Gyakorló feladatok:
Szoftver ellenőrzés absztrakcióval.
Modellezés Petri-hálókkal.
Petri-hálók tulajdonságai

Majzik István
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

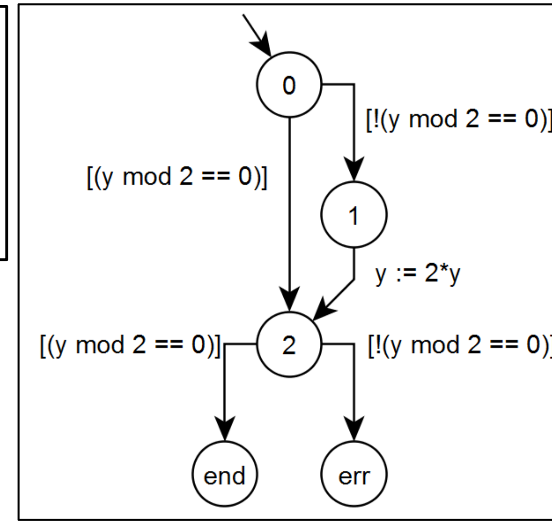
Szoftver ellenőrzés absztrakcióval

```
      y : int
0:    if !((y mod 2) ==0) {
1:          y := 2*y;
      }
2:    assert((y mod 2) == 0);
```

- Rajzolja le a programrészlethez tartozó Control Flow Automaton (CFA) modellt!
  - A vezérlési helyeket a programsorokhoz írt sorszámokkal (0, 1, 2) azonosítsa.
  - Az assert megsértése esetére vegyen fel egy err címkéjű vezérlési helyet, a jó végállapothoz egy end címkéjű vezérlési helyet.
- A CFA modellellenőrzésére vezérlési hely és predikátum absztrakciót alkalmazunk, ez utóbbihoz egyetlen *(y > 0)* predikátumot használunk.
  Mik lehetnek az absztrakt állapottérben a kezdőállapotok *(vezérlési hely, predikátumérték)* alakban megadva, ha a program indulásakor az *y* egész értékű változó tetszőleges lehet?
- Hamis ellenpéldának tekinthető-e az *err* vezérlési hely eléréséhez az absztrakt állapottérben található *(0, true)* → *(2, true)* → *(err, true)* útvonal?

Szoftver ellenőrzés absztrakcióval: Megoldás

```
      y : int
0:    if !((y mod 2) ==0) {
1:          y := 2*y;
      }
2:    assert((y mod 2) == 0);
```



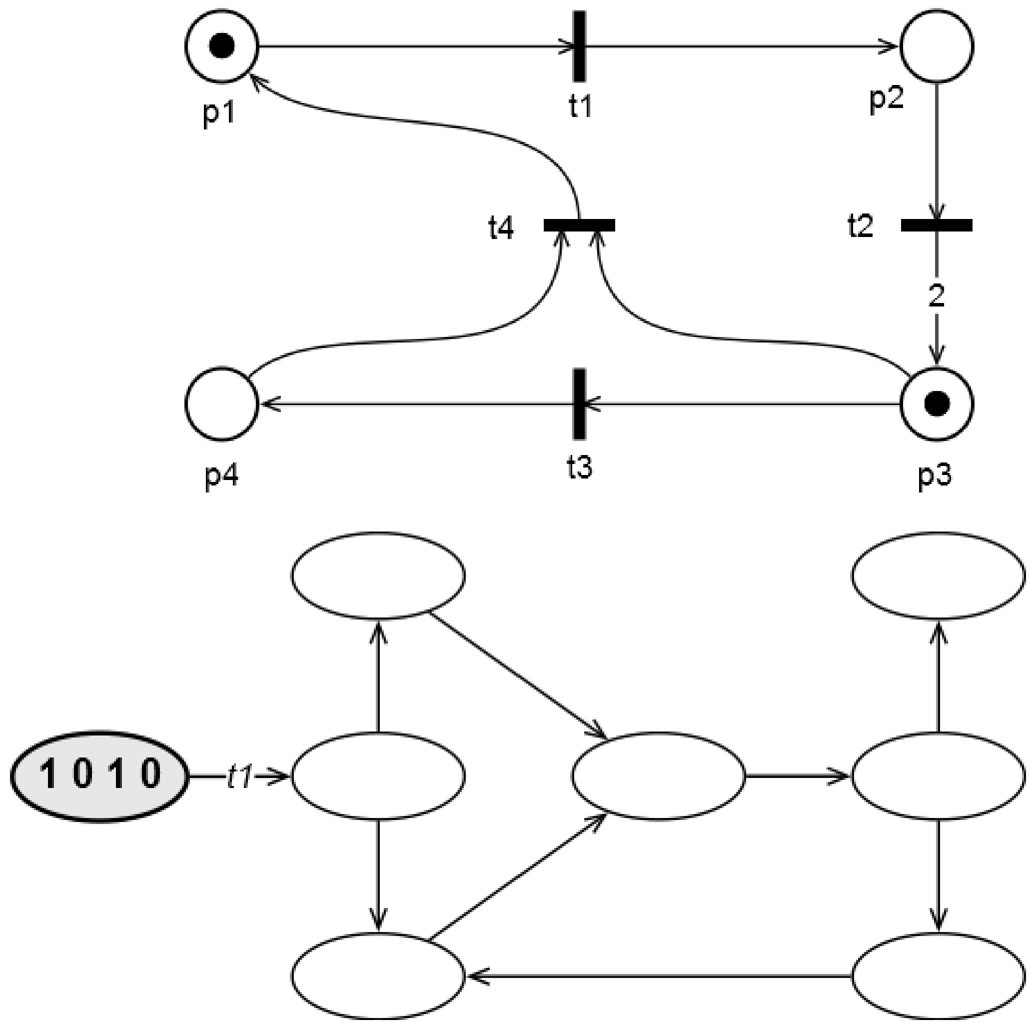
- Rajzolja le a Control Flow Automaton (CFA) modellt!
  - Megoldás: Jobbra
- Az (y > 0) predikátumot használjuk. Mik lehetnek az absztrakt állapottérben a kezdőállapotok *(vezérlési hely, predikátumérték)* alakban megadva, ha a program indulásakor az *y* egész értékű változó tetszőleges lehet?
  - Megoldás: (0, true) és (0, false)
- Hamis ellenpéldának tekinthető-e az *err* vezérlési hely eléréséhez az absztrakt állapottérben a *(0, true)* → *(2, true)* → *(err, true)* útvonal?
  - Megoldás: *(0, true)* → *(2, true)* átmenet esetén (y>0) és (y mod 2 == 0) szükséges, előbbi a predikátum, utóbbi az átmenet feltétele.
    A *(2, true)* → *(err, true)* átmenet esetén (y>0) és !(y mod 2 == 0) szükséges, ahol itt az utóbbi az átmenet feltétele. Ez ellentmond az előző átmenet feltételének.

Állapottér felvétele

- Egészítse ki a Petri-háló alábbi elérhetőségi gráfját!

  A gráfból hiányoznak élek, élcímkék és állapotcímkék.

  A kezdőállapot a baloldalon található szürke hátterű állapot.

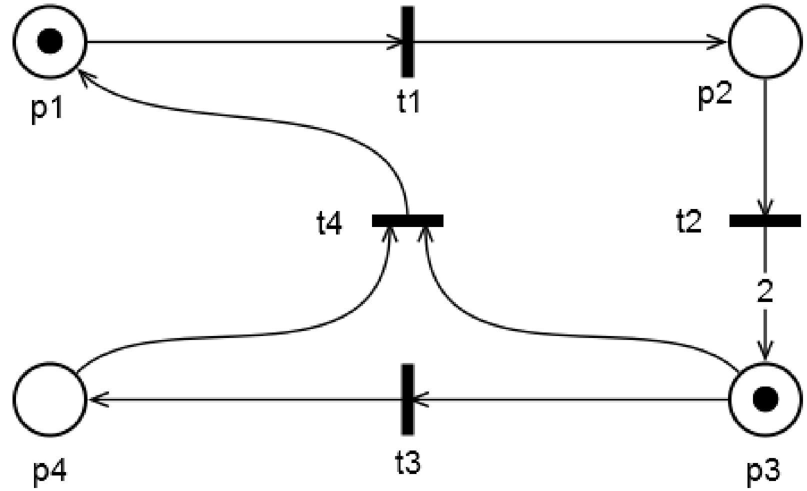


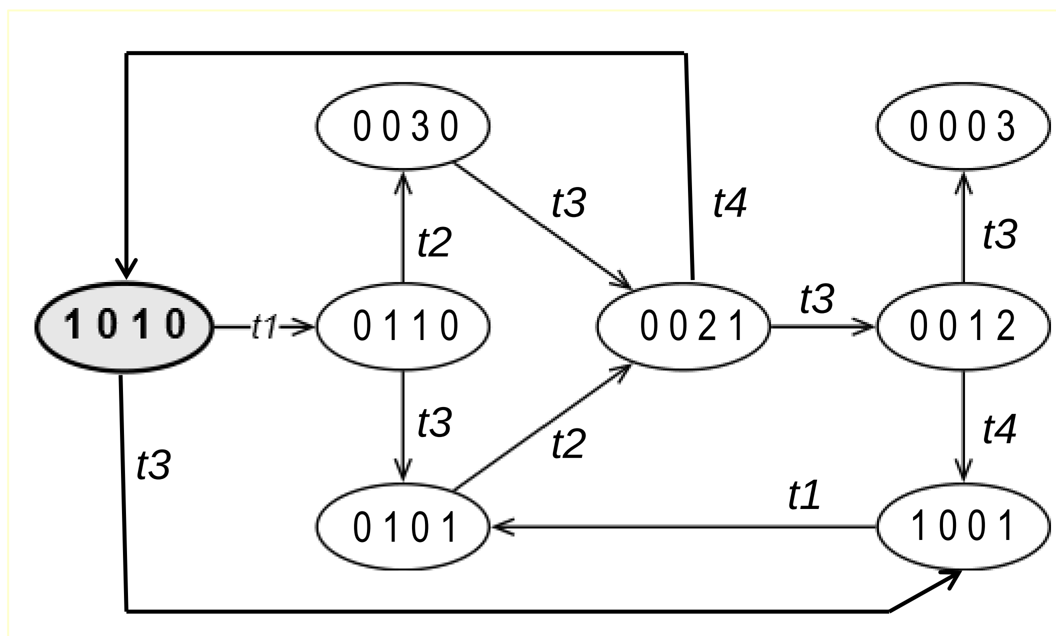
Állapottér felvétele: Megoldás

- Egészítse ki a Petri-háló alábbi elérhetőségi gráfját!

  A gráfból hiányoznak élek, élcímkék és állapotcímkék.

  A kezdőállapot a baloldalon található szürke hátterű állapot.





Dinamikus tulajdonságok

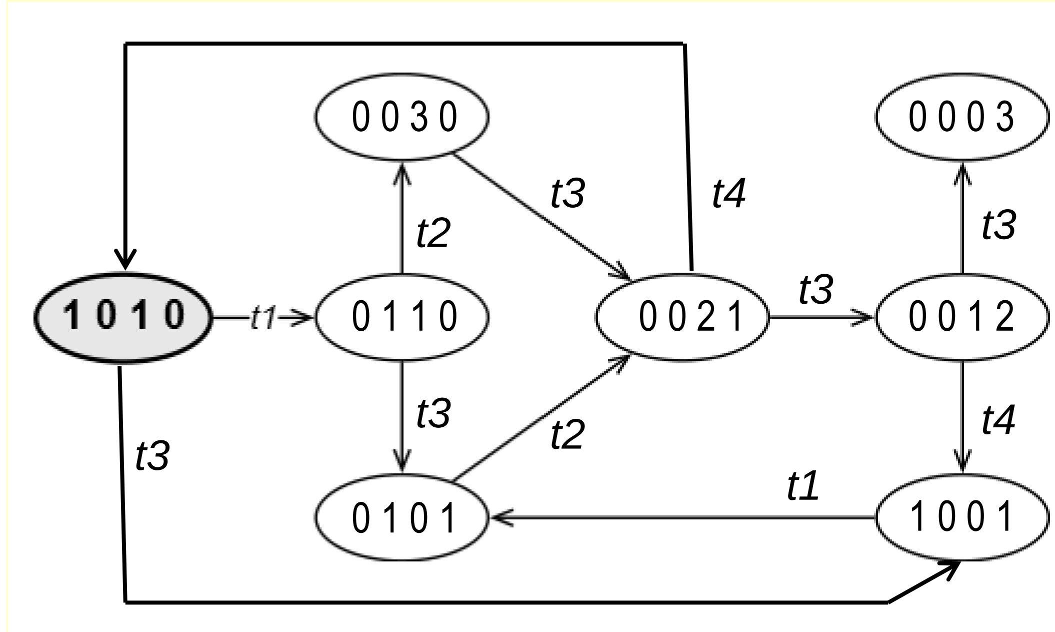
- Vizsgálja meg az előző példában elkészített elérhetőségi gráfot és a Petri-hálót, majd jelölje be az alábbi táblázatban a Petri-háló dinamikus tulajdonságait!

		igaz	hamis	nem dönthető el
(a)	A háló elérhetőségi és fedési gráfja azonos	☐	☐	☐
(b)	A háló nem perzisztens	☐	☐	☐
(c)	A hálóban van holtpont (deadlock)	☐	☐	☐
(d)	*t3* tranzíció L2-élő	☐	☐	☐

		igaz	hamis	nem dönthető el
(e)	A *t1*, *t2*, *t4* tüzelési szekvencia egy T-invariánst alkot	☐	☐	☐
(f)	*t3* és *t4* tranzíció korlátos fair	☐	☐	☐
(g)	A (0 1 0 1) állapot visszatérő állapot	☐	☐	☐
(h)	A háló globális fair	☐	☐	☐

Dinamikus tulajdonságok

Állapottér:



Bejelölendők a dinamikus tulajdonságok:

		igaz	hamis	nem dönthető el			igaz	hamis	nem dönthető el
(a)	A háló elérhetőségi és fedési gráfja azonos	☐	☐	☐	(e)	A *t1*, *t2*, *t4* tüzelési szekvencia egy T-invariánst alkot	☐	☐	☐
(b)	A háló nem perzisztens	☐	☐	☐	(f)	*t3* és *t4* tranzíció korlátos fair	☐	☐	☐
(c)	A hálóban van holtpont (deadlock)	☐	☐	☐	(g)	A (0 1 0 1) állapot visszatérő állapot	☐	☐	☐
(d)	*t3* tranzíció L2-élő	☐	☐	☐	(h)	A háló globális fair	☐	☐	☐

Dinamikus tulajdonságok: Megoldás

		igaz	hamis	nem dönthető el
(a)	A háló elérhetőségi és fedési gráfja azonos	☐	☐	☐
(b)	A háló nem perzisztens	☐	☐	☐
(c)	A hálóban van holtpont (deadlock)	☐	☐	☐
(d)	*t3* tranzíció L2-élő	☐	☐	☐

		igaz	hamis	nem dönthető el
(e)	A *t1*, *t2*, *t4* tüzelési szekvencia egy T-invariánst alkot	☐	☐	☐
(f)	*t3* és *t4* tranzíció korlátos fair	☐	☐	☐
(g)	A (0 1 0 1) állapot visszatérő állapot	☐	☐	☐
(h)	A háló globális fair	☐	☐	☐

a) Igaz, mert korlátos.
b) Igaz, ld. (0 0 1 2) esetén t3 és t4.
c) Igaz, ld. (0 0 0 3)
d) Igaz, mert t3-at tartalmazó ciklusból kilépve holtpontra juthat.
e) Hamis, ilyen ciklus nincs.
f) Igaz, mert egymás nélkül nem szerepelnek ciklusban.
g) Hamis, mert (0 0 0 3)-ból nem elérhető.
h) Igaz, mert a véges tüzelési szekvenciákat kivéve minden ciklusban az összes tranzíció benne van.

Dinamikus tulajdonságok: Emlékeztető (1/2)

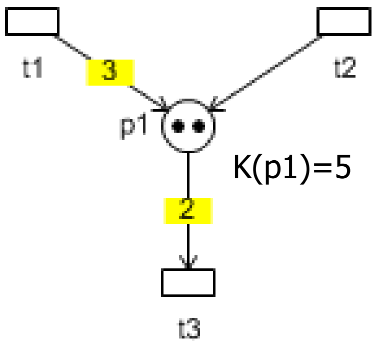
- Korlátosság:
  - Véges elérhetőségi gráf, a fedési gráfban nincs ω címke
  - Biztosság: Az elérhetőségi gráfban csak 0 és 1 jelölések vannak
- Megfordíthatóság:
  - Az elérhetőségi gráf egyetlen erősen összekötött komponens
- Visszatérő állapot:
  - Van az elérhetőségi gráfban erősen összekötött komponens, aminek része a kérdéses állapot
- Fairség:
  - „Az egyik tranzíció korlátos sokszor tüzelhet, mielőtt a másik tüzelne”: Ellenpélda: Olyan ciklus, amiben az egyik tranzíció benne van és a másik nincs
- Perzisztencia:
  - „A tranzíció mindaddig engedélyezett marad, amíg nem tüzel”: Ellenpélda: Több tranzíció engedélyezett, és ha nem az adott tranzíció tüzelt, akkor a következő állapot(ok)ban nem marad engedélyezett (azaz nem jelenik meg élcímkeként)

Dinamikus tulajdonságok: Emlékeztető (2/2)

- Tranzíció L1, L2, L3-élőség
  - Elég egy trajektóriát találni, ahol teljesül
- Tranzíció L4-élőség
  - Végig kell nézni, hogy minden állapotból előbb-utóbb mindig tüzelhetővé válik-e
- A háló élő
  - A háló akkor élő, ha minden tranzíciója L4-élő
  - Ha találunk akár egy tranzíció esetében is ellenpéldát, akkor nem élő
  - Ha holtpontmentes, akkor még nem biztos, hogy élő is

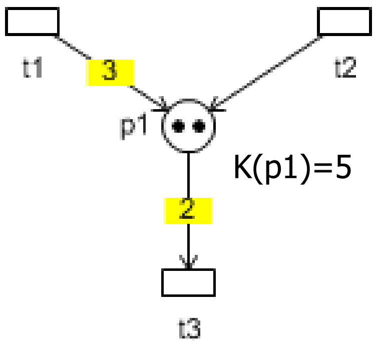
Kapacitáskorlát Petri-hálókban

- Mit jelent az, hogy egy Petri-hálóban egy hely kapacitáskorlátos?
- A mellékelt véges kapacitású hálóból rajzoljon ekvivalens, kapacitáskorlát nélküli hálót!

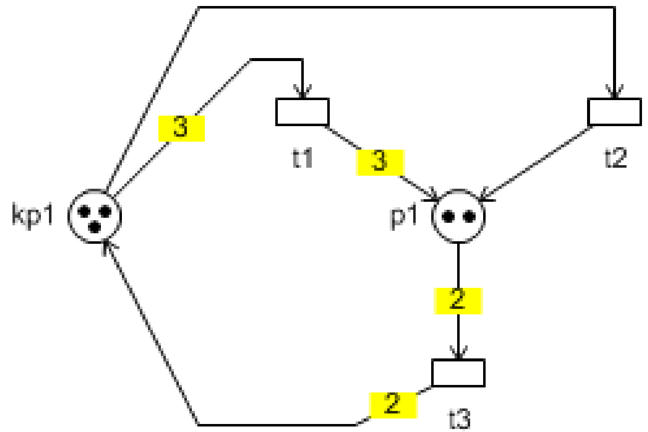


Kapacitáskorlát Petri-hálókban: Megoldás

- Mit jelent az, hogy egy Petri-hálóban egy hely kapacitáskorlátos?
  - Tüzelés után a tokenszám nem lehet nagyobb, mint a kapacitáskorlát értéke az adott helyen.

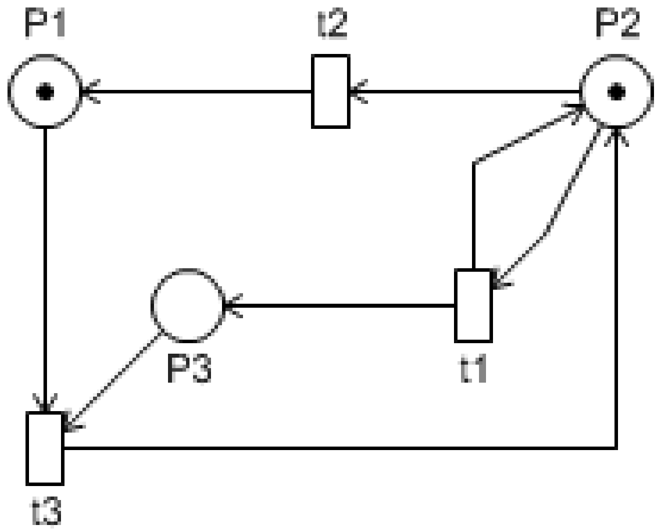


- A mellékelt véges kapacitású hálóból rajzoljon ekvivalens, kapacitáskorlát nélküli hálót!
  - A szabad kapacitás megjelenítésére kp1 kiegészítő hely



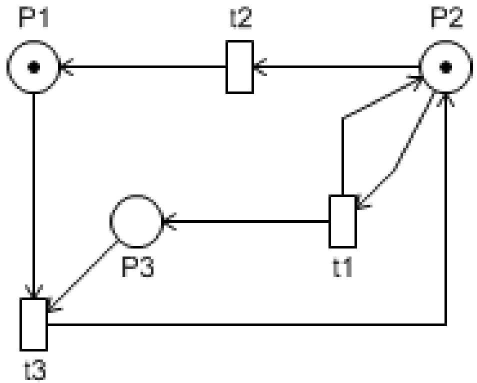
Fedési gráf felvétele

- Rajzolja fel az alábbi Petri-háló fedési gráfját!
- Hogyan változik a gráf, ha a P2 hely kapacitáskorlátos, 1 korláttal?

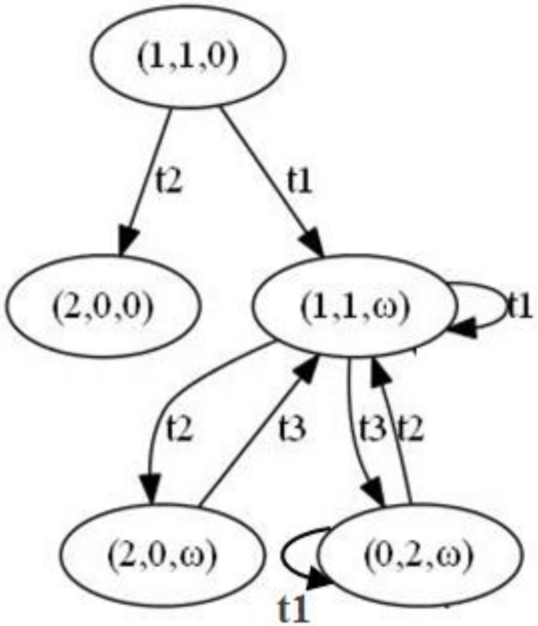


Fedési gráf felvétele: Megoldás

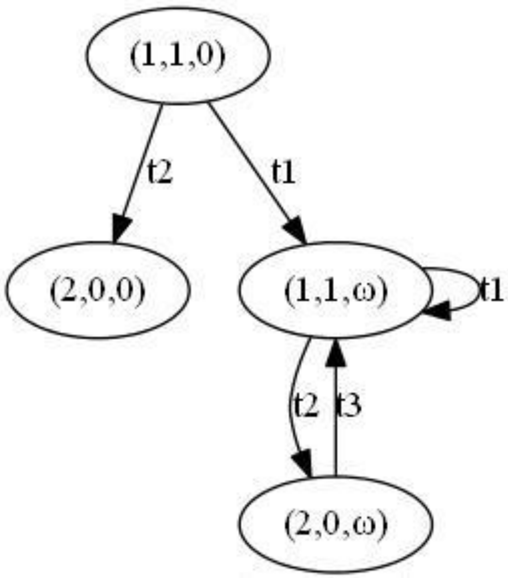
- Rajzolja fel az alábbi Petri-háló fedési gráfját!



Kapacitáskorlát nélkül (P1, P2, P3):



Kapacitás-korláttal (P1, P2, P3):



Modellezés színezetlen Petri-hálókkal (1/2)

Készítse el egy programozó színezetlen Petri-háló modelljét az alábbi szöveges leírásnak megfelelően!

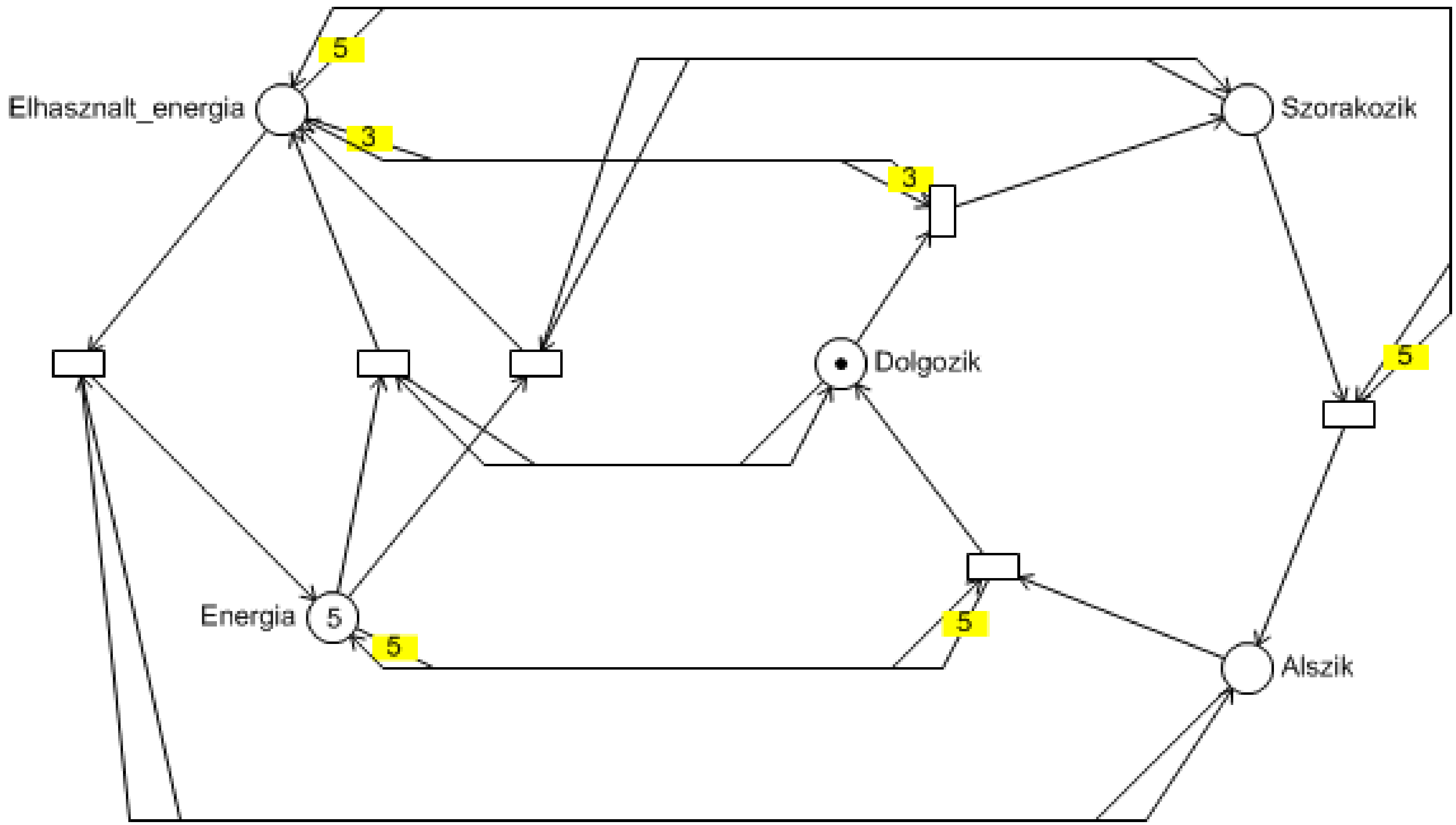
1. A programozó vagy dolgozik, vagy szórakozik, vagy alszik.
2. A programozónak egy napra 5 egységnyi energiája van és a nap kezdetén dolgozik (ez az alapállapot).
3. Ha a programozó dolgozik vagy szórakozik, időnként egy egységnyi energiát felhasznál.
4. Ha a programozó dolgozik és már legalább 3 egységnyi energiát elhasznált, akkor elkezdhet szórakozni.
5. Ha a programozó szórakozik és nincs több energiája, akkor elkezdhet aludni.
6. Ha a programozó alszik, akkor időnként egy egységnyi elhasznált energiája újra felhasználhatóvá válik.
7. Ha a programozó alszik és minden energiája felhasználható, akkor elkezdhet dolgozni.

Modellezés színezetlen Petri-hálókkal (2/2)

Az előző feladat szerinti modellt a lenti a lenti modell-részletet kiegészítve készítse el!

Modellezés színezetlen Petri-hálókkal: Megoldás

Az előző feladat szerinti modellt a lenti a lenti modell-részletet kiegészítve készítse el!

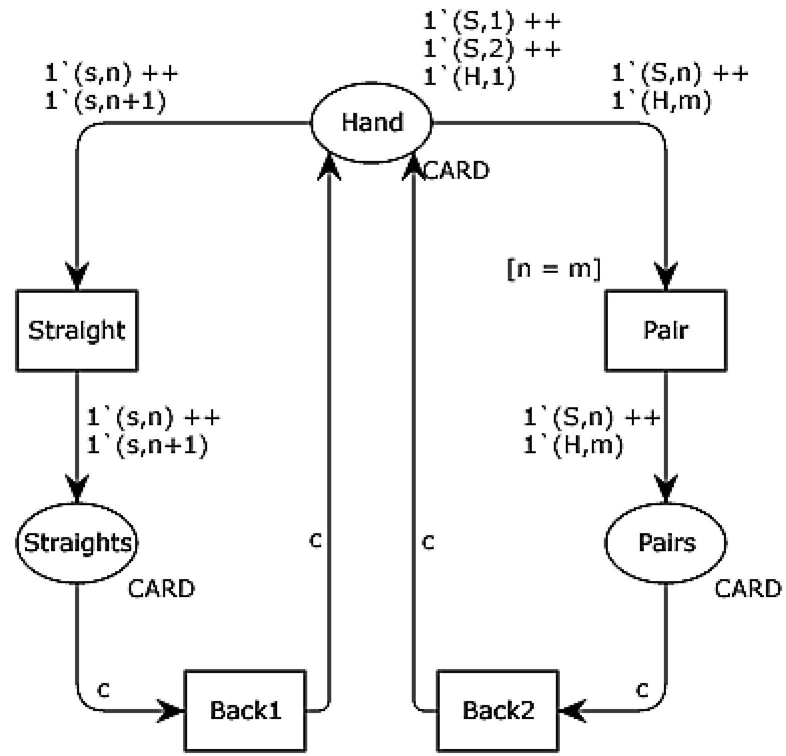


Modellezés színezett Petri-hálókkal

Adott az ábrán látható színezett Petri-háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező.

1. Mely tranzíciók és milyen lekötéssel engedélyezettek az adott állapotban?
2. Tüzelés után mik lehetnek a háló következő jelölései?
   Válasszon ki egyet ezek közül és adja meg az ezután következő lehetséges lekötéseket!
3. Korlátos-e a háló az adott kezdőállapottal?
4. Holtpontmentes-e a háló az adott kezdőállapottal?
5. Van-e a hálóban T-invariáns?

```
colset SUIT = with S | H;
colset NUM = int with 0..12;
colset CARD = product SUIT * NUM;
var s : SUIT;
var n, m : NUM;
var c : CARD;
```

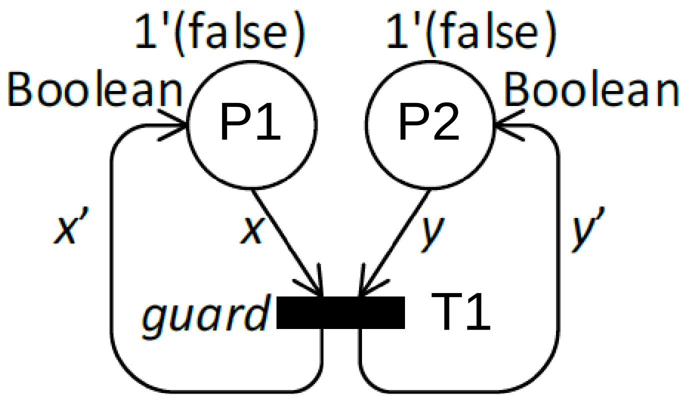


Modellezés színezett Petri-hálókkal: Megoldás

1. Engedélyezett:
   - **Straight**, s=S, n=1 lekötéssel
   - **Pair**, n=1, m=1 lekötéssel
2. Következő jelölések:
   - **Straight** tüzel: **Hand** lesz 1’(H,1), **Straights** lesz 1’(S,1)++1’(S,2).
     Ezután engedélyezett: **Back1**, c=(S,1) vagy c=(S,2) lekötéssel
   - **Pair** tüzel: **Hand** lesz 1’(S,2), **Pairs** lesz 1’(S,1)++1’(H,1).
     Ezután engedélyezett: **Back2**, c=(S,1) vagy c=(H,1) lekötéssel
3. Korlátos:
   - Minden tranzíció ugyanannyi tokent vesz el, mint amennyit kirak, így a tokenek száma nem változik
4. Holtpontmentes:
   - A **Back1** vagy **Back2** mindig vissza tudja (egyenként) rakni, amit a **Straight** vagy a **Pair** elvett, mindig ciklikus a működés
5. T-invariánsok fejben is megkereshetők:
   - **Straight, Back1, Back1**
   - **Pair, Back2, Back2**

Színezett Petri-hálók széthajtogatása

- Adott az ábrán látható színezett Petri háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező:
  var x, y, x',y': Boolean;

  Az őrfeltétel:

  $$(\neg x \wedge \neg y \wedge x' \wedge \neg y') \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg x' \wedge y') \vee (\neg x \wedge y \wedge x' \wedge y')$$

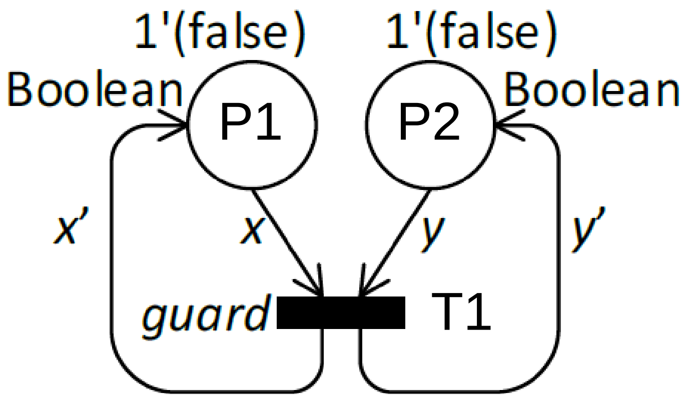
- Készítse el a színezett Petri-háló struktúrával ekvivalens működésű színezetlen Petri háló struktúrát, azaz a színezett Petri háló széthajtogatását!
- Élő-e és/vagy korlátos-e a fenti színezett háló és az ekvivalens működésű széthajtogatott színezetlen háló az adott (vagy bármilyen korlátos) kezdőállapottal?

Színezett Petri-hálók széthajtogatása: Megoldás

- Adott az ábrán látható színezett Petri háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező:

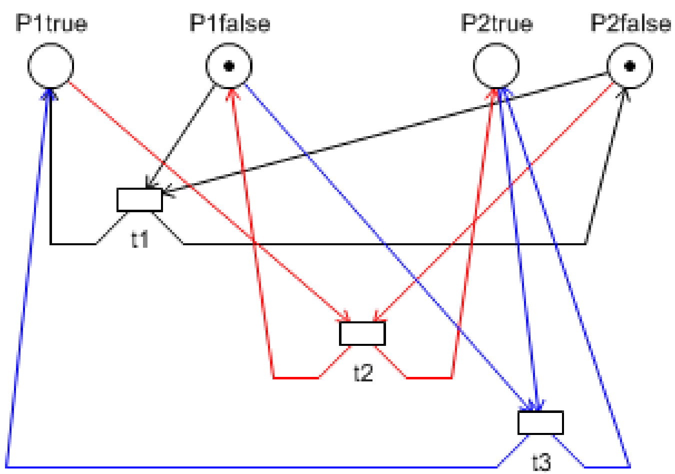
  var x, y, x’,y’: Boolean;

  Az őrfeltétel:



$$(\neg x \wedge \neg y \wedge x' \wedge \neg y') \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg x' \wedge y') \vee (\neg x \wedge y \wedge x' \wedge y')$$

- Petri háló széthajtogatása:



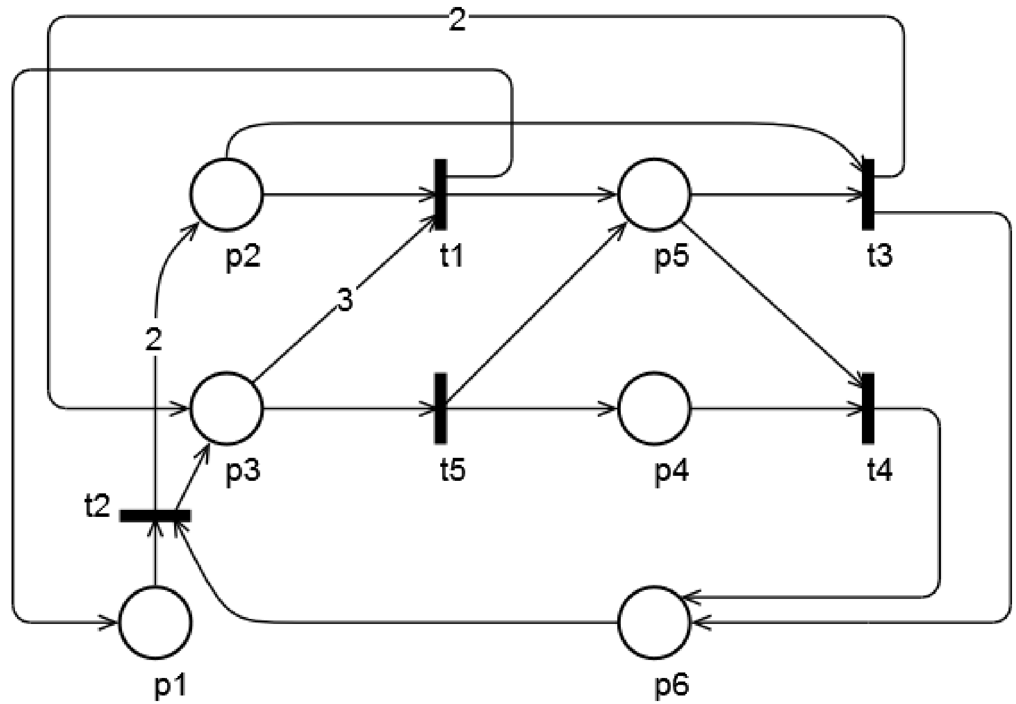
- Élő-e és/vagy korlátos-e a fenti színezett háló?
  - Nem élő (van holtpont)
  - Korlátos: Egyik tranzíció sem szaporíthatja a tokeneket

Strukturális tulajdonságok (1)

Adott az ábrán látható Petri-háló és a hozzátartozó W^T szomszédossági mátrix.

Milyen számokat kell a mátrixban a betűvel jelölt kitöltetlen helyekre írni?

- A =
- B =
- C =
- D =



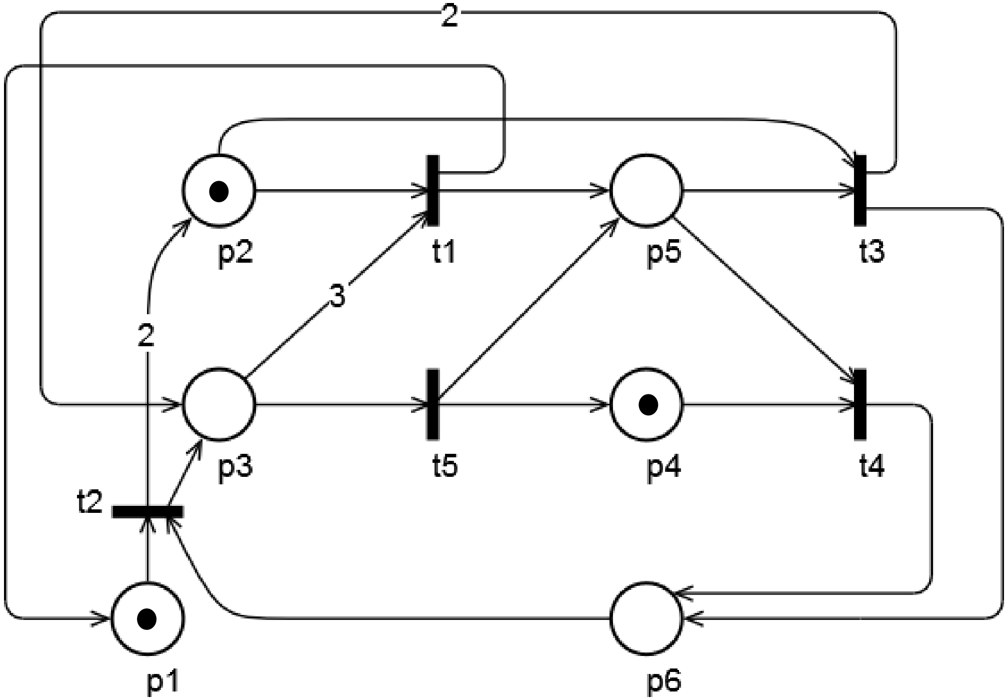
$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} \atop \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{array}\right]$$

Strukturális tulajdonságok (1): Megoldás

Adott az ábrán látható Petri-háló és a hozzátartozó W^T szomszédossági mátrix.

Milyen számokat kell a mátrixban a betűvel jelölt kitöltetlen helyekre írni?

- A = -3
- B = -1
- C = -1
- D = 0



$$W^T = \left[\begin{array}{cccccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ p_3 & \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{array}\right]$$

Strukturális tulajdonságok (2)

Ellenőrizze az állapot-egyenlet alapján, hogy az alábbiak közül melyek T-invariánsai az előbbi Petri-hálónak!

$$W^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \end{array}$$

- $(2,2,2,0,0)^T$
- $(0,1,0,1,3)^T$
- $(1,2,1,1,3)^T$

Strukturális tulajdonságok (2): Megoldás

Ellenőrizze az állapot-egyenlet alapján, hogy az alábbiak közül melyek T-invariánsai az előbbi Petri-hálónak!

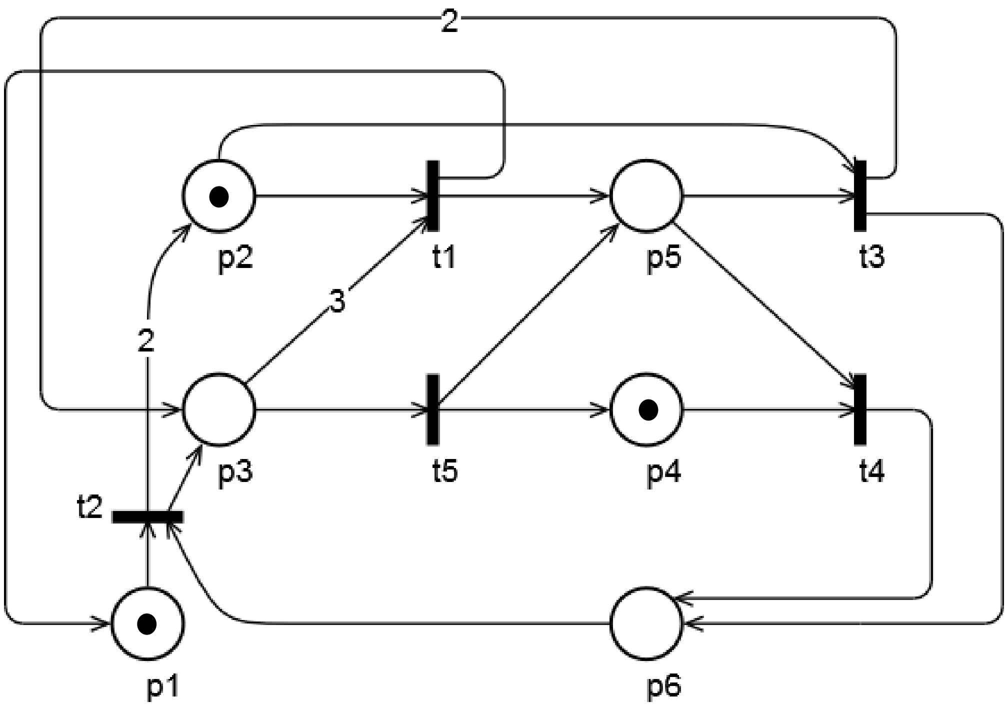
$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{array}\right] \end{array}$$

- $(2,2,2,0,0)^T$ Invariáns
- $(0,1,0,1,3)^T$ Nem invariáns
- $(1,2,1,1,3)^T$ Nem invariáns

Állapotegyenletből: Ellenőrzés: $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}_T = 0$

Temporális tulajdonságok

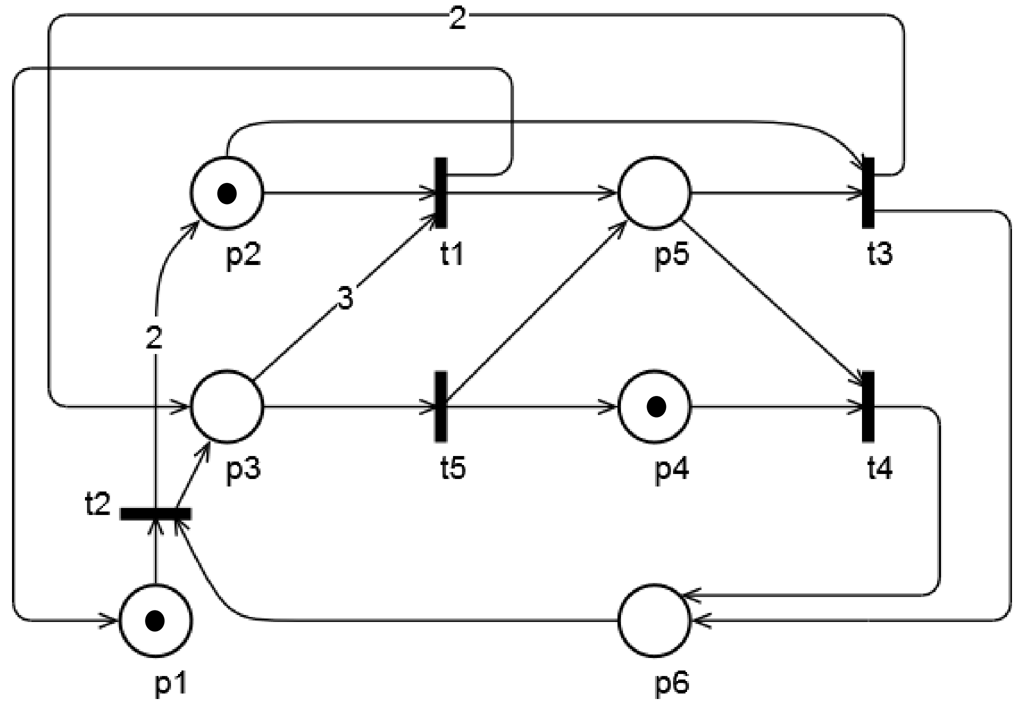
Az előbbi Petri-hálóra az M(1,1,0,1,0,0) kezdőállapotból igaz-e a következő, CTL temporális logikával megadott állítás?



- **AG** (m(p1) + m(p2) + m(p3) + m(p5) + m(p6) = 2)

Temporális tulajdonságok: Megoldás

Az előbbi Petri-hálóra az M(1,1,0,1,0,0) kezdőállapotból igaz-e a következő, CTL temporális logikával megadott állítás?



- **AG** (m(p1) + m(p2) + m(p3) + m(p5) + m(p6) = 2)

  Itt: A teljes állapottér a kezdőállapotból áll, erre teljesül.

  Általános megoldás: A kezdőállapot valamint a tokenek összegéből kiadódó P-invariáns ellenőrzésével vizsgálható.

Elméleti kérdések

1. Adja meg a P-invariánsok formális definícióját (a definícióban szereplő változók jelentésének megadásával), és adjon egy példát ezek gyakorlati felhasználhatóságára!
2. Rajzoljon le egy forrás tranzíciót és egy nyelő tranzíciót! Indokolja meg, veszélyeztethetik-e ezek egy Petri-háló élőségét és biztosságát!
3. Adja meg a tanult tulajdonságmegőrző transzformációk segítségével az alábbi topológiával megadott Petri-háló redukciós lépéseit, és rajzolja le a végeredményt!
   - $\bullet p_1 = \emptyset$
   - $\bullet p_2 = \{t_1, t_2\}$
   - $\bullet t_1 = \{p_1\}$
   - $\bullet t_2 = \{p_1\}$

Elméleti kérdések: Megoldás

1. Adja meg a P-invariánsok formális definícióját (a definícióban szereplő változók jelentésének megadásával), és adjon egy példát ezek gyakorlati felhasználhatóságára!
   - P-invariánsok: Egy nemnegatív μ_P súlyvektor által kijelölt helyeken a tokenek súlyozott összege állandó marad:

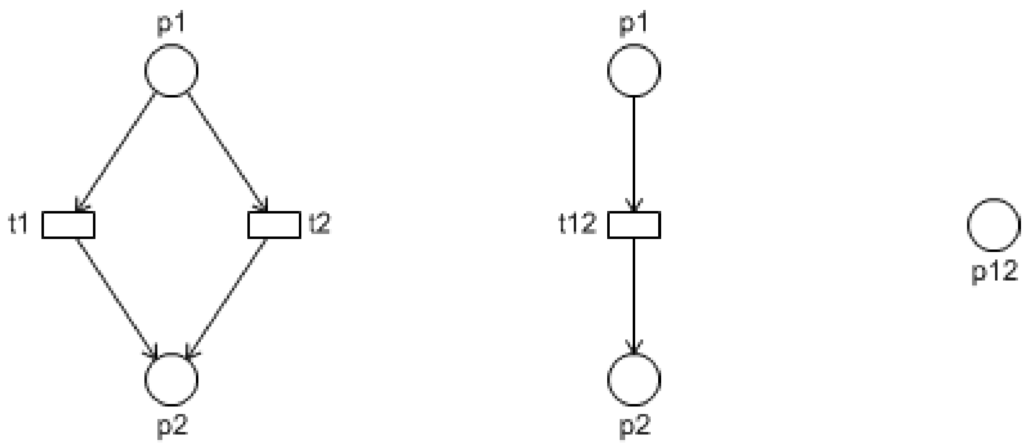
$$\vec{\mu}_P^{\mathrm{T}} M = \text{állandó}$$

   - Alkalmazási példa: Munkafolyamat modellje esetén a tokenekkel modellezett erőforrások száma nem változik (egyszeres súlyozással)
2. Rajzoljon le egy forrás tranzíciót és egy nyelő tranzíciót! Indokolja meg, miért veszélyeztethetik ezek egy Petri-háló élőségét és biztosságát!
   - Forrás tranzíció: Csak kimenő éle van. Tokeneket „termel”, így a korlátosságot és biztosságot veszélyezteti a kimenő helyein.
   - Nyelő tranzíció: Csak bemenő éle van. Tokeneket „fogyaszt”, így az élőséget veszélyeztetheti.

Elméleti kérdések: Megoldás

3. Adja meg a tanult tulajdonságmegőrző transzformációk segítségével az alábbi topológiával megadott Petri-háló redukciós lépéseit, és rajzolja le a végeredményt!

- $p_1 = \varnothing$
- $p_2 = \{t_1, t_2\}$
- $t_1 = \{p_1\}$
- $t_2 = \{p_1\}$



1. lépés: Párhuzamos tranzíciók szabálya

2. lépés: Soros helyek szabálya