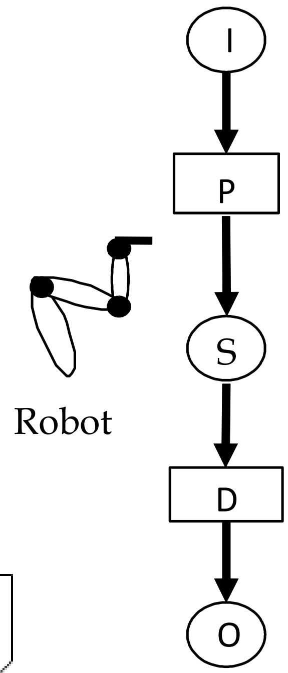
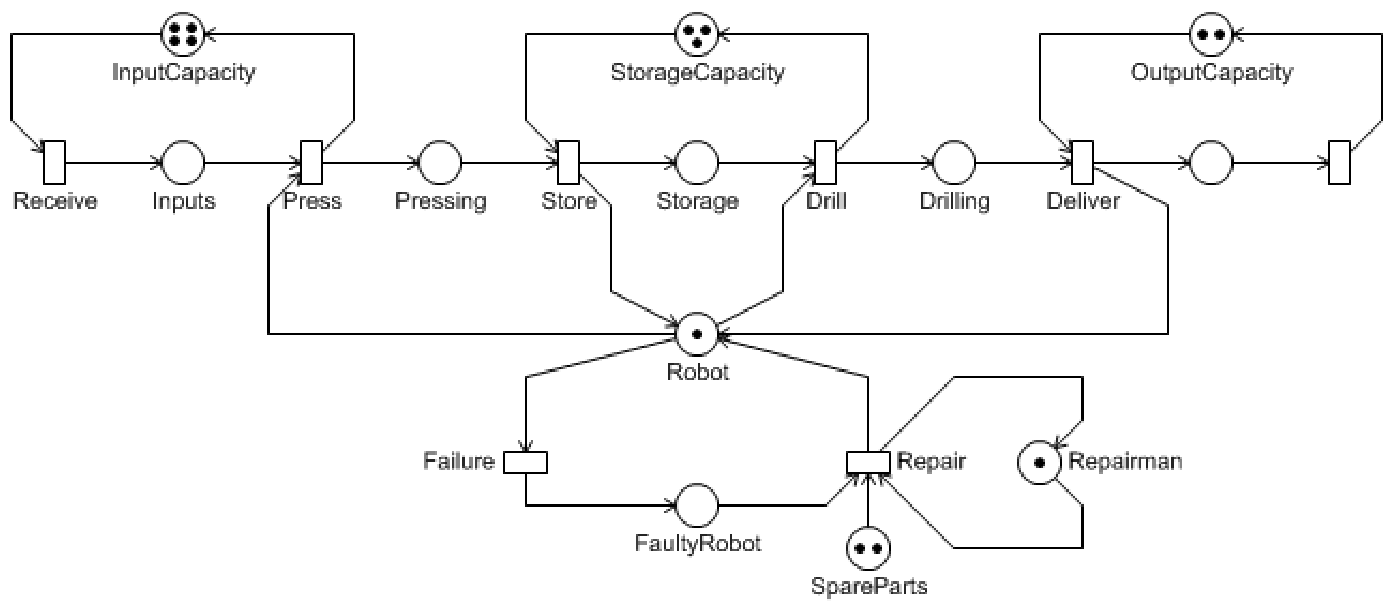
Petri hálók strukturális tulajdonságai. Invariánsok és számításuk

dr. Bartha Tamás
dr. Majzik István
dr. Pataricza András
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Ismétlés: Modellezés (példa: robotcella)

- Tevékenységek (préselés, fúrás)
- Tárolók (kapacitáskorláttal)
- Újrahasználható erőforrások (robot, szerelő)
- Meghibásodás (robot)
- Véges erőforrások (alkatrészek)





Ismétlés: Dinamikus tulajdonságok

- Példa: Munkafolyamat modellje (teendők + tevékenységek + erőforrások)
- Vizsgálandó tulajdonságok
  - Megáll-e a rendszer? Holtpont
  - Végrehajthatók-e egyes tevékenységek? Élőség
  - Felgyűlnek-e a teendők? Korlátosság
  - Visszatérhetünk-e a kezdőállapotba? Megfordíthatóság
  - Kialakul-e feldolgozási ciklus? Visszatérő állapot
  - Letilthatják-e egymást tevékenységek? Perzisztencia
  - Van-e erőforráshoz nem jutó tevékenység? Fairség
- Probléma: Nagy méretű állapottér bejárása

Ismétlés: Vizsgálati lehetőségek

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció
  - ⟵ Egy-egy trajektória bejárása
- Állapottér teljes bejárása
  - ⟵ Minden trajektória bejárása adott kezdőállapotból (kimerítő bejárás)
  - Elérhetőségi gráf analízise: Dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
  - Modellellenőrzés
- Háló struktúrájának analízise
  - ⟵ Kezdőállapottól független tulajdonságok (bármely kezdőállapotra)
  - Statikus analízis: Strukturális tulajdonságok
  - Invariáns analízis

A strukturális analízis alapötlete

- Tudunk-e mondani valamit az állapottér felvétele / bejárása nélkül?
  - Csak a struktúra (helyek, tranzíciók, élek) alapján
  - Kezdőállapot-független analízis
  - Modell tulajdonságok, lehetséges végrehajtási szekvenciák jellemzőinek meghatározása
- A tulajdonság definíciójától függően kimondható:
  - vagy minden korlátos kezdő tokeneloszlásra igaz,
  - vagy létezik korlátos kezdő tokeneloszlás, amin igaz
- Egyes esetekben csak közelítő vizsgálat
  - Pl. ismert egy végrehajtáshoz, hogy hányszor tüzelnek egyes tranzíciók, de ezek sorrendezése nem

Példa: Strukturális tulajdonságok

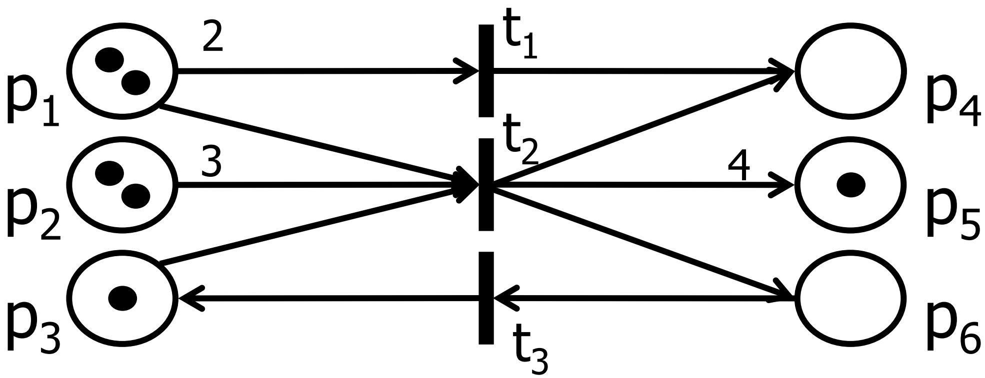
Petri hálók kezdőállapot-független tulajdonságai:

- Strukturális korlátosság
- Vezérelhetőség
- Konzervativitás
- Hely invariáns (P-invariáns)
- Strukturális élőség
- Ismételhetőség
- Konzisztencia
- Tüzelési invariáns (T-invariáns)

Pontos definíciókat lásd később!

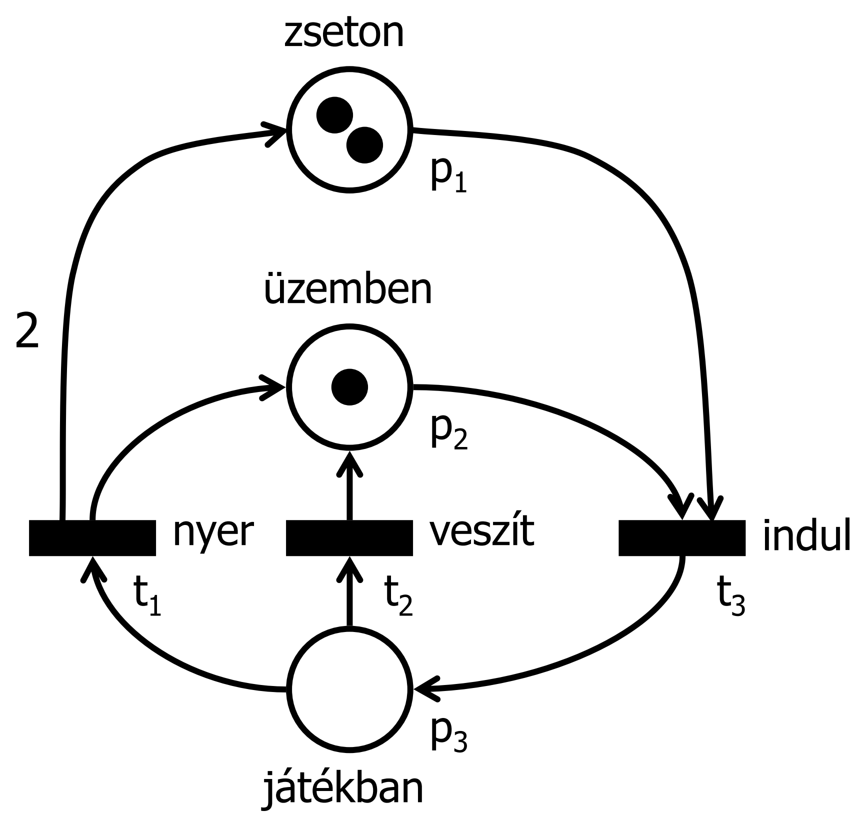
Ismétlés: A struktúra leírása

- Súlyozott szomszédossági mátrix: **W** = [w(t, p)]
- Dimenziója: $\tau \times \pi = |T| \times |P|$ sor × oszlop
- w(t, p): Ha t tüzel, mennyit változik a p-beli tokenszám



$$W = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cccccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \end{array}$$

Ismétlés: A struktúra leírása



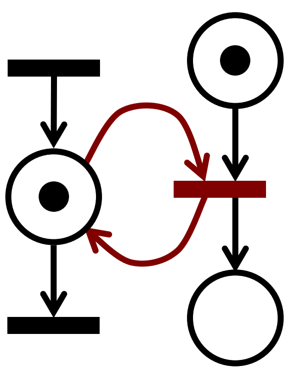
$$\mathbf{W} = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \boxed{-1 & -1 & 1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

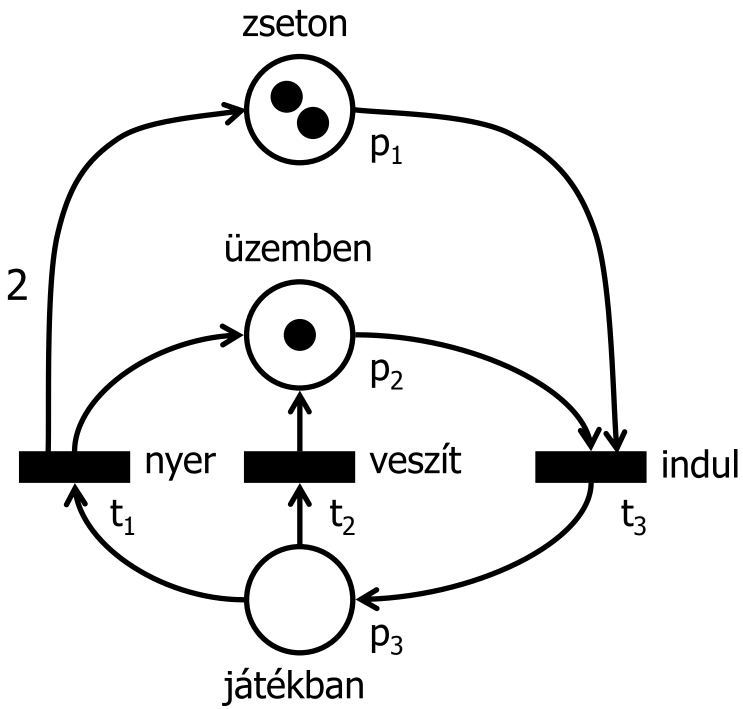
- Példa: t_3 tranzíció tüzelése hogyan módosítja a tokenek számát az egyes helyeken

Állapotegyenlet bevezetése

- Petri háló dinamikája: tokeneloszlás módosulása
  - Az új tokeneloszlás egyenlettel felírható: $M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$
- Előfeltétel (egyértelműséghez): tiszta Petri háló
  - Nincs olyan tranzíció, amely egyazon helynek egyszerre bemenő és kimenő tranzíciója: $\forall t \in T : \bullet t \cap t \bullet = \emptyset$
  - Ebbe beletartozik: Nincs „hurokél”
    - A tüzeléskor a tokeneloszlás nem változik (szomszédossági mátrixban 0)
    - De a tüzelési feltételben szerepet játszik



Példa: Egy tranzíció tüzelése



$$W^T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Állapotváltozás:

$$M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$$

t_3 tranzíció tüzelése a fenti $(2\ 1\ 0)^T$ állapotból:

$$M' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tüzelési szekvencia végrehajthatósága

- Jelölés: Tüzelési szekvencia

$$\vec{\sigma} = \langle M_i, t_i, M_{i+1}, \ldots, t_{i+n}, M_{i+n} \rangle \text{vagy} \langle t_i, \ldots, t_{i+n} \rangle$$

- Jelölés: Állapot (tokeneloszlás) elérhetősége

$$M_i [\vec{\sigma} > M_{i+n}$$

- Tüzelési szekvencia végrehajthatósága:
  - $\forall t_j$ tranzíció minden $p \in \bullet t_i$ bemenő helyén elég token

$$\boxed{\forall t_j \in \vec{\sigma}, \forall p \in \bullet t_j : M_j(p) \geq w^-(p, t_j)}$$

Állapotegyenlet alkalmazása

- Tokeneloszlás módosulása:
  - Engedélyezett t_j tranzíció tüzelése esetén
    - Minden p helyen w(p, t_j) a tokenek számának változása

$$\boxed{M_{i+1} = M_i + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{e}_j}$$

  - Engedélyezett $\underline{\sigma}$ tüzelési szekvencia esetén:
    - Tüzeléseket „összeadva” adódik a tokeneloszlás módosulása:

$$\boxed{M_i \left[\vec{\sigma} > M_{i+n} \text{ esetén } M_{i+n} = M_i + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T \right.}$$

- Tüzelési szám vektor: az egyes tranzíciók tüzeléseinek száma a tüzelési szekvenciában
  - Az állapotegyenlet alapján az elért állapotra kiszámolható

Állapotegyenlet levezetése

$$M_1 = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1}$$

$$M_2 = M_1 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} = \overbrace{M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1}}^{M_1 \text{ behelyettesítésével}} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2}$$

$$\ldots$$

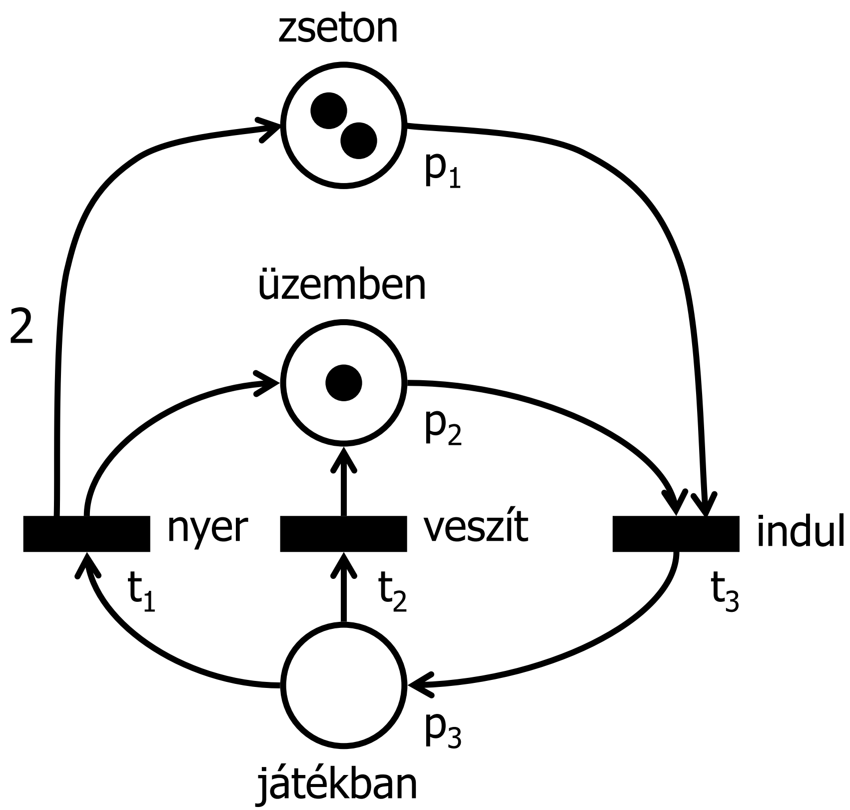
$$M_{n+1} = M_n + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_{n+1}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} + \ldots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_{n+1}}$$

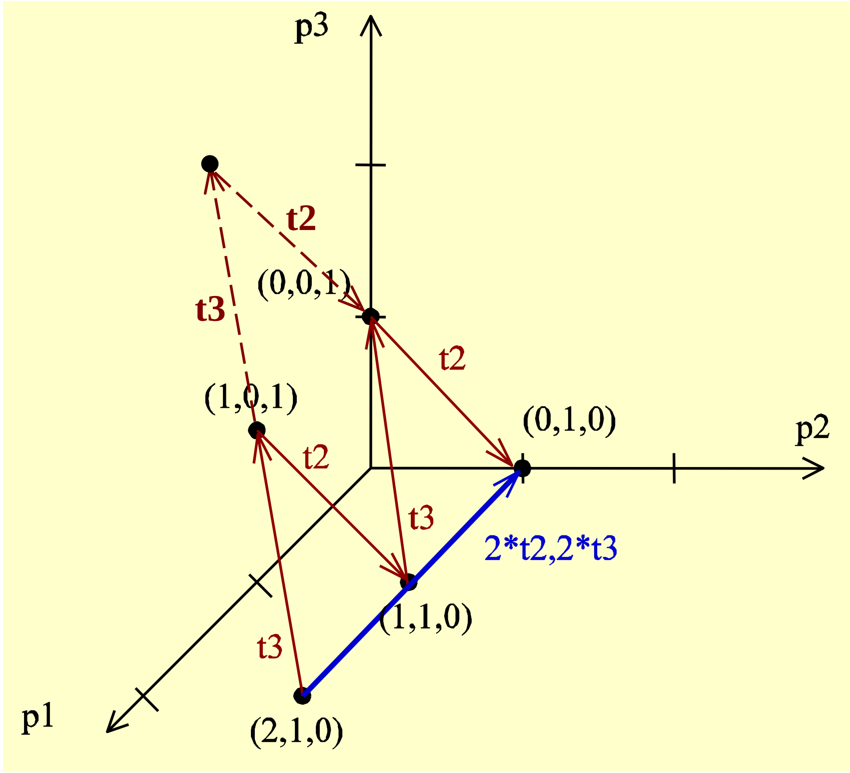
$$\ldots \qquad \Downarrow$$

$$M_m = M_0 + \underbrace{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_1} + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_2} + \ldots + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{e}_{t_m}}_{\text{összevonva}} = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{m}\vec{e}_{t_i}$$

$$M_m = M_0 + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T \Rightarrow \boxed{M_m - M_0 = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T}$$

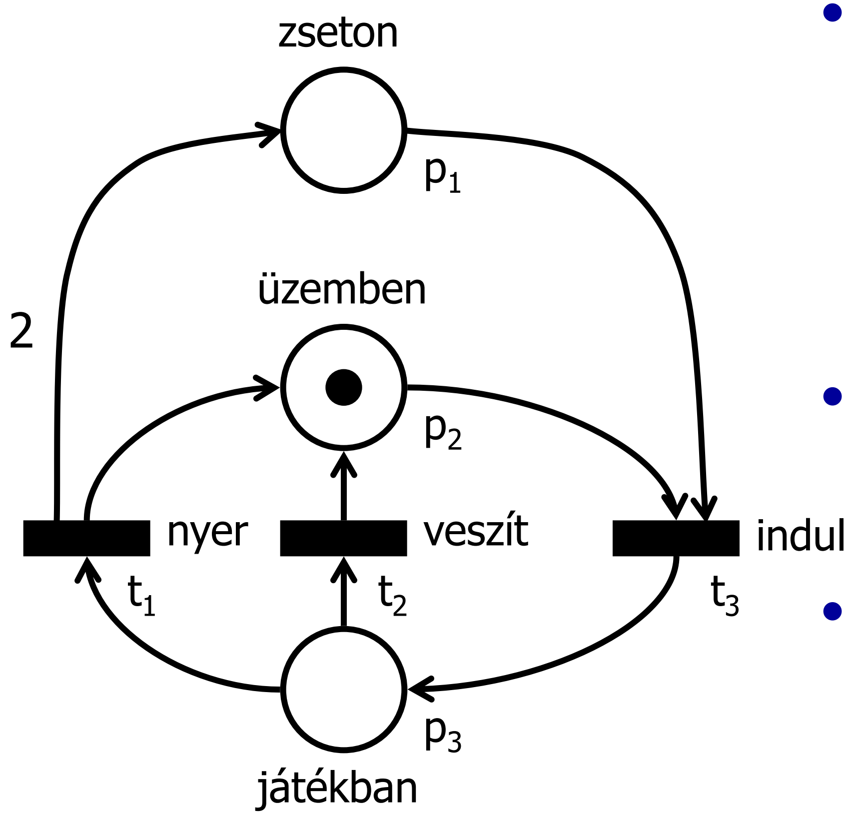
A tüzelési szám vektor használata





- A σ_T tüzelési szám vektorban kevesebb az információ, mint a hozzá tartozó σ tüzelési szekvenciában
  - A tüzelési sorrend elveszik (pl. egy $(0,2,2)^T$ jellegű megadás esetén)
  - Adott M_0-ra nem tüzelhető szekvencia is adódhat az állapotegyenletből

Példa: A tüzelési szám vektor használata



- A modellre:

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Állapotegyenlet:

$$M_j - M_0 = W^T \vec{\sigma}_T$$

- Kiszámolható tüzelési szám vektor $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ állapotból $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ eléréséhez:

$$\boxed{(1,1,0)^{\mathrm{T}} - (0,1,0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot (1,0,1)^{\mathrm{T}}}$$

- Tüzelési szám vektor: $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ csak egy lehetőséget ad
- Itt: sem t_1, sem t_3 nem tüzelhető a (0,1,0) kezdőállapotban

Tüzelési invariánsok (T-invariánsok)

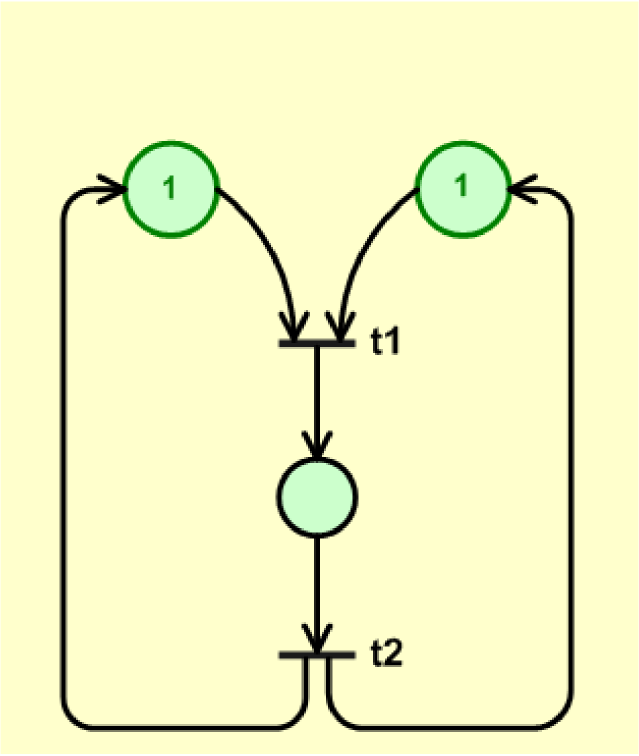
Definíció: Tüzelési invariáns (T-invariáns)

- A σ_T tüzelési szám vektor T-invariáns, ha végrehajtása nem változtatja meg a tokeneloszlást
  - A σ_T-nek megfelelő σ tüzelési szekvenciák végrehajtása esetén ciklus van az állapottérben: $M_i\left[\vec{\sigma} > M_i\right.$
- T-invariáns számítása:

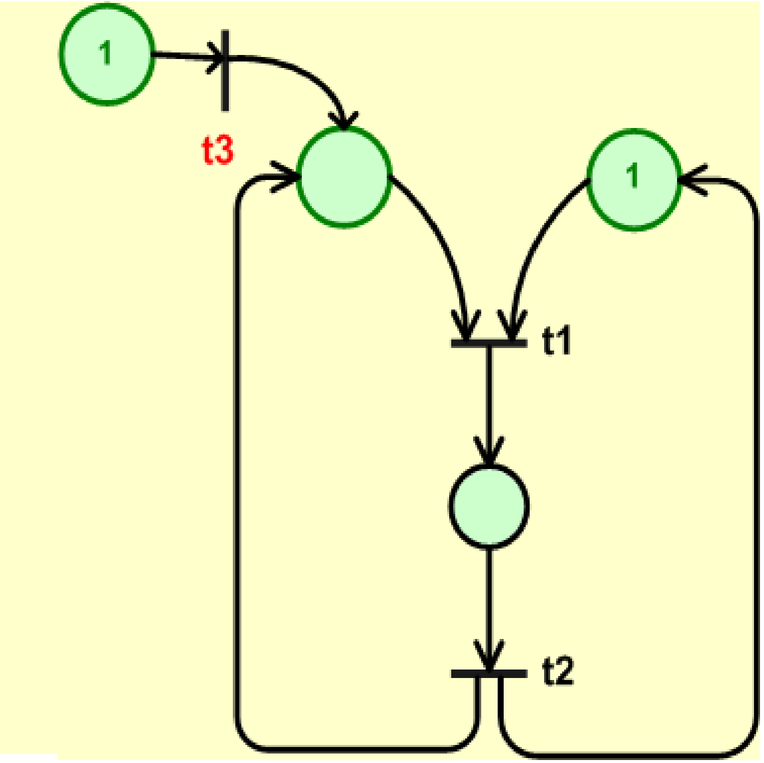
  $M_j = M_i + W^T \vec{\sigma}_T$ alapján, ha $M_j = M_i$: $\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T = 0}$
- Jellemzők:
  - Nem minden, a σ_T tüzelési szám vektornak megfelelő σ tüzelési szekvencia végrehajtható adott kezdőállapotból
  - De: bármely σ tüzelési szekvenciához megadható olyan M_0 kezdőállapot, amelyből σ végrehajtható
    - Pl. annyi token van, hogy σ minden tranzíciója tüzelhető

Példa T-invariánsra

T-invariáns: $(1,1)^T$
t_1, t_2 után a tokeneloszlás ugyanez



Nem T-invariáns:
t_3, t_1, t_2 tüzelési szekvencia nem ismételhető



T-invariánsok halmaza

$$\boxed{\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0}$$

- Egyenletrendszer megoldásaiként számíthatók ki
  - Egy megoldás többszöröse is megoldás
    - Ha végrehajtható, akkor többször is befuthatja a ciklust
  - Megoldások összege is megoldás
    - Ha végrehajtható, akkor több ciklus kombinációját is befuthatja

  $\rightarrow$ Megoldások lineáris kombinációi is megoldások
- A megoldásokhoz bázis kereshető
  - Az összes megoldást előállító minimális halmaz

Minimális alapú T-invariáns

- Jelölés: A σ tüzelési szekvencia alapja sup(σ)
  - Azon tranzíciók $T' = \{t_i \mid \sigma_i > 0\}$ halmaza, amelyek σ szekvenciában előfordulnak
- A σ_T tüzelési invariáns minimális alapú
  - Ha nincs olyan T-invariáns, amelynek alapja σ_T alapjának valódi részhalmaza, vagy
  - ha részhalmaza azonos, annak tüzelési számai kisebbek

$$\boxed{\forall \sigma_T^1 : \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \sigma_T^1 = 0 \Rightarrow \left(\sigma_T^1 \geq \sigma_T \right) \vee \left(\sup(\sigma_T) \not\subseteq \sup(\sigma_T^1) \right)}$$

Hely invariánsok (P-invariánsok)

Definíció: Hely invariáns (P-invariáns)

- A μ_P nemnegatív súlyvektor által kijelölt helyek, ahol a tokenek súlyozott összege nem változik a működés során

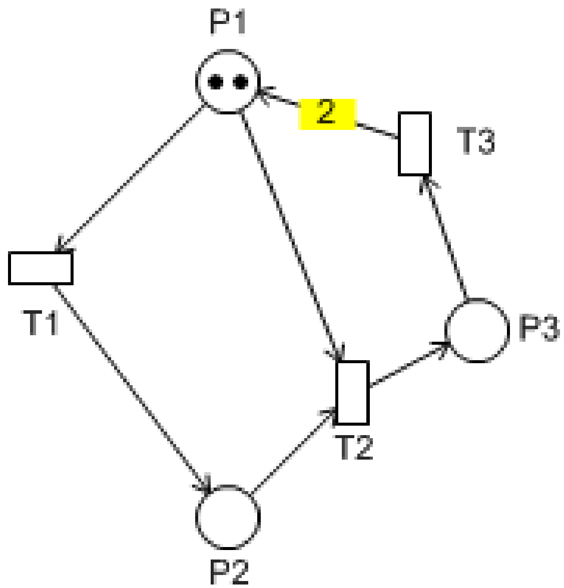
$$\boxed{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \text{állandó}}$$

  - A tokenek száma a helyek egy részhalmazában állandó (pl. erőforrások nem fogynak / keletkeznek)

- P-invariánsok számításának levezetése:

$$\left.\begin{aligned} & M_j = M_i + \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T \\ & \underbrace{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_j = \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_i}_{\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_j = \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M_0 = \text{állandó}} + \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T \\ & \forall \vec{\sigma}_T : \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \vec{\sigma}_T = 0 \Rightarrow \vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathbf{W} \vec{\mu}_P = 0}$$

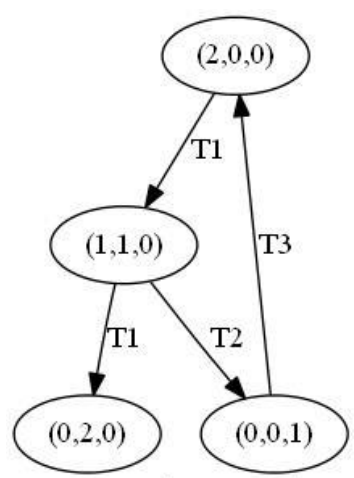
Példa P-invariánsra

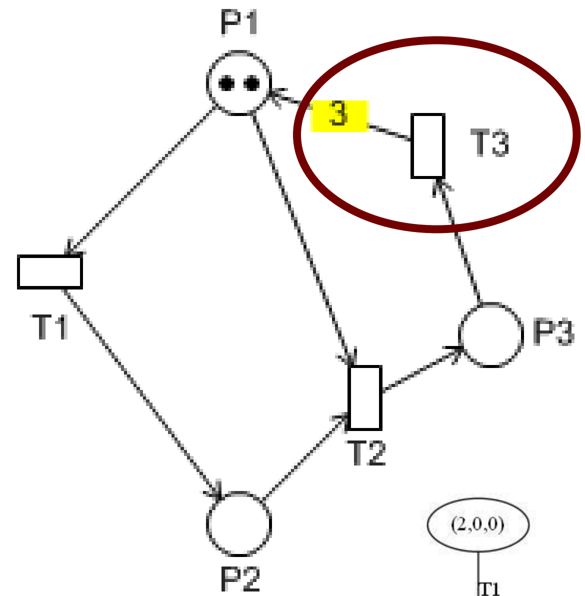


P-invariáns:

$(1\ 1\ 2)^T$

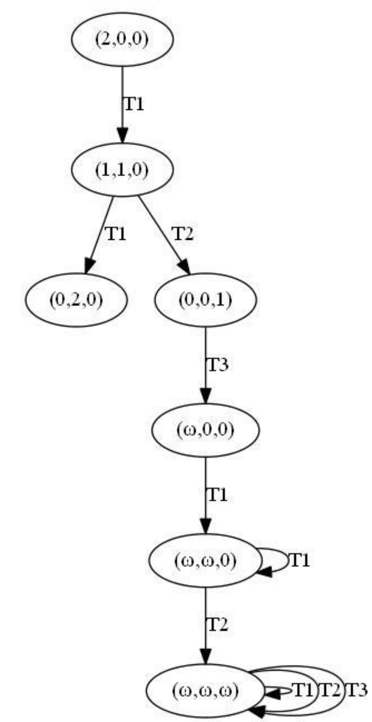
Elérhetőségi gráf:





Nincs P-invariáns (nem is korlátos háló)

Fedési gráf:

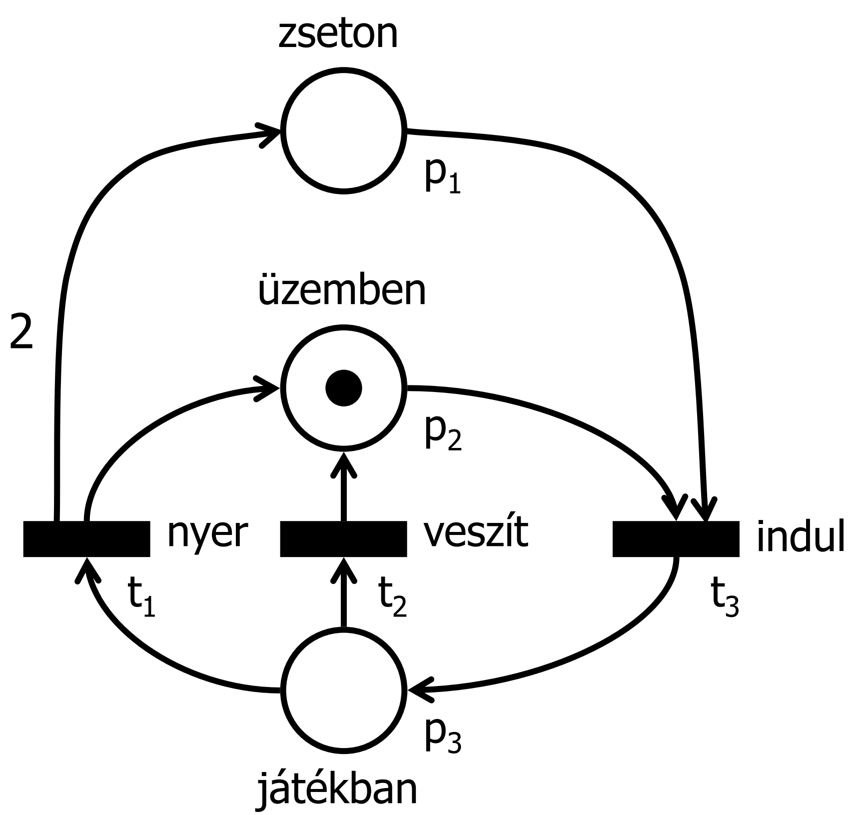


Invariánsok alkalmazásai

- T-invariánsok alkalmazásai
  - Folyamatok modellje esetén: Ciklikusság
  - Dinamikus tulajdonságok
    - Ciklikusan tüzelhető $\rightarrow$ megfordíthatóság, visszatérő állapot
    - Később is tüzelhető $\rightarrow$ élő tulajdonság, holtpontmentesség
- P-invariánsok alkalmazásai
  - Folyamatok modellje esetén: Erőforrások állandósága
  - Dinamikus tulajdonságok
    - Token nem termelődik $\rightarrow$ korlátosság
    - Token nem vész el

Invariánsok számítása

Van-e a példában invariáns?



- P-invariánshoz: $\mathbf{W} \cdot \mu_P = 0$

$$\mathbf{W} = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{W} \cdot (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} = 0$$

- T-invariánshoz: $\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot \sigma_T = 0$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot (1, 1, 2)^{\mathrm{T}} = 0$$

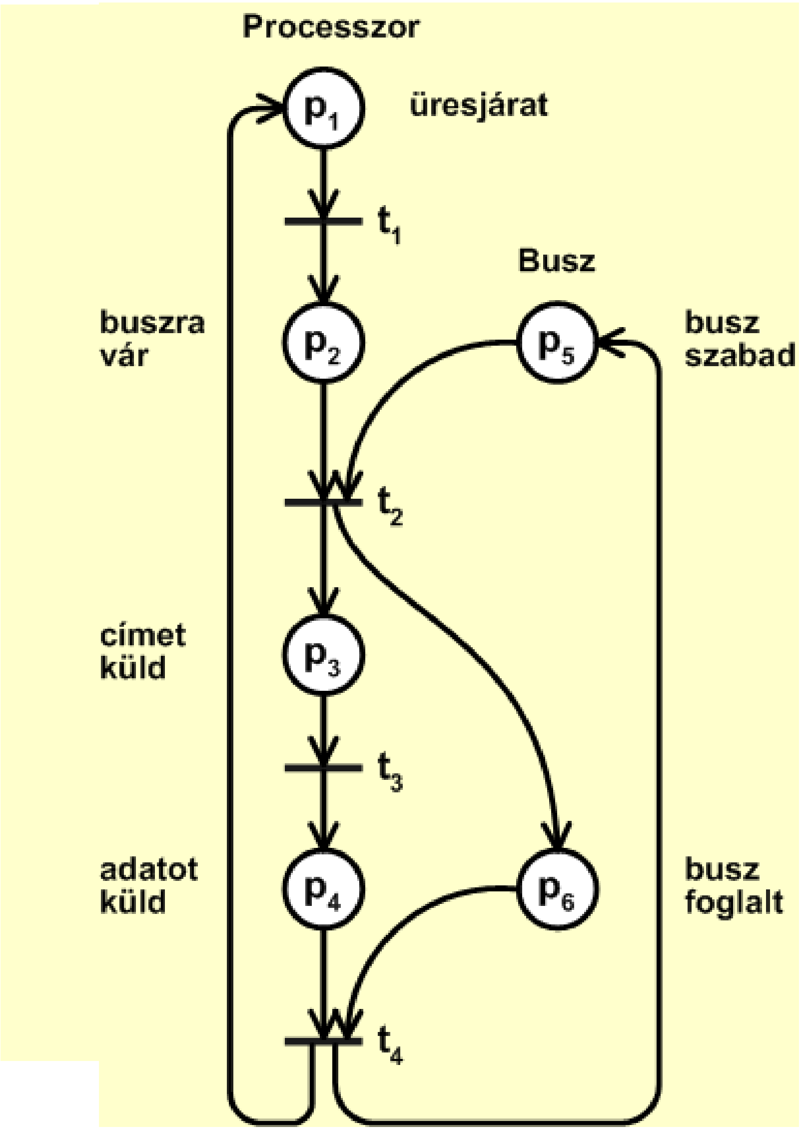
Megoldási módszerek (kitekintés)

Kérdések:

- σ_T bázis komponenseinek értelmezési tartománya?
- A lineáris kombinációk együtthatóinak értelmezési tartománya?

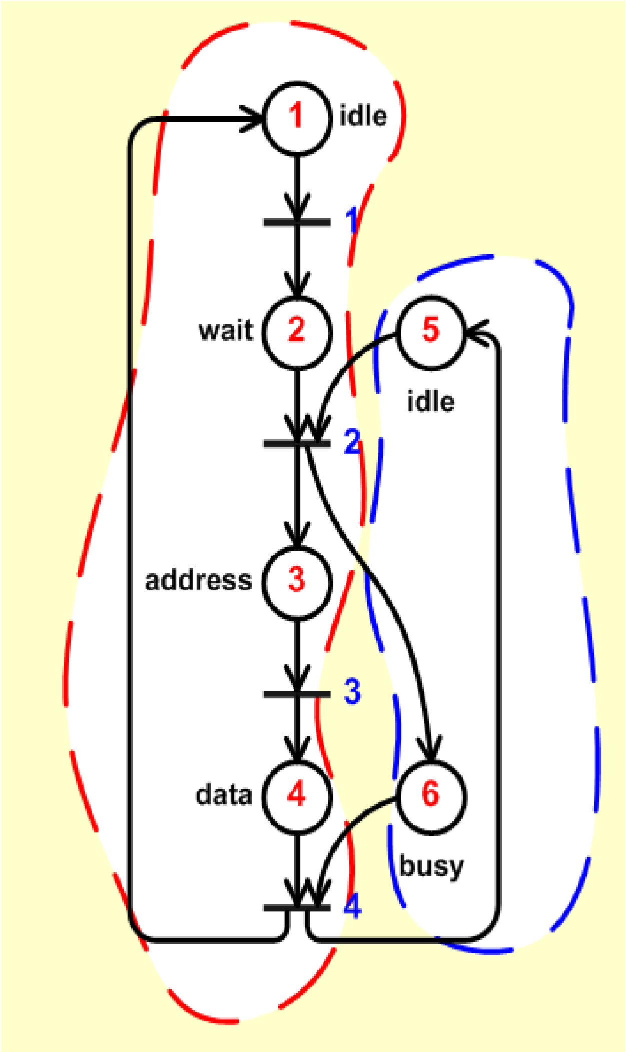
Szint	Tartomány	Együttható	Lineárisan független?	Egyértelmű?	Algoritmus
1	$x \in \mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	Igen	Nem	Gauss elimináció
2	$x \in \mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	Igen	Nem	Hermite redukció
3	$x \in \mathbf{N}_0$	$\mathbf{Q}_0$	Nem biztos	Igen	Martinez-Silva
4	$x \in \mathbf{N}_0$	$\mathbf{N}_0$	Nem biztos	Igen	Pascoletti
5	$x \in \mathbf{B}$	$\mathbf{B}$	Nem biztos	Igen	Jaxy

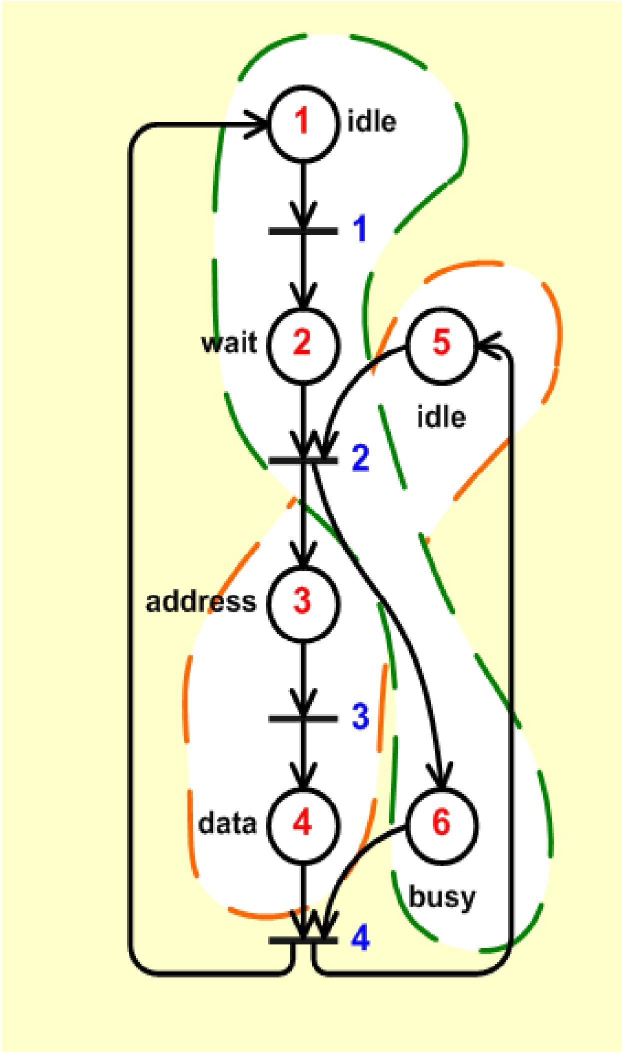
Példa: processzor adatátvitel



- Processzor
  - várakozik (idle - üresjárat)
  - busz hozzáférési jogot kér
  - címet tesz ki a címbuszra
  - adatot tesz ki az adatbuszra
- Busz(ok)
  - szabad (nem használja senki)
  - foglalt (processzor/periféria)
- Petri háló
  - n = 4 darab átmenet
  - m = 6 darab hely

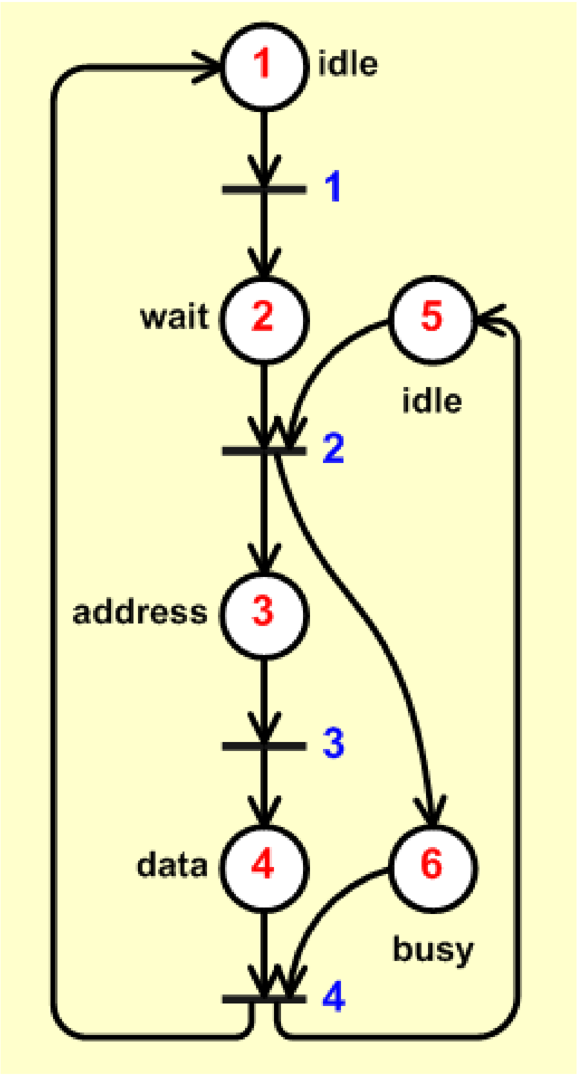
P-invariánsok: Keressük meg fejben a megoldást!





Négy P invariáns található

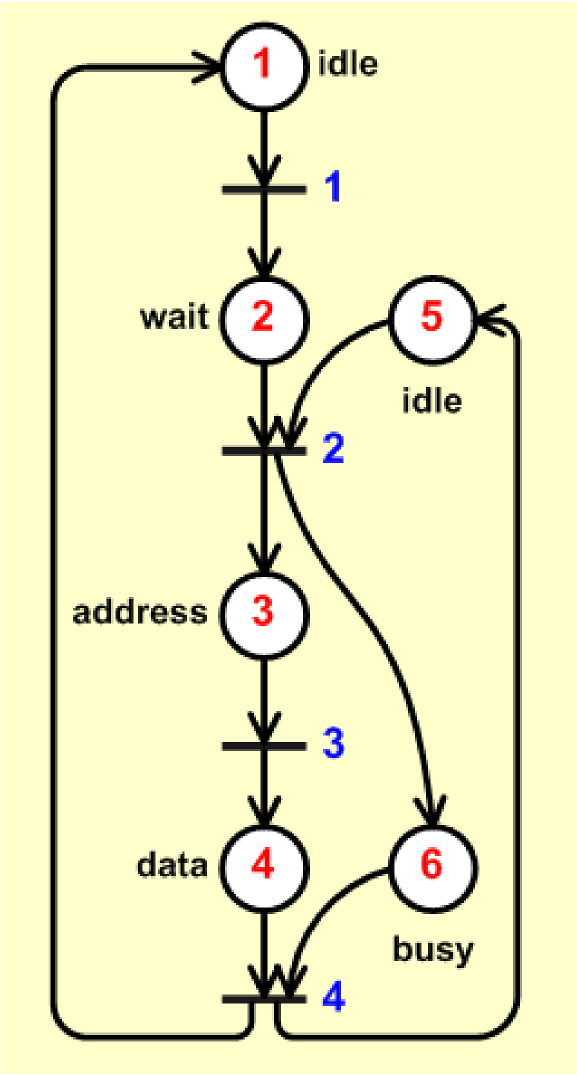
Példa: Szomszédossági mátrixok



$$W^- = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

$$W^+ = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

Példa: Szomszédossági mátrixok



$$\mathbf{W} = W^{+}\text{-}W^{-} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

$$\mathbf{W}^{T} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: inicializálás

$i \leftarrow 1$

$T_i \leftarrow \{ t \in T \}$

$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{W}^T$, $\mathbf{D} \leftarrow \mathbf{1}_n$ // $n = |P|$

$\mathbf{Q}_i \leftarrow [\mathbf{D} \mid \mathbf{A}]$ // egységmátrix és tr. szomszédossági mátrix

$L_p \leftarrow$ a $\mathbf{Q}_i$ mátrix p. sora

$T_1 = \{ t_1, t_2, t_3, t_4 \}$

$$\mathbf{Q_1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc:ccccl} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & p_6 \end{array}\right]$$

Martinez-Silva algoritmus: ciklus

while $\mathbf{A_i} \neq 0$

  if $t_j \in T_i$ // válasszunk egy eddig nem vizsgált oszlopot

  $T_{i+1} \leftarrow T_i \setminus \{ t_j \}$

  $L_{delete} \leftarrow \varnothing$

  $\mathbf{Q}_{i+1} \leftarrow \mathbf{Q}_i$

Keressük a j. oszlopban nem nulla értékek olyan párosait, amik adott pozitív súlytényezőkkel összegezve 0-t adnak

  for all $u, v : A_i(u, j) \neq 0 \wedge A_i(v, j) \neq 0 \wedge$
  $\exists \lambda_u, \lambda_v \in \mathbb{N}^+ : \lambda_u A_i(u, j) + \lambda_v A_i(v, j) = 0$

    $\mathbf{Q}_{i+1}$-hez adjuk hozzá a $\lambda_u L_u + \lambda_v L_v$ sort

    $L_{delete} \leftarrow L_{delete} \cup \{ L_u, L_v \}$

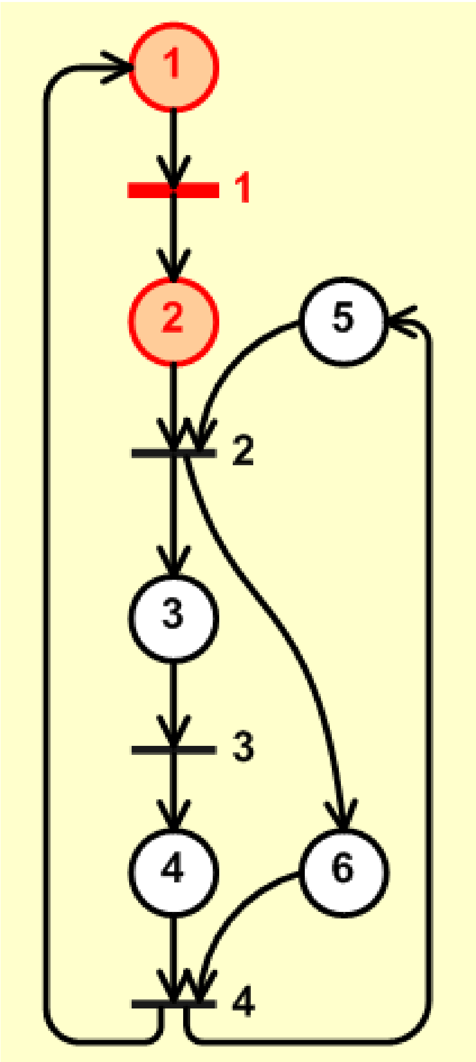
  end for

  $\mathbf{Q}_{i+1}$-ből töröljük az L_{delete} halmazbeli sorokat

  $i \leftarrow i + 1$

end while

Martinez-Silva algoritmus: 1-1. lépés

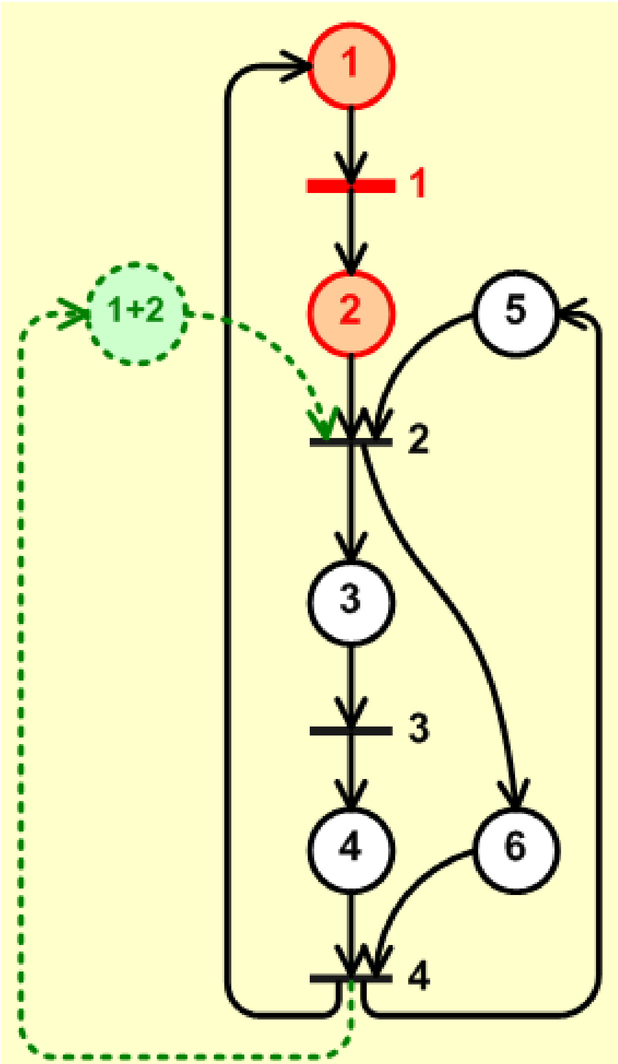


$$Q_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \end{array}$$

Egységmátrix a helyek száma alapján

W^T súlyozott szomszédossági mátrix

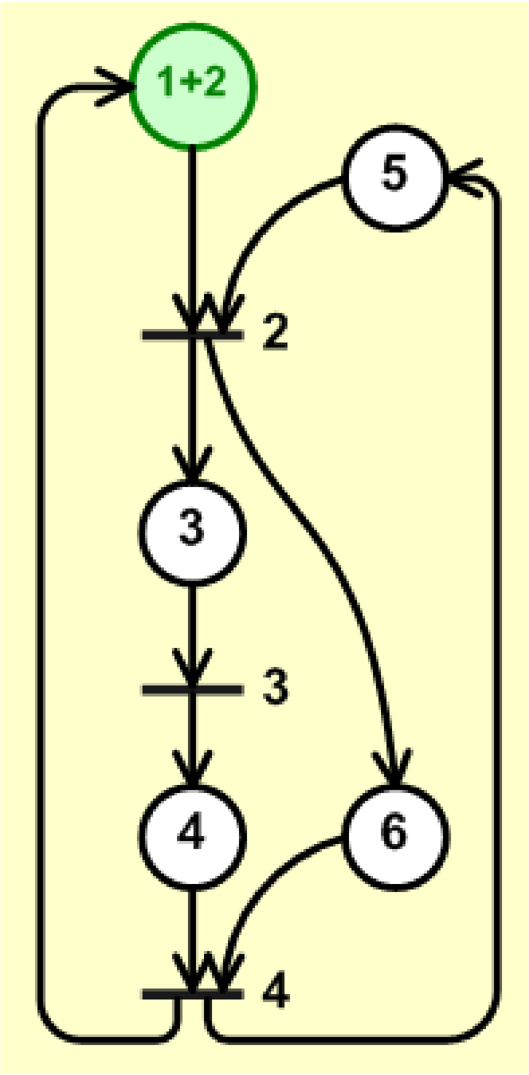
Martinez-Silva algoritmus: 1-2. lépés



$$Q_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}$$

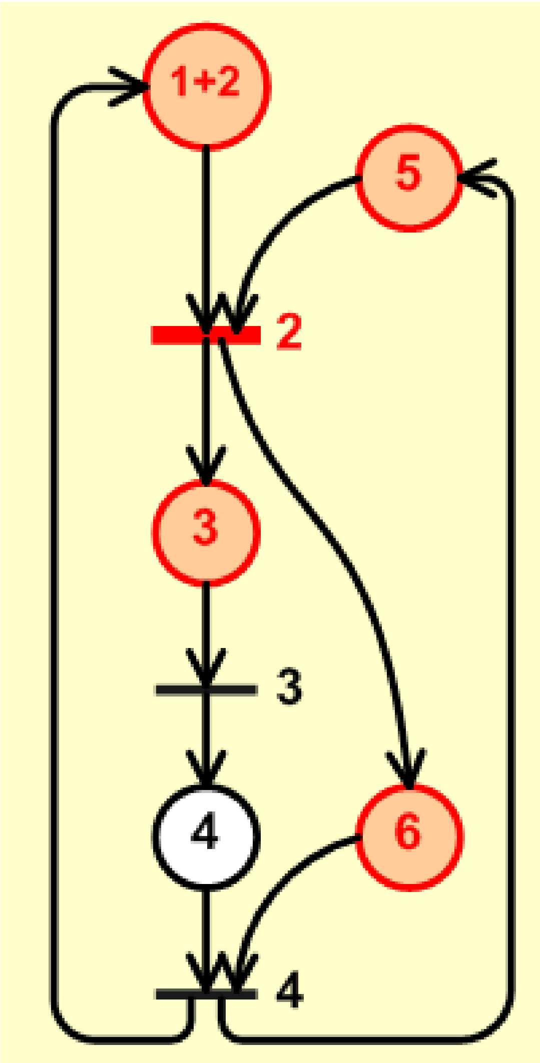
$$Q_1' = \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: 1. részeredmény



$$Q_1'' = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{array} \end{array}$$

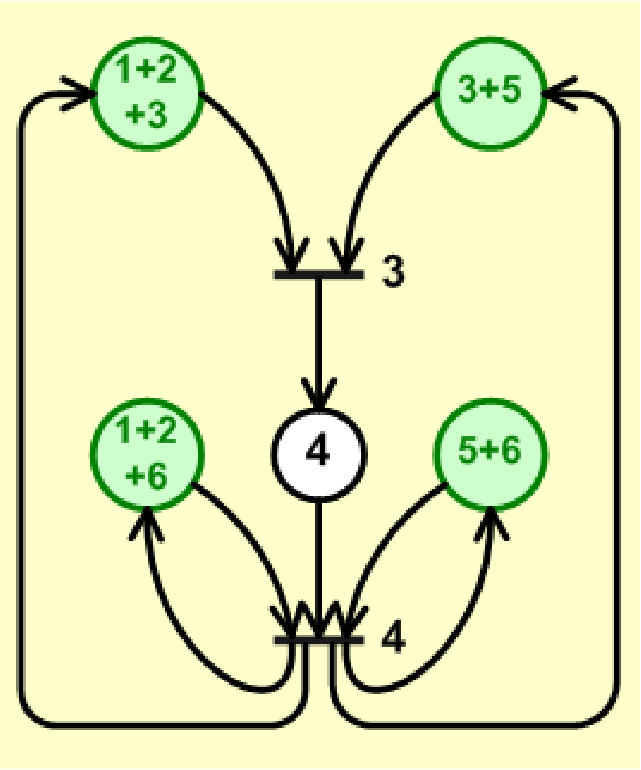
Martinez-Silva algoritmus: 2-1, 2-2. lépés



$$Q_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc:cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc:cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \end{array}$$

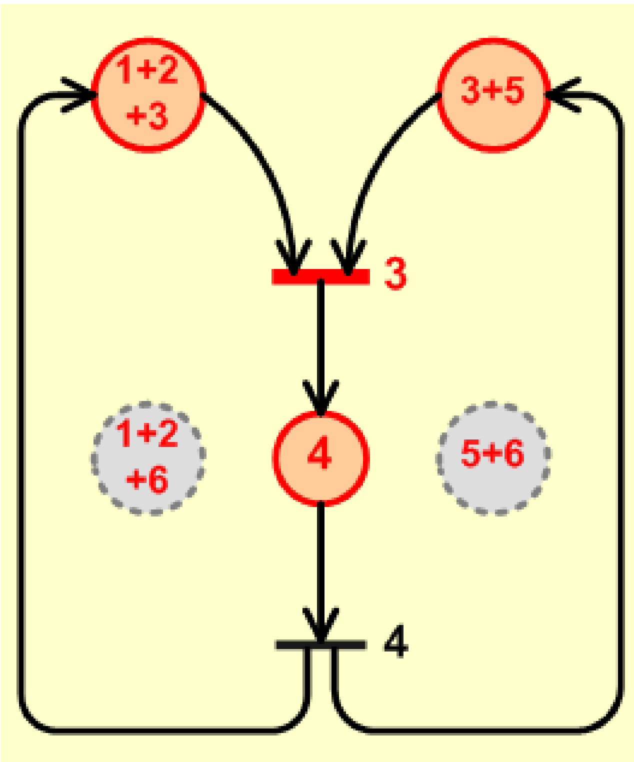
$$Q_2' = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_{1+2} \\ p_{1+2+3} \\ p_{3+5} \\ p_{1+2+6} \\ p_{5+6} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: 2. részeredmény



$$Q_2'' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{1+2+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{3+5} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5+6} \end{bmatrix}$$

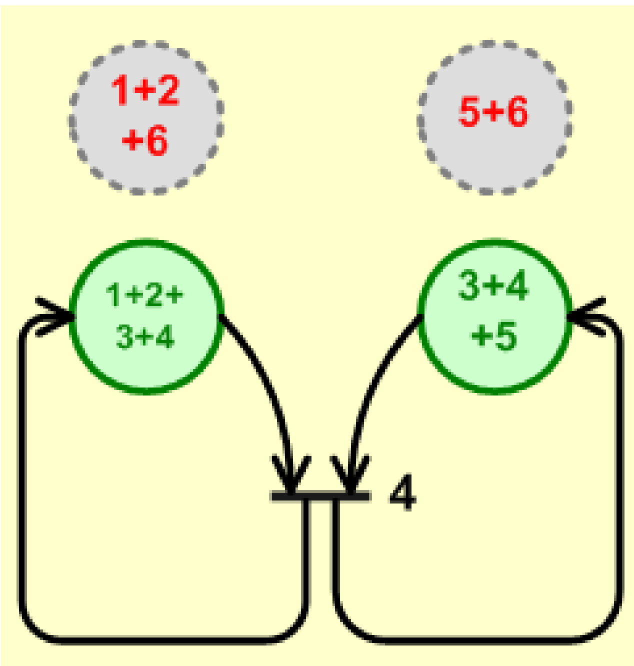
Martinez-Silva algoritmus: 3-1, 3-2. lépés



$$Q_3 = \begin{array}{cccccccccc|l} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{1+2+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{3+5} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5+6} \end{array}$$

$$Q_3' = \begin{array}{cccccccccc|l} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{1+2+3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & p_{3+5} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5+6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+3+4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{3+4+5} \end{array}$$

Martinez-Silva algoritmus: végeredmény



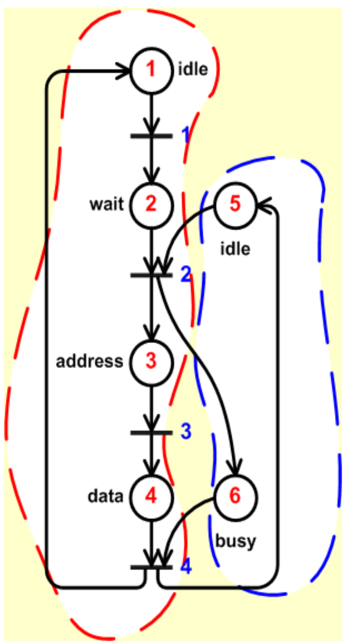
$$Q_3'' = \begin{array}{cccccc|cccc|l} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5+6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+2+3+4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{3+4+5} \end{array}$$

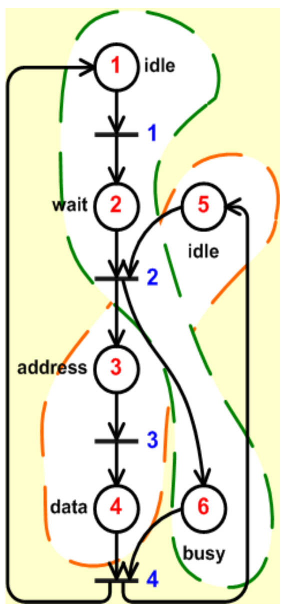
- Algoritmus befejezése:
  - Ha $\mathbf{A_i} = 0$
    (jobb oldali rész-mátrix nulla)
- Invariánsok:
  - A végső $Q_m = [D_m|0]$ mátrix alapján a D_m mátrix soraiban található együtthatók
- Az invariánshoz tartozó tokenösszeg a helyek kezdő jelöléséből adódik

Martinez-Silva algoritmus: végeredmény

$$
Q_3'' = \begin{array}{cccccc|cccc}
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4
\end{array}
$$

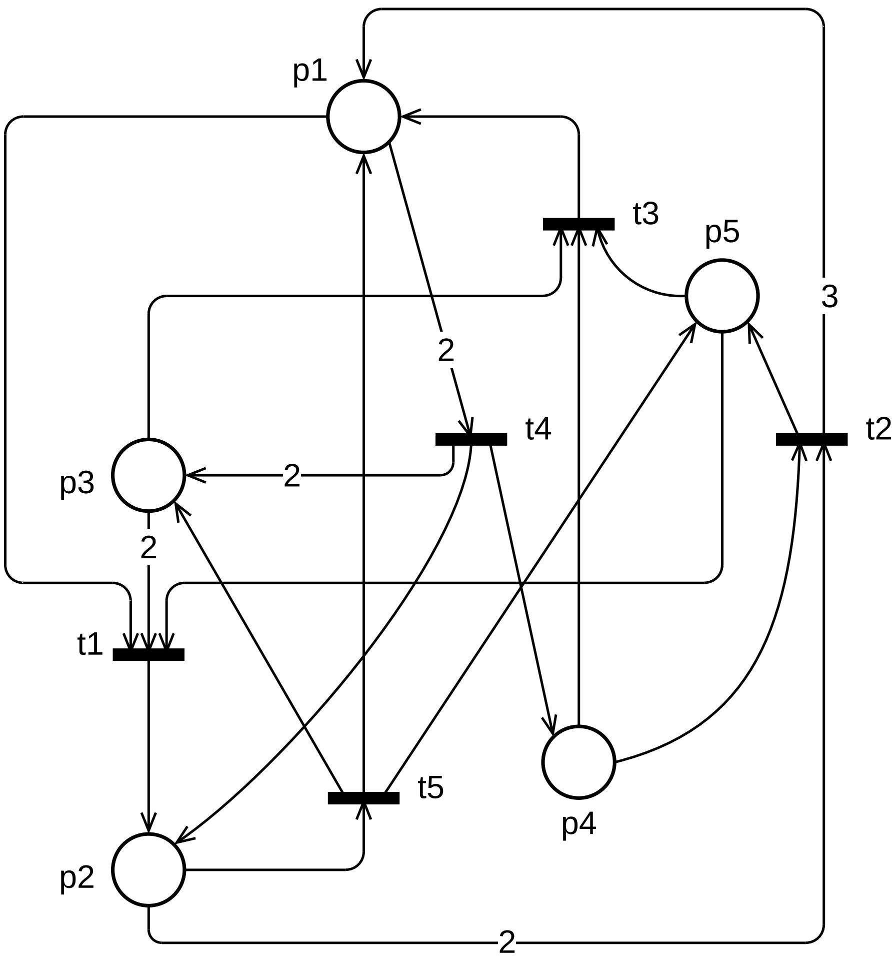
$$
\left[\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
p_{1+2+6} \\
p_{5+6} \\
p_{1+2+3+4} \\
p_{3+4+5}
\end{array}
$$





- Kiszámított P-invariánsok:
  1. $m(p_1)+m(p_2)+m(p_6) = 1$
  2. $m(p_5)+m(p_6) = 1$
  3. $m(p_1)+m(p_2)+m(p_3)+m(p_4) = 1$
  4. $m(p_3)+m(p_4)+m(p_5) = 1$

Példa: T-invariánsok számítása **W** alapján



Kiindulás

						p_1	p_2	p_3	p_4	p_5		
t_1	1	0	0	0	0	-1	1	-2	0	-1	s_{11}	X (törölni)
t_2	0	1	0	0	0	3	-2	0	-1	1	s_{12}	X
t_3	0	0	1	0	0	1	0	-1	-1	-1	s_{13}	X
t_4	0	0	0	1	0	-2	1	2	1	0	s_{14}	
t_5	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	1	s_{15}	X

1. lépés (5. oszlop szerint dolgozunk)

1	1	0	0	0	2	-1	-2	-1	0	(11+12)
0	1	1	0	0	4	-2	-1	-2	0	(12+13)
1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	(11+15)
0	0	1	0	1	2	-1	0	-1	0	(13+15)

(törlés és újrarendezés)

2. lépés előtt

0	0	0	1	0	-2	1	2	1	0	s_{21}	X
1	1	0	0	0	2	-1	-2	-1	0	s_{22}	X
0	1	1	0	0	4	-2	-1	-2	0	s_{23}	X
1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	s_{24}	
0	0	1	0	1	2	-1	0	-1	0	s_{25}	X

2. lépés előtt (4. oszlop szerint dolgozunk)

1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	(21+22)
0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	(21+25)
0	1	1	2	0	0	0	3	0	0	(2*21+23)

(törlés és újrarendezés)

3. lépés előtt

1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	s_{31}	X
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	s_{32}	
0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	s_{33}	X
0	1	1	2	0	0	0	3	0	0	s_{34}	X

3. lépés (3. oszlop szerint dolgozunk)

2	0	1	1	3	0	(2*31+33)
3	1	1	2	3		(3*31+34)

Összefoglalás invariáns számításokhoz

P-invariánsok:

- Számítás:

$$\boxed{\mathbf{W}\vec{\mu}_P = 0}$$

- Martinez-Silva indulása:

$$\mathbf{Q}_1 \leftarrow [\mathbf{1}_\pi \mid \mathbf{W}^\mathrm{T}]$$

- Súlyok helyekhez:

$\mathbf{Q_m} = [\mathbf{D_m} | \mathbf{0}]$ soraiban

T-invariánsok:

- Számítás:

$$\boxed{\mathbf{W}^\mathrm{T}\vec{\sigma}_T = 0}$$

- Martinez-Silva indulása:

$$\mathbf{Q}_1 \leftarrow [\mathbf{1}_\tau \mid \mathbf{W}]$$

- Tüzelési számok:

$\mathbf{Q_m} = [\mathbf{D_m} | \mathbf{0}]$ soraiban

Petri hálók strukturális tulajdonságai

Strukturális élőség, strukturális korlátosság

- Egy N Petri háló strukturálisan élő,
  ha létezik olyan M_0 kezdőállapota, amelyben élő
  - Egy Petri háló élő, ha L4-élő,
    azaz minden $t \in T$ tranzíció L4-élő
    - Egy tranzíció L4-élő: bármely elérhető állapotból legalább egyszer tüzelhető valamely trajektória mentén

- Egy N Petri háló strukturálisan korlátos,
  ha bármely korlátos M_0 kezdőállapotra korlátos

Vezérelhetőség

- Egy N Petri háló teljesen vezérelhető,
  ha bármely korlátos M_0 kezdőállapot esetén:
  ha két állapot elérhető M_0-ból,
  akkor egyikük elérhető a másikból és viszont,
  azaz

$$\boxed{\forall M_i, M_j : M_i, M_j \in R(N, M_0) \Rightarrow M_i \in R(N, M_j) \wedge M_j \in R(N, M_i)}$$

Konzervativitás

- Egy N Petri háló konzervatív, ha bármely korlátos M_0 és $M \in R(N, M_0)$ állapotra minden $p \in P$ helyhez található egy μ_p pozitív egész súlytényező, hogy

$$\boxed{M_0 \vec{\mu} = M \vec{\mu} = \text{állandó}}$$

  - Példa: Bármely kezdőállapot esetén, bármely elérhető állapotra minden hely eleme egy P-invariánsnak
- Részlegesen konzervatív, ha a fentiek csak néhány helyre vonatkoznak.
  - Példa: Bármely kezdőállapot esetén, bármely elérhető állapotra néhány hely eleme egy P-invariánsnak

Ismételhetőség

- Egy N Petri háló ismételhető, ha létezik olyan M_0 kezdőállapot és M_0-ből induló σ tüzelési szekvencia, hogy minden $t \in T$ tranzíció végtelen sokszor tüzel σ -ban
  - Példa: Létezik olyan kezdőállapot, hogy minden tranzíció eleme egy visszatérő tüzelési szekvenciának (ciklusnak, T-invariánsnak)
- Részlegesen ismételhető, ha a fentiek csak néhány tranzícióra vonatkoznak.
  - Példa: Létezik olyan kezdőállapot, hogy néhány tranzíció eleme egy visszatérő tüzelési szekvenciának

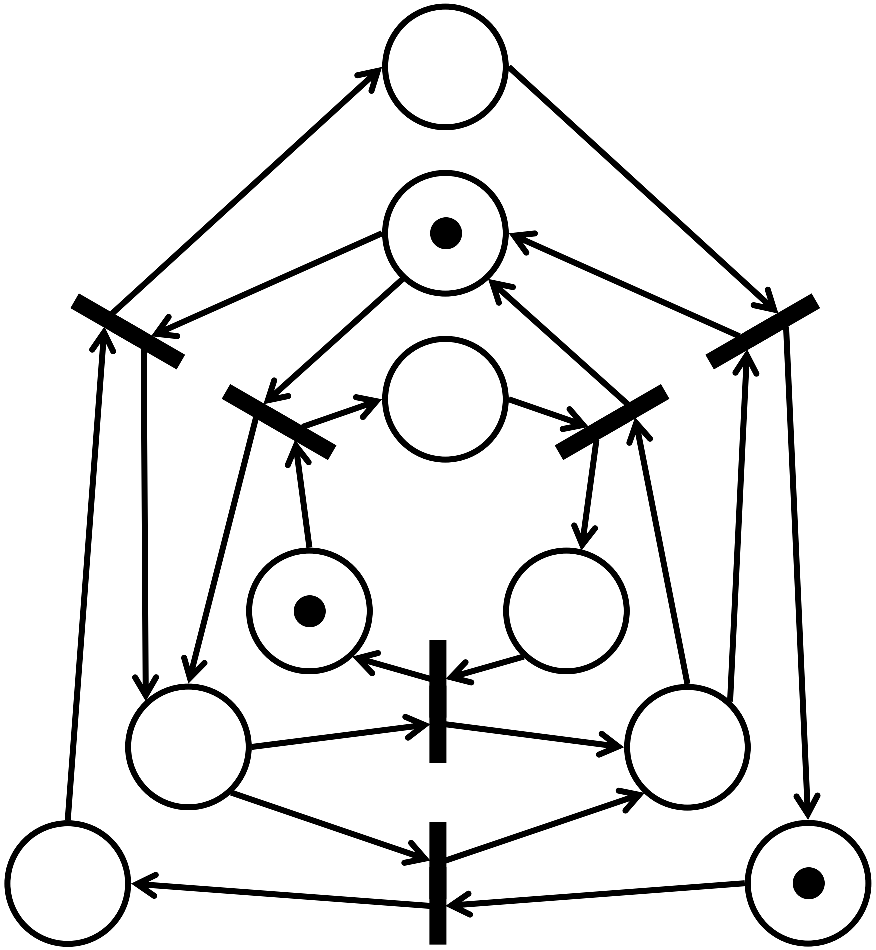
Konzisztencia

- Egy N Petri háló konzisztens, ha létezik olyan M_0 kezdőállapot és M_0-ből induló és M_0-ba visszavezető σ tüzelési szekvencia, hogy minden $t \in T$ tranzíció legalább egyszer tüzel σ-ban.
- Részlegesen konzisztens, ha a fentiek csak néhány tranzícióra vonatkoznak.

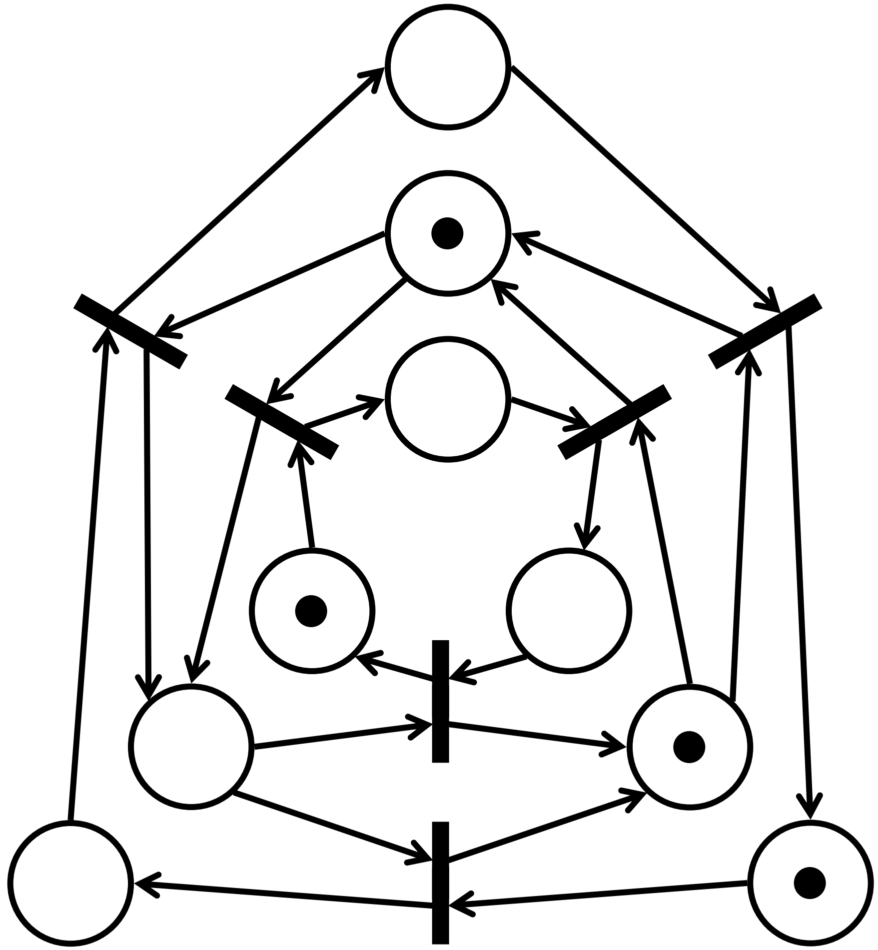
Strukturális B-fairség

- Tranzíciókra: Két tranzíció strukturálisan B-fair, ha bármely M_0 kezdőállapot esetén a két tranzíció B-fair
  - Két tranzíció B-fair: Az egyik maximum korlátos sokszor tüzelhet anélkül, hogy a másik tranzíció tüzelne
- Hálóra: Egy N Petri háló strukturálisan B-fair, ha bármely M_0 kezdőállapot esetén bármely két tranzíció B-fair
  - Egy (N, M_0) Petri háló B-fair, ha bármely két tranzíciója esetén a B-fair reláció teljesül
  - Strukturális B-fair reláció $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ B-fair reláció

Példa: B-fair, de nem strukturálisan B-fair háló



B-fair M_0



Nem B-fair M_0

A tulajdonságok feltételei (kitekintés)

	Tulajdonság	Szükséges és elégséges feltétel
SB	Strukturálisan korlátos	$\exists \vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \leq 0 \ (\text{vagy} \nexists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0)$
CN	Konzervatív	$\exists \vec{\mu} > 0, \mathbf{W}\vec{\mu} = 0 \quad (\text{vagy} \nexists \vec{\sigma}, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0)$
PCN	Részlegesen konzervatív	$\exists \vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}\vec{\mu} = 0$
RP	Ismételhető	$\exists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \geq 0$
PRP	Részlegesen ismételhető	$\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \geq 0$
CS	Konzisztens	$\exists \vec{\sigma} > 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = 0 \quad (\text{vagy} \nexists \vec{\mu}, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0)$
PCS	Részlegesen konzisztens	$\exists \vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} = 0$

Tulajdonságok levezetése (kitekintés)

Ha …	akkor …
N strukturálisan korlátos és strukturálisan élő	*N* konzervatív és konzisztens.
$\exists \vec{\mu} \geq 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\leq} 0$	Létezik nem élő M_0 *N*-hez. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\mu} \geq 0, \mathbf{W}\vec{\mu} \underset{\neq}{\geq} 0$	(*N*, M_0) nem korlátos egy élő M_0 esetén. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\sigma} \geq 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\leq} 0$	Létezik nem élő M_0 strukturálisan korlátos *N*–hez. *N* nem konzisztens.
$\exists \vec{\sigma} \geq 0, \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma} \underset{\neq}{\geq} 0$	*N* nem strukturálisan korlátos. *N* nem konzervatív.

Összefoglalás

- Strukturális analízis alapötlete
- T-invariánsok
  - Definíció: Tüzelési szám vektor tranzíciókra; T-invariáns tüzelésével a tokeneloszlás nem változik
  - Ciklikus végrehajtás lehetőségeit adja meg
  - Számítás: $\mathbf{W}^T \cdot \sigma_T = 0$ megoldásával
- P-invariánsok
  - Definíció: Súlyvektor helyekre; súlyozott tokenösszeg állandó marad a tüzelések során
  - Tokenek „megmaradásának” lehetőségeit adja meg
  - Számítás: $\mathbf{W} \cdot \mu_P = 0$ megoldásával
- Strukturális tulajdonságok definíciói