0 0 0 3)-ból nem elérhető.
h) Igaz, mert a véges tüzelési szekvenciákat kivéve minden ciklusban az összes tranzíció benne van.

Dinamikus tulajdonságok: Emlékeztető (1/2)

- Korlátosság:
  - Véges elérhetőségi gráf, a fedési gráfban nincs ω címke
  - Biztosság: Az elérhetőségi gráfban csak 0 és 1 jelölések vannak
- Megfordíthatóság:
  - Az elérhetőségi gráf egyetlen erősen összekötött komponens
- Visszatérő állapot:
  - Van az elérhetőségi gráfban erősen összekötött komponens, aminek része a kérdéses állapot
- Fairség:
  - „Az egyik tranzíció korlátos sokszor tüzelhet, mielőtt a másik tüzelne”: Ellenpélda: Olyan ciklus, amiben az egyik tranzíció benne van és a másik nincs
- Perzisztencia:
  - „A tranzíció mindaddig engedélyezett marad, amíg nem tüzel”: Ellenpélda: Több tranzíció engedélyezett, és ha nem az adott tranzíció tüzelt, akkor a következő állapot(ok)ban nem marad engedélyezett (azaz nem jelenik meg élcímkeként)

Dinamikus tulajdonságok: Emlékeztető (2/2)

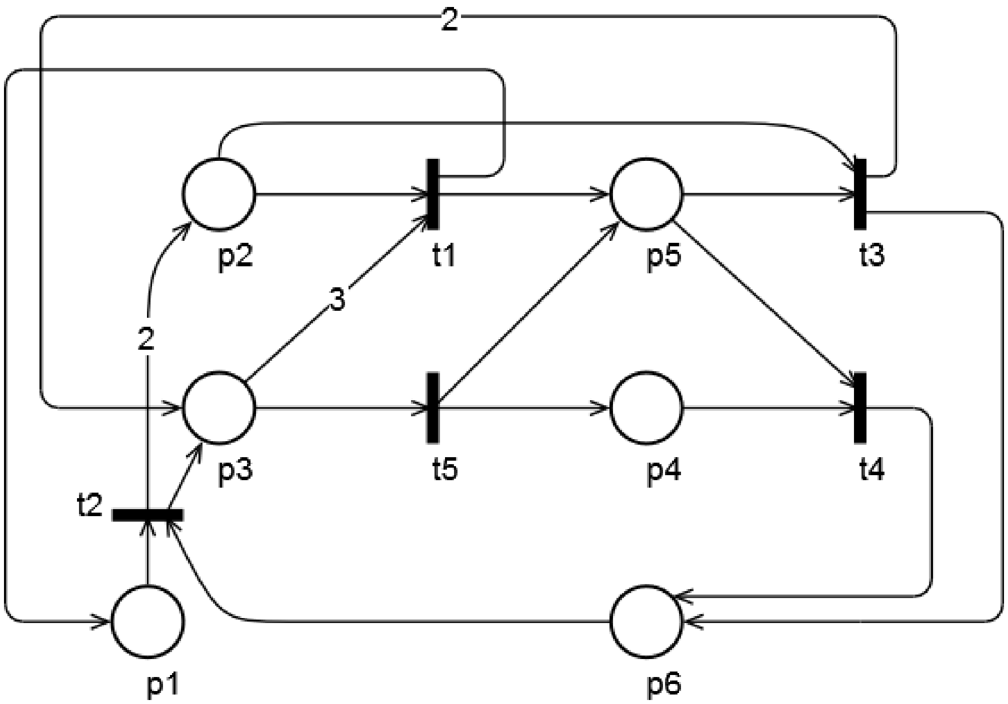
- L1, L2, L3-élőség
  - Elég egy trajektóriát találni, ahol teljesül
- L4-élőség
  - Végig kell nézni, hogy minden állapotból előbb-utóbb mindig tüzelhetővé válik-e (pl. ciklusokban szerepel)
- A háló élő
  - A háló akkor élő, ha minden tranzíciója L4-élő
  - Ha találunk akár egy tranzíció esetében is ellenpéldát, akkor nem élő
  - Ha holtpontmentes, akkor még nem biztos, hogy élő is

Strukturális tulajdonságok (1/3)

Adott az ábrán látható Petri-háló és a hozzátartozó W^T szomszédossági mátrix.

Milyen számokat kell a mátrixban a betűvel jelölt kitöltetlen helyekre írni?

- A =
- B =
- C =
- D =



$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array}$$

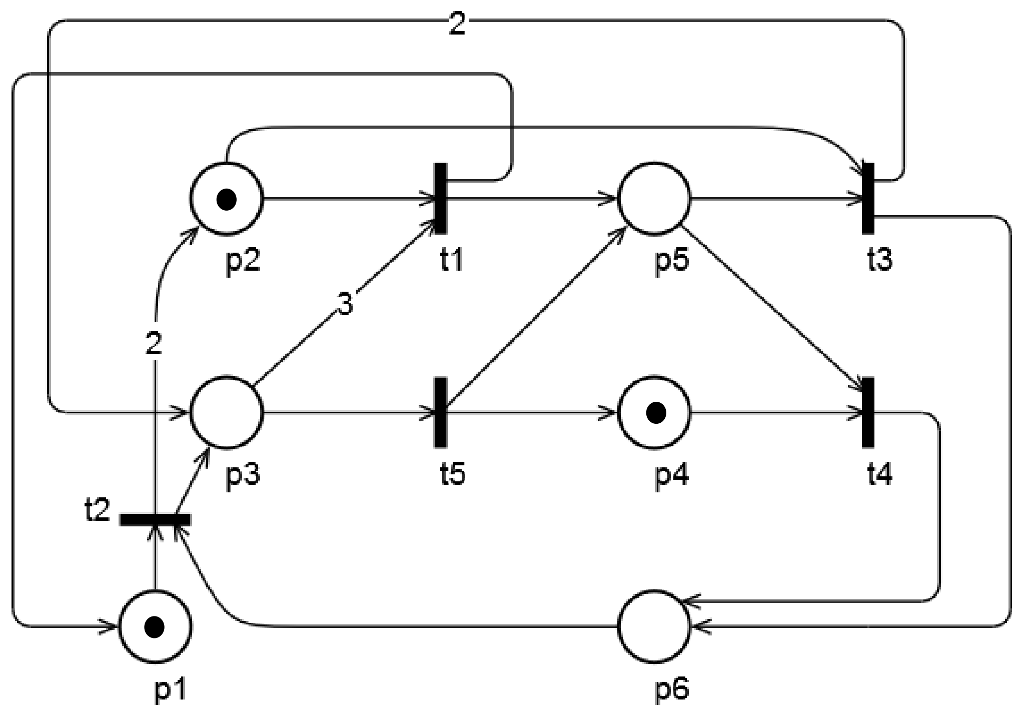
$$\begin{array}{c|ccccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \hline p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ p_3 & \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{array}$$

Strukturális tulajdonságok (1/3): Megoldás

Adott az ábrán látható Petri-háló és a hozzátartozó W^T szomszédossági mátrix.

Milyen számokat kell a mátrixban a betűvel jelölt kitöltetlen helyekre írni?

- A = -3
- B = -1
- C = -1
- D = 0



$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{array}\right] \end{array}$$

Strukturális tulajdonságok (2/3)

Számítsa ki az előbbi Petri háló P-invariánsait a Martinez-Silva algoritmussal!

$$W^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \end{array}$$

Az alábbiak közül melyek a háló P-invariánsai? Melyek a minimális alapú P-invariánsok?

- $(4,2,1,0,1,1)^T$
- $(10,5,2,1,1,2)^T$
- $(3,1,0,2,0,1)^T$

Strukturális tulajdonságok (2/3): Megoldás

Számítsa ki az előbbi Petri háló P-invariánsait a Martinez-Silva algoritmussal!

$$W^T = \begin{array}{c|ccccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \hline p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ p_3 & \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{array}$$

Az alábbiak közül melyek a háló P-invariánsai? Melyek a minimális alapú P-invariánsok?

- $(4,2,1,0,1,1)^T$ Invariáns, minimális alapú
- $(10,5,2,1,1,2)^T$ Invariáns, nem minimális alapú
- $(3,1,0,2,0,1)^T$ Nem invariáns

Martinez-Silva: $\mathbf{Q}_1 \leftarrow [\mathbf{1}_\pi \mid \mathbf{W}^T]$ alapján megoldás

Strukturális tulajdonságok (3/3)

Ellenőrizze az állapot-egyenlet alapján, hogy az alábbiak közül melyek T-invariánsai az előbbi Petri-hálónak!

$$
W^T = \begin{array}{c|ccccc}
 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\
\hline
p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
p_2 & -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\
p_3 & \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\
p_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\
p_5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
p_6 & 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D}
\end{array}
$$

- $(2,2,2,0,0)^T$
- $(0,1,0,1,3)^T$
- $(1,2,1,1,3)^T$

Strukturális tulajdonságok (3/3): Megoldás

Ellenőrizze az állapot-egyenlet alapján, hogy az alábbiak közül melyek T-invariánsai az előbbi Petri-hálónak!

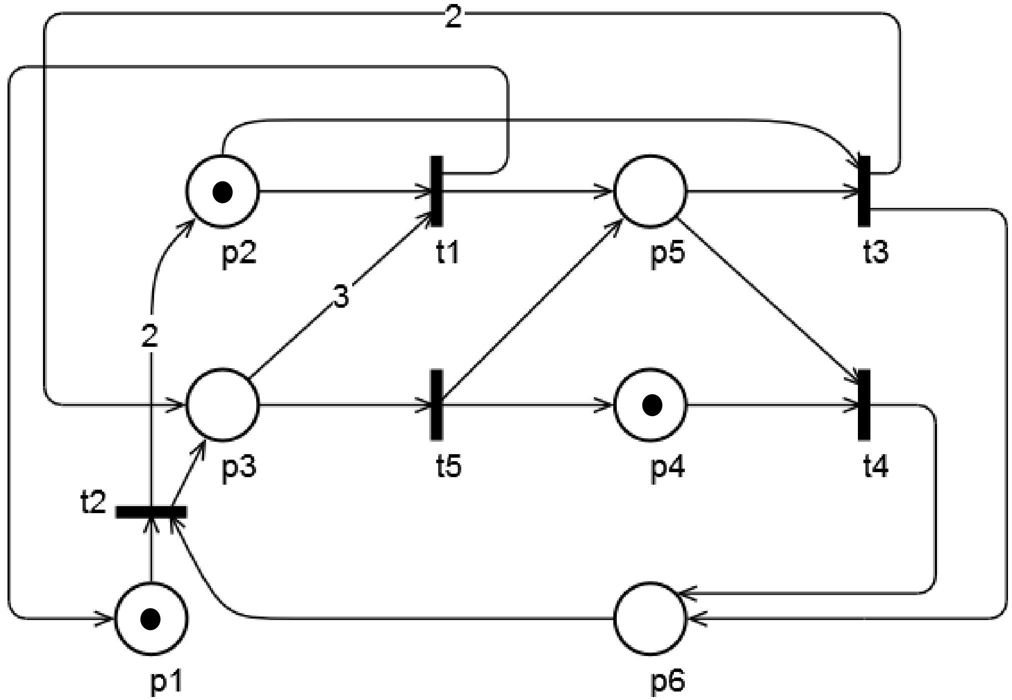
$$\mathbf{W}^{\mathbf{T}} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{array} \right]$$

- $(2,2,2,0,0)^T$ Invariáns
- $(0,1,0,1,3)^T$ Nem invariáns
- $(1,2,1,1,3)^T$ Nem invariáns

Állapotegyenletből: Ellenőrzés: $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0$

Temporális tulajdonságok

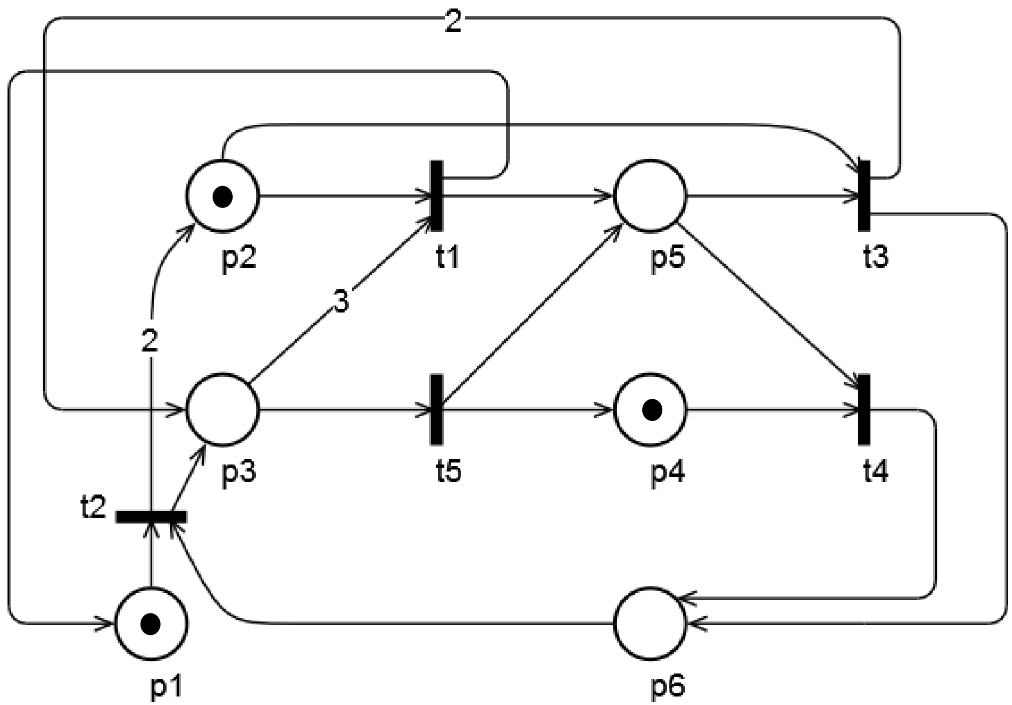
Az előbbi Petri-hálóra az M(1,1,0,1,0,0) kezdőállapotból igazak-e a következő, CTL temporális logikával megadott állítások?



- **EG EF**(M(1,1,0,1,0,0))
- **AG** (m(p1) + m(p2) + m(p3) + m(p5) + m(p6) = 2)

Temporális tulajdonságok: Megoldás

Az előbbi Petri-hálóra az M(1,1,0,1,0,0) kezdőállapotból igazak-e a következő, CTL temporális logikával megadott állítások?



- **EG EF**(M(1,1,0,1,0,0))

  A teljes állapottér a kezdőállapotból áll, erre teljesül.

- **AG** (m(p1) + m(p2) + m(p3) + m(p5) + m(p6) = 2)

  A teljes állapottér a kezdőállapotból áll, erre teljesül.

  De akkor miért nincs ilyen P-invariáns?

Modellezés színezetlen Petri-hálókkal (1/2)

Készítse el egy programozó színezetlen Petri-háló modelljét az alábbi szöveges leírásnak megfelelően!

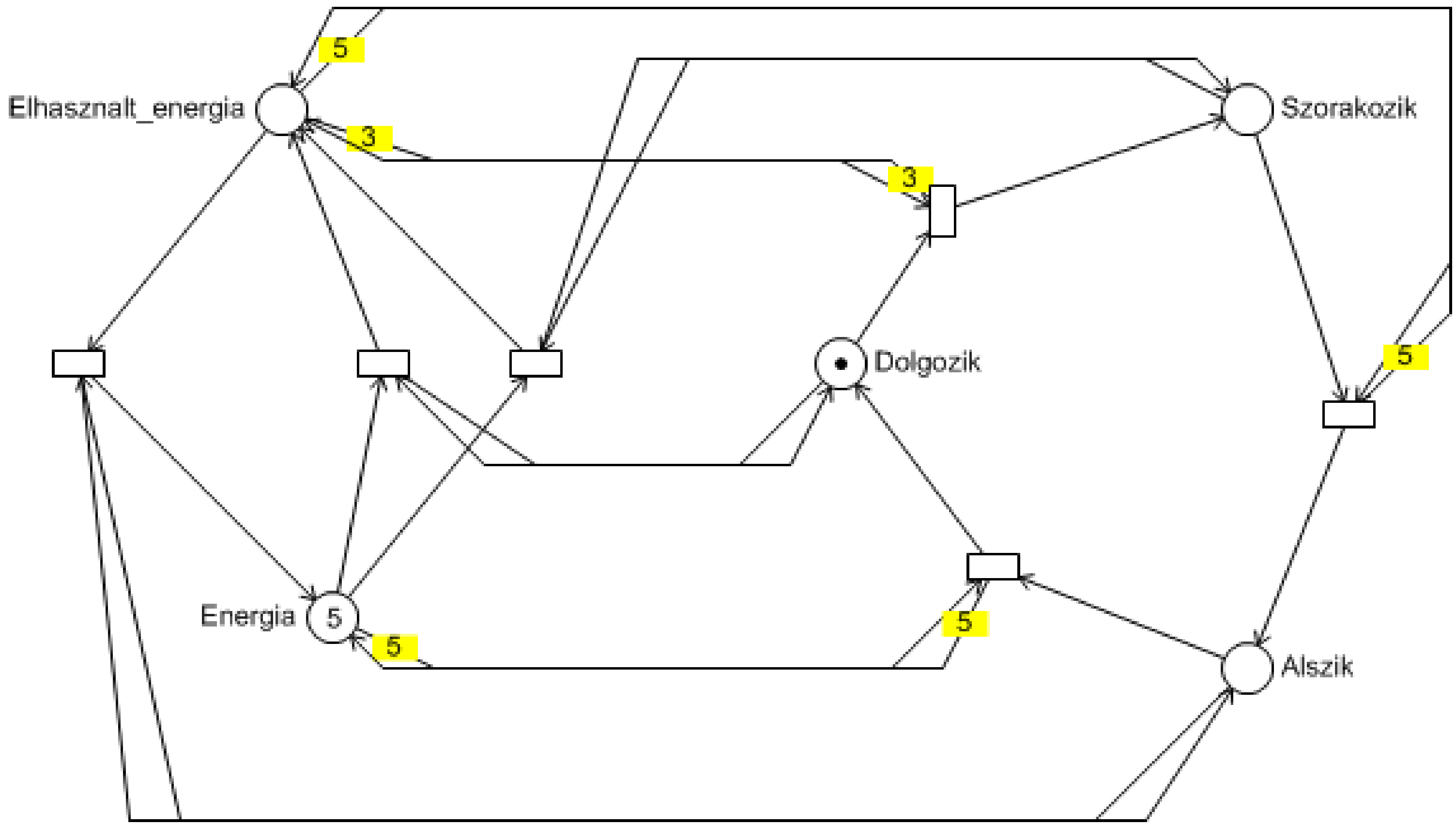
1. A programozó vagy dolgozik, vagy szórakozik, vagy alszik.
2. A programozónak egy napra 5 egységnyi energiája van és a nap kezdetén dolgozik (ez az alapállapot).
3. Ha a programozó dolgozik vagy szórakozik, időnként egy egységnyi energiát felhasznál.
4. Ha a programozó dolgozik és már legalább 3 egységnyi energiát elhasznált, akkor elkezdhet szórakozni.
5. Ha a programozó szórakozik és nincs több energiája, akkor elkezdhet aludni.
6. Ha a programozó alszik, akkor időnként egy egységnyi elhasznált energiája újra felhasználhatóvá válik.
7. Ha a programozó alszik és minden energiája felhasználható, akkor elkezdhet dolgozni.

Modellezés színezetlen Petri-hálókkal (2/2)

Az előző feladat szerinti modellt a lenti a lenti modell-részletet kiegészítve készítse el!

Modellezés színezetlen Petri-hálókkal: Megoldás

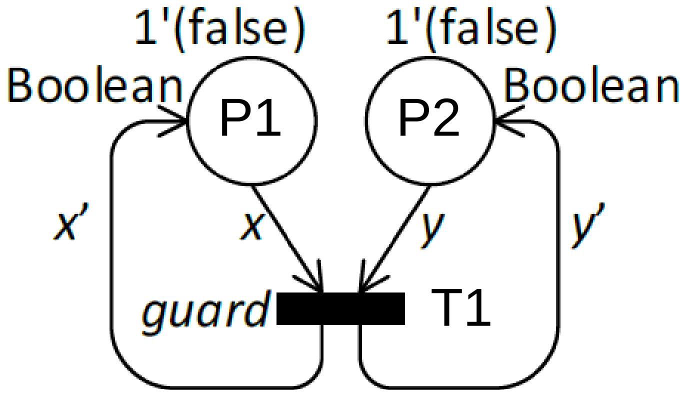
Az előző feladat szerinti modellt a lenti a lenti modell-részletet kiegészítve készítse el!



Színezett Petri-hálók széthajtogatása

- Adott az ábrán látható színezett Petri háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező:

  var x, y, x',y': Boolean;



  Az őrfeltétel:

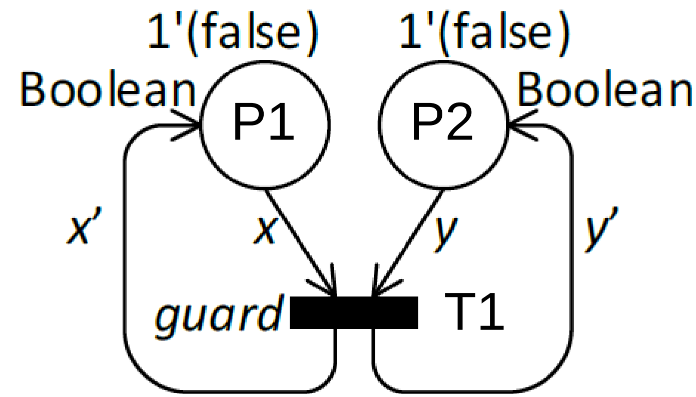
  $$(\neg x \wedge \neg y \wedge x' \wedge \neg y') \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg x' \wedge y') \vee (\neg x \wedge y \wedge x' \wedge y')$$

- Készítse el a színezett Petri-háló struktúrával ekvivalens működésű színezetlen Petri háló struktúrát, azaz a színezett Petri háló széthajtogatását!
- Élő-e és/vagy korlátos-e a fenti színezett háló és az ekvivalens működésű széthajtogatott színezetlen háló az adott (vagy bármilyen korlátos) kezdőállapottal?

Színezett Petri-hálók széthajtogatása: Megoldás

- Adott az ábrán látható színezett Petri háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező:

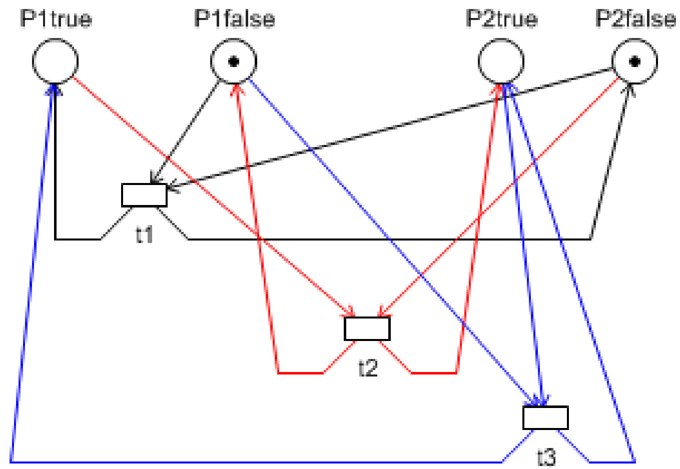
  var x, y, x’,y’: Boolean;



  Az őrfeltétel:

$$\boxed{(\neg x \wedge \neg y \wedge x' \wedge \neg y')} \vee \boxed{(x \wedge \neg y \wedge \neg x' \wedge y')} \vee \boxed{(\neg x \wedge y \wedge x' \wedge y')}$$

- Petri háló széthajtogatása:



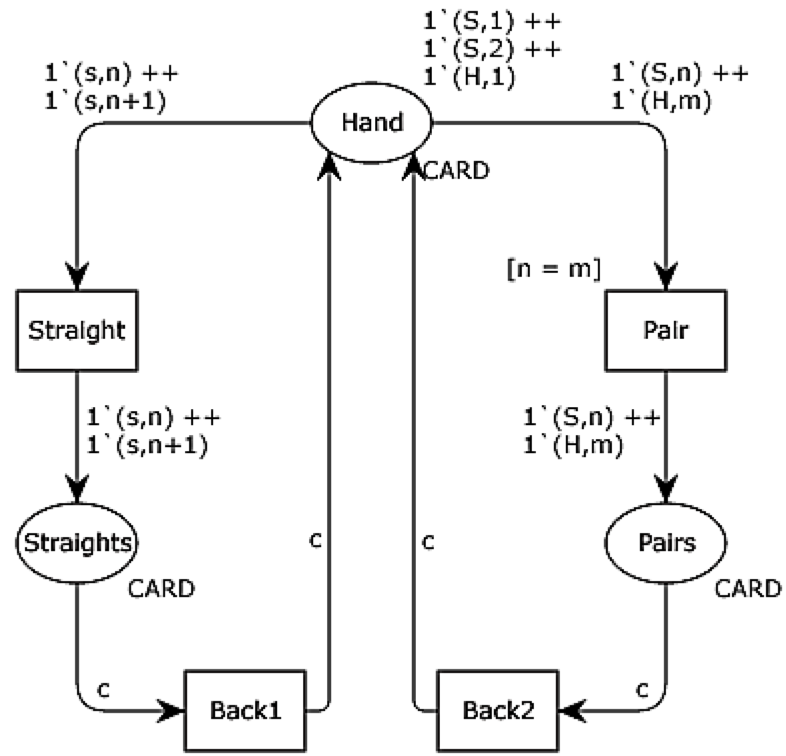
- Élő-e és/vagy korlátos-e a fenti színezett háló?
  - Nem élő (van holtpont)
  - Korlátos: Minden helyen max. 1 token lehet

Modellezés színezett Petri-hálókkal

Adott az ábrán látható színezett Petri-háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező.

1. Mely tranzíciók és milyen lekötéssel engedélyezettek az adott állapotban?
2. Tüzelés után mik lehetnek a háló következő jelölései?
   Válasszon ki egyet ezek közül és adja meg az ezután következő lehetséges lekötéseket!
3. Korlátos-e a háló az adott kezdőállapottal?
4. Holtpontmentes-e a háló az adott kezdőállapottal?
5. Van-e a hálóban T-invariáns?

```
colset SUIT = with S | H;
colset NUM = int with 0..12;
colset CARD = product SUIT * NUM;
var s : SUIT;
var n, m : NUM;
var c : CARD;
```



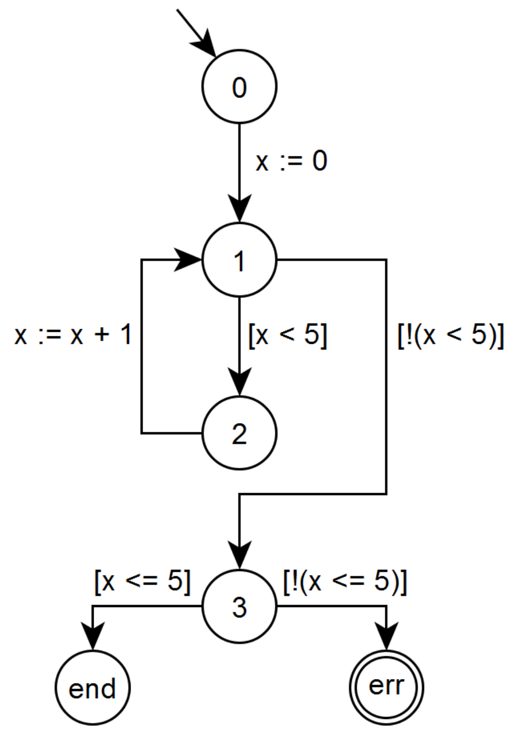
Modellezés színezett Petri-hálókkal: Megoldás

1. Engedélyezett:
   - **Straight**, s=S, n=1 lekötéssel
   - **Pair**, n=1, m=1 lekötéssel
2. Következő jelölések:
   - **Straight** tüzel: **Hand** lesz 1’(H,1), **Straights** lesz 1’(S,1)++1’(S,2)
     Ezután engedélyezett: **Back1**, c=(S,1) vagy c=(S,2) lekötéssel
   - **Pair** tüzel: **Hand** lesz 1’(S,2), **Pairs** lesz 1’(S,1)++1’(H,1)
     Ezután engedélyezett: **Back2**, c=(S,1) vagy c=(H,1) lekötéssel
3. Korlátos:
   - Minden tranzíció ugyanannyi tokent vesz el, mint amennyit kirak, így a tokenek száma nem változik
4. Holtpontmentes:
   - A **Back1** vagy **Back2** mindig vissza tudja (egyenként) rakni, amit a **Straight** vagy a **Pair** elvett, mindig ciklikus a működés
5. T-invariánsok fejben is megkereshetők:
   - **Straight, Back1, Back1**
   - **Pair, Back2, Back2**

Ráadás: Szoftver ellenőrzés absztrakcióval

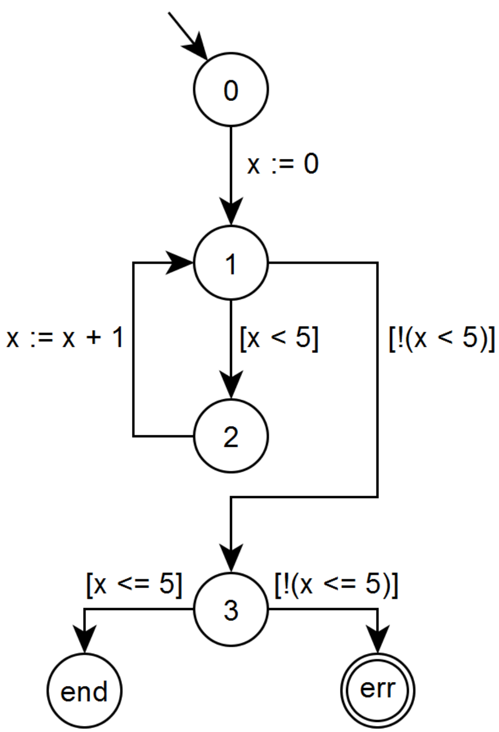
Az ábrán látható Control Flow Automaton (CFA) modellellenőrzésére vezérlési hely absztrakciót és predikátumabsztrakciót alkalmazunk, ez utóbbihoz egyetlen (x <= 5) predikátumot használunk.

- Mik lehetnek a kezdőállapotok az absztrakt állapottérben, ha kezdetben az x változó tetszőleges értékű lehet (pl. bemeneti változó)?
- Hamis ellenpéldának tekinthető-e az err állapot eléréséhez absztrakt állapottérben található (0, false) → (1, true) → (2, true) → (1, false) → (3, false) → (err, false) útvonal?

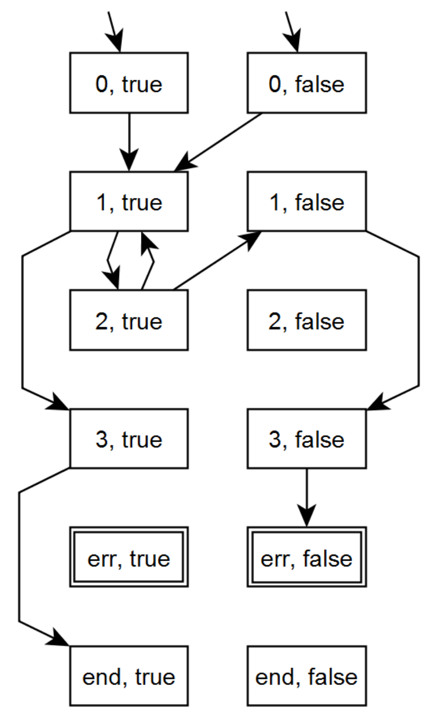


Szoftver ellenőrzés absztrakcióval: Megoldás

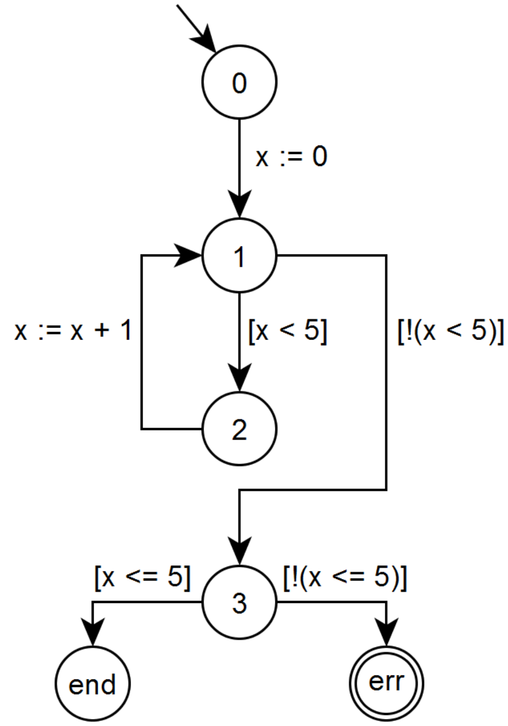
Az ábrán látható Control Flow Automaton (CFA) modellellenőrzésére vezérlési hely absztrakciót és predikátumabsztrakciót alkalmazunk, ez utóbbihoz egyetlen (x <= 5) predikátumot használunk.



Absztrakció
(x<=5) mellett



Szoftver ellenőrzés absztrakcióval: Megoldás



Vezérlési hely absztrakció és predikátumabsztrakció (x <= 5) esetén

- Kezdőállapotok az absztrakt állapottérben:
  (0, false) vagy (0, true)
- A (0, false) → (1, true) → (2, true) → → (1, false) → (3, false) → (err, false) útvonal bejárása:
  (0, false) → (1, true) x:=0, (x <= 5) teljesül
  (1, true) → (2, true) [x<5], (x <= 5) teljesül
  (2, true) → (1, false) x:=1, !(x <= 5) nem teljesülhet
  Hamis az ellenpélda!