Petri hálók: Alapelemek és kiterjesztések

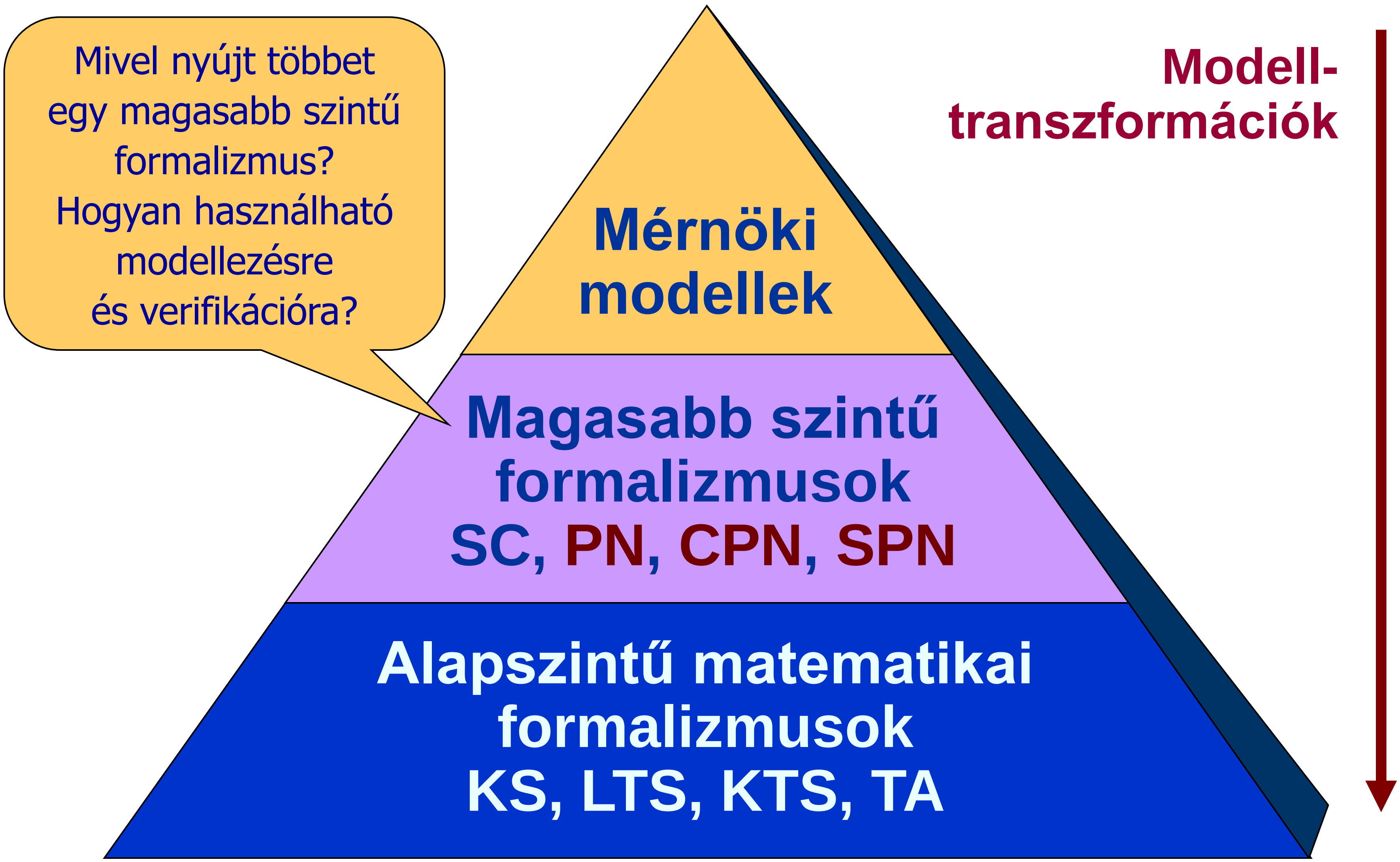
dr. Bartha Tamás

dr. Majzik István

dr. Pataricza András

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Modellek a formális ellenőrzéshez



Petri háló: Mire használható?

Petri hálók alkalmazási köre:

- Konkurens,
- aszinkron,
- elosztott,
- párhuzamos,
- nemdeterminisztikus

rendszerek modellezése

Vannak erre más formalizmusok is, pl. automaták hálózata.
Miben speciálisak a Petri hálók?

- Kompaktabb módon fejezik ki az állapotot
- Szemléletesen fejezik ki a szinkronizációt

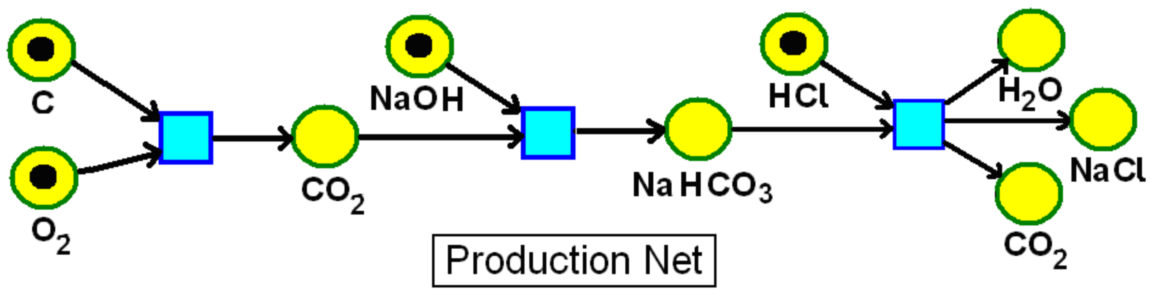
$\Rightarrow$ Tömörebb, átláthatóbb modellek

A Petri hálók alapvető tulajdonságai

- Egyidejűleg biztosítja:
  - Grafikus reprezentáció → Áttekinthetőség (+hierarchia)
  - Matematikai formalizmus → Precizitás, egyértelműség
- Struktúrával fejezi ki:
  - Vezérlési struktúra (függések, feltételek, konkurencia)
  - Adatstruktúra (adatelemek, ezek rendelkezésre állása)
- További előnyök:
  - Könnyen kiterjeszthető
    - Pl. időzített, sztochasztikus, színezett, hierarchikus Petri hálók
  - Más ábrázolásmódok is leképezhetők Petri hálóvá
    - Intuitív kiterjesztésekkel minden Turing gép szimulálható

Petri háló: Honnan ered?

- Carl Adam Petri: német matematikus, 1926-2010
- A jelölésrendszert 1939-ben, 13 évesen találta ki
- Eredetileg kémiai folyamatok leírására szánta



- Később a matematikai alapokat a doktori disszertációjában dolgozta ki (1962-ben)
  - C. A. Petri: Kommunikation mit Automaten. Schriften des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn Nr. 2, 1962

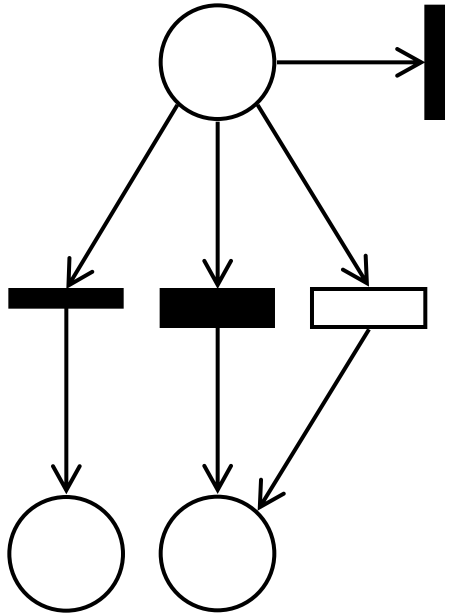
Petri hálók felépítése és működése

Petri hálók struktúrája

Struktúra: Irányított, súlyozott, páros gráf

- Két típusú csomópont:
  - Hely: $p \in P$ Jelölése: kör
  - Tranzíció: $t \in T$ Jelölése: téglalap
- Irányított élek:
  - Hely $\rightarrow$ tranzíció
  - Tranzíció $\rightarrow$ hely

  páros gráf!
  - $e \in E, \quad E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$

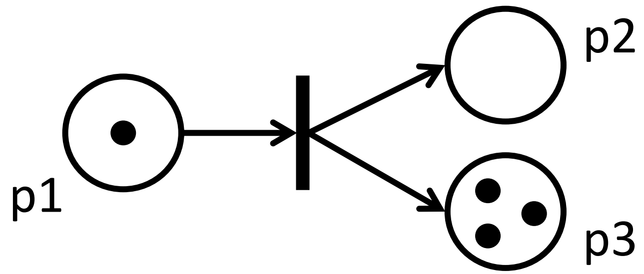


Petri háló állapota

Helyek: Lehetséges helyzetek, feltételek modellezése

Lokális helyzet, feltétel fennáll: Ha a helyet „megjelöljük”

- Állapotjelölő: token   Jelölése: fekete pont
  - Pl. „Futásra kész” hely jelölése, ha egy processz futásra készen áll
- Hely „jelölése” (állapota): benne levő tokenek száma
  - Pl. „Futásra kész” helyen több token, ha több processz is készen áll
- Háló állapota: az egyes helyek jelöléseinek összessége
  - Állapotvektor: az M tokeneloszlás vektor, minden helyhez egy elem
  - M-nek egy m_i eleme: A p_i helyen található tokenek száma



$$M = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \end{array}$$

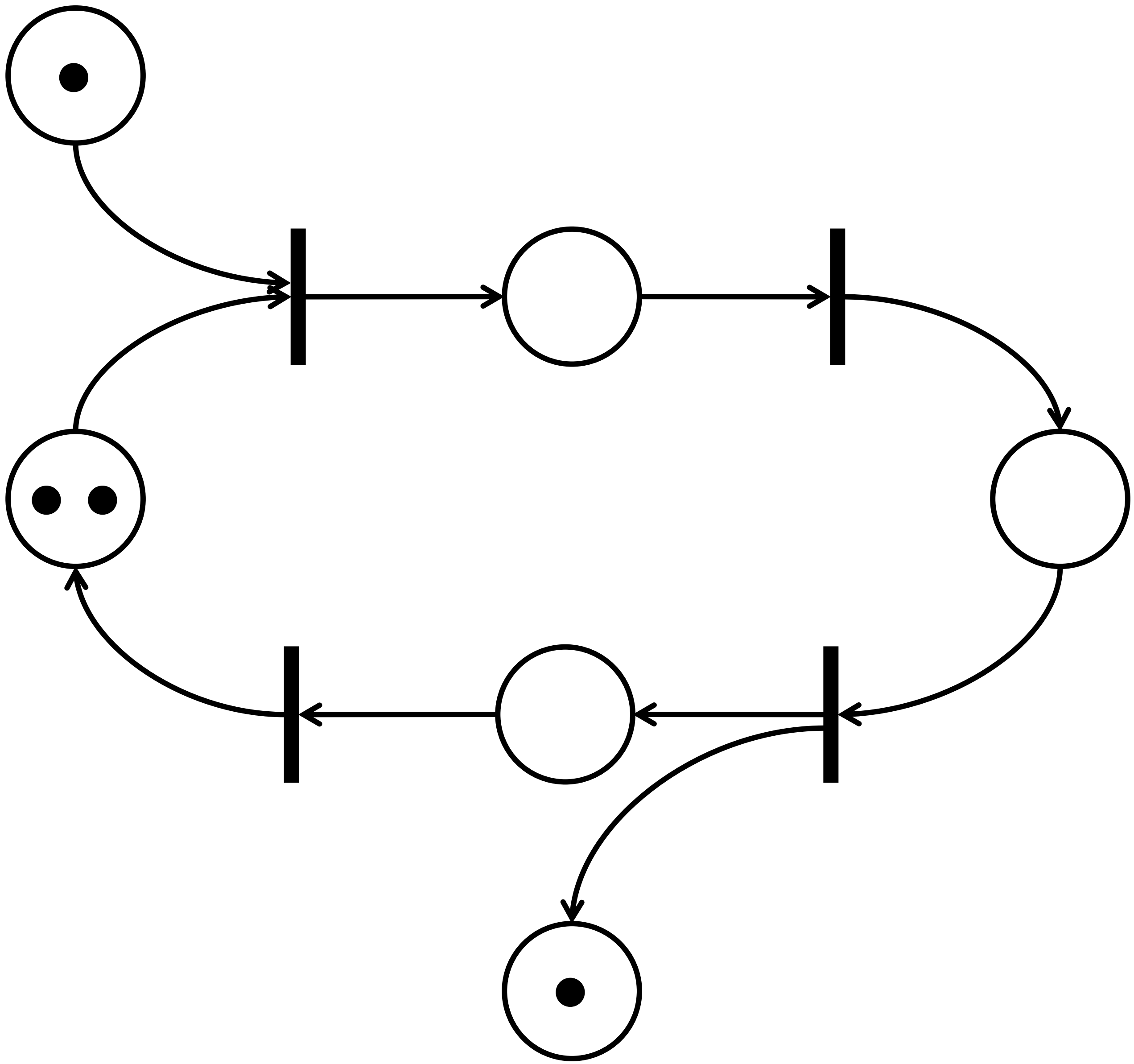
Petri háló működése (dinamika)

Tranzíciók: Lehetséges változások modellezése

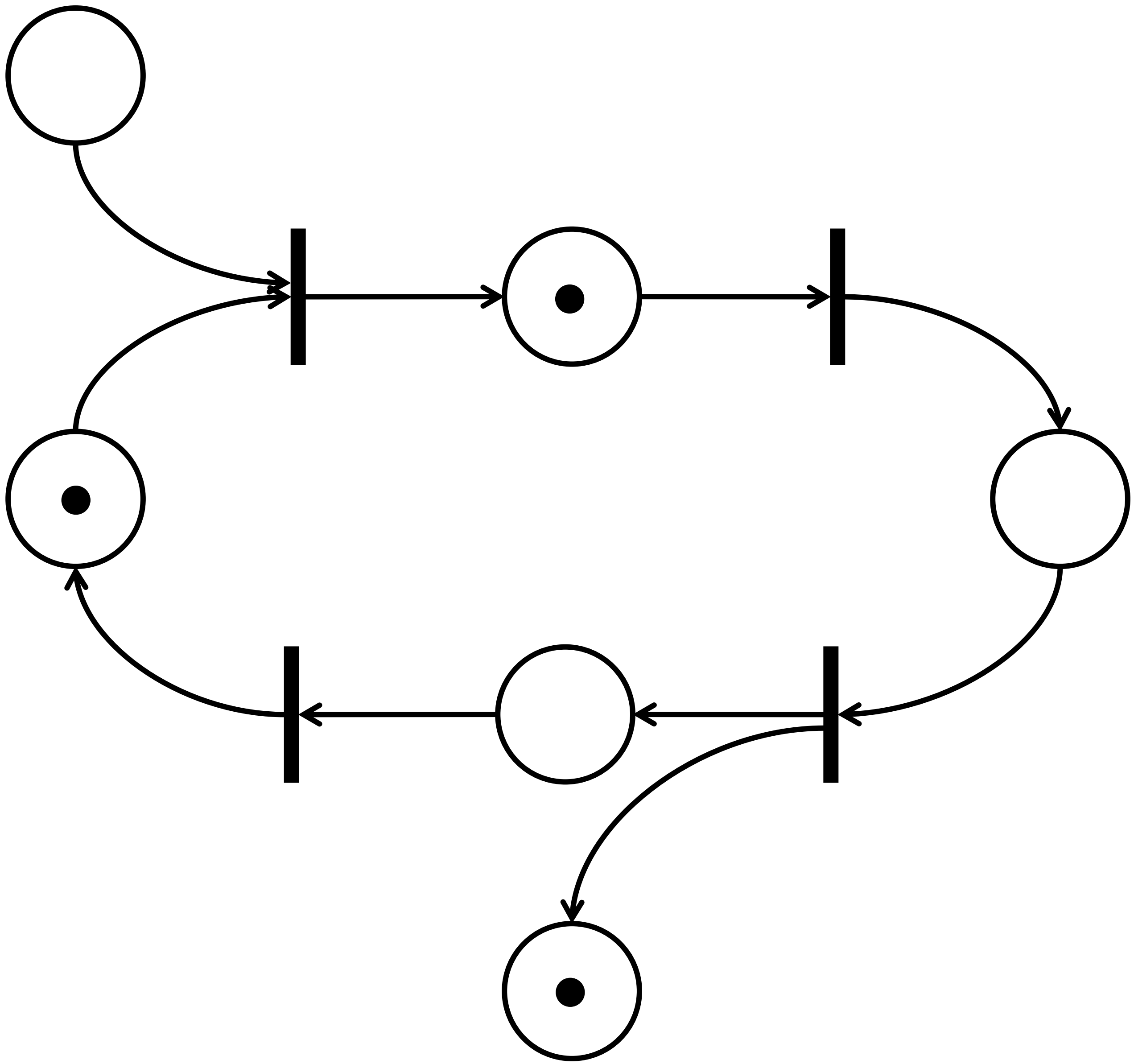
Változás bekövetkezik: Ha a tranzíció „tüzel”

- Egy tranzíció csak akkor tüzelhet, ha engedélyezett
  - A tranzíció minden bemeneti élére igaz:
    Az él végén lévő helyen (bemeneti helyen) van token
- Tüzelés végrehajtása
  - Token elvétele minden bemeneti helyről
  - Token kirakása minden kimeneti helyre
- Nem a tokenek „mozgatása”, hanem elvétel és kirakás!
  - Token „elnyelése” és „generálása” is lehetséges
- Megváltozott token eloszlás vektor: új állapot

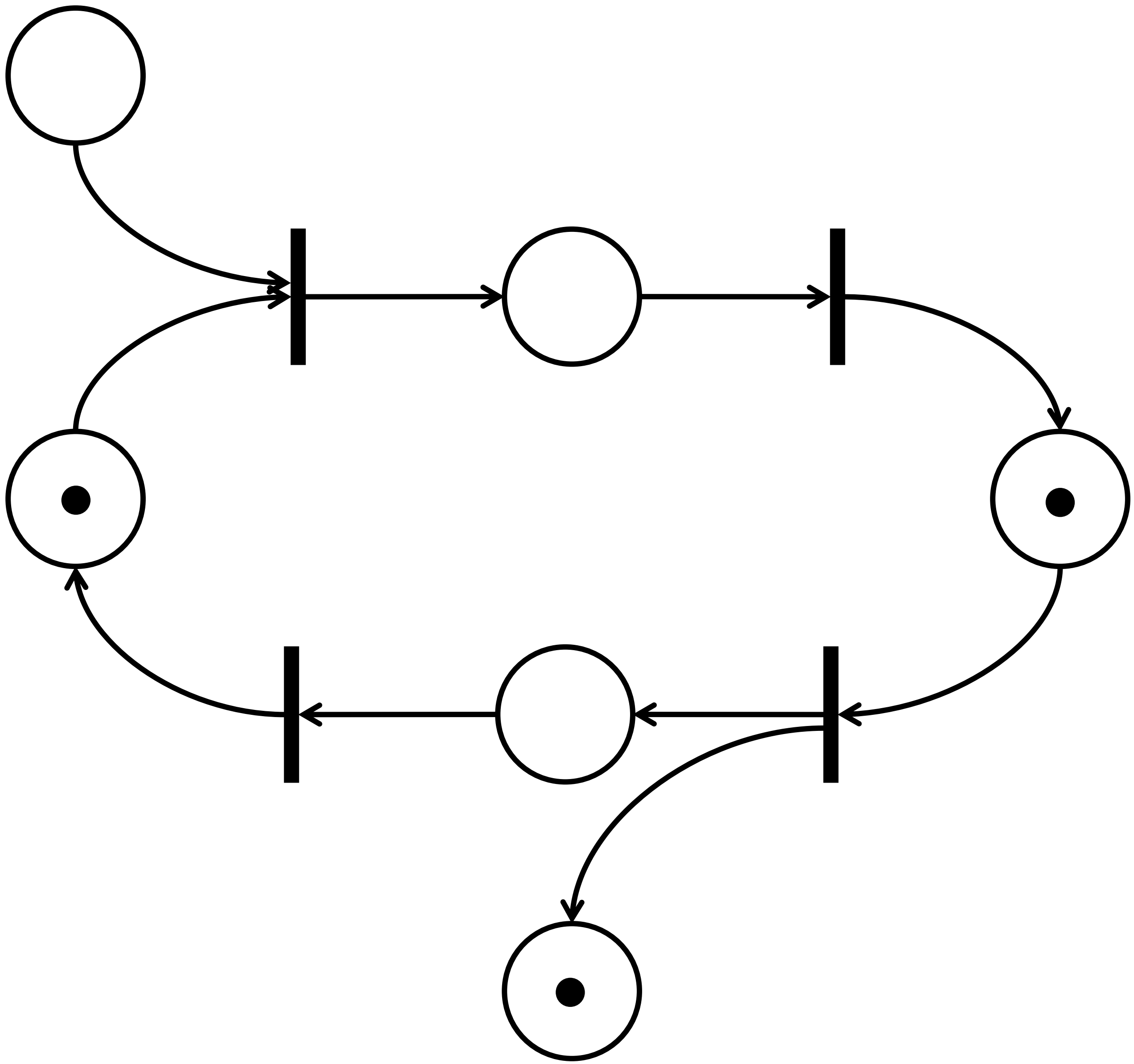
Egyszerű példa a tüzelésekre



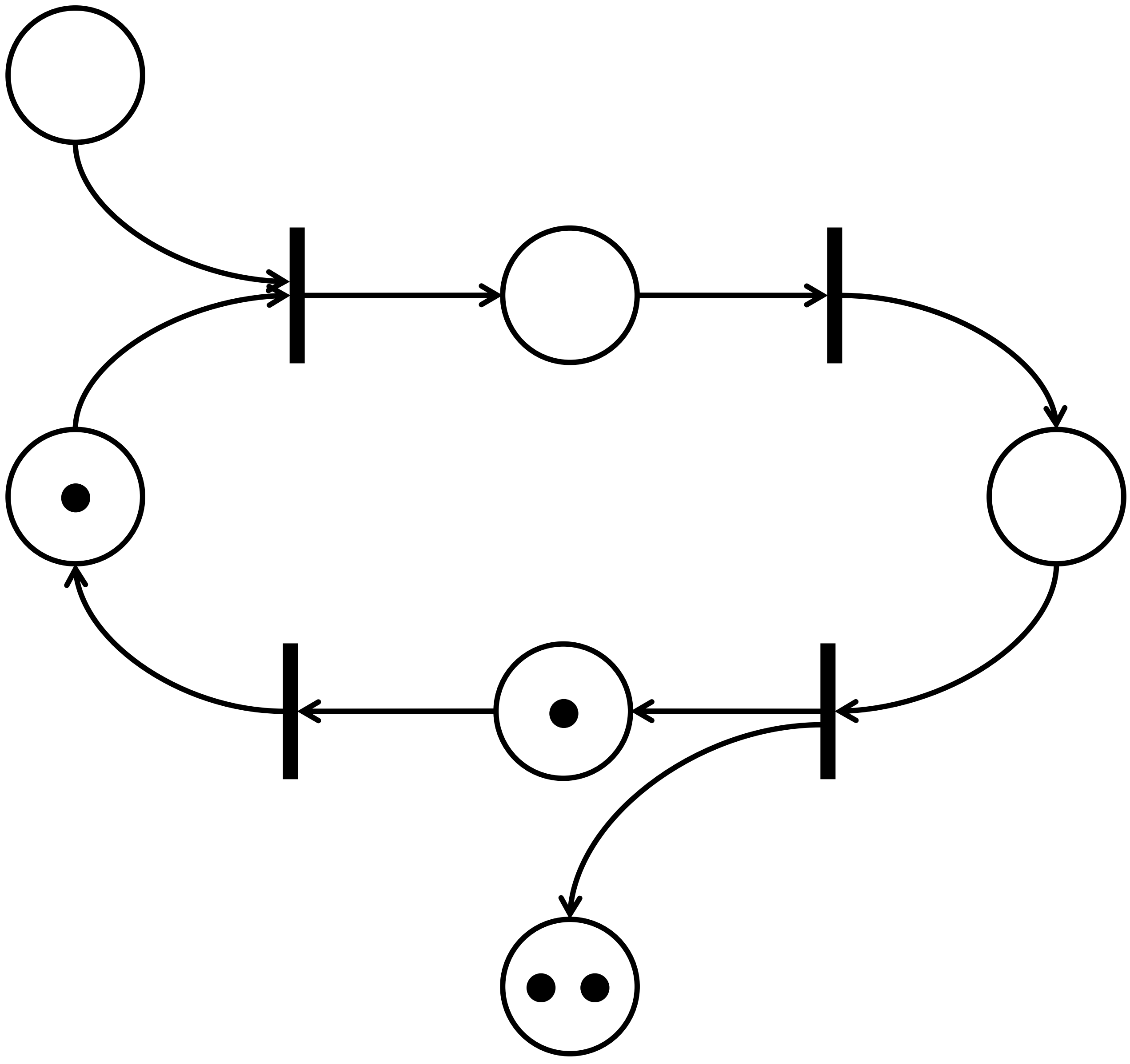
Egyszerű példa a tüzelésekre



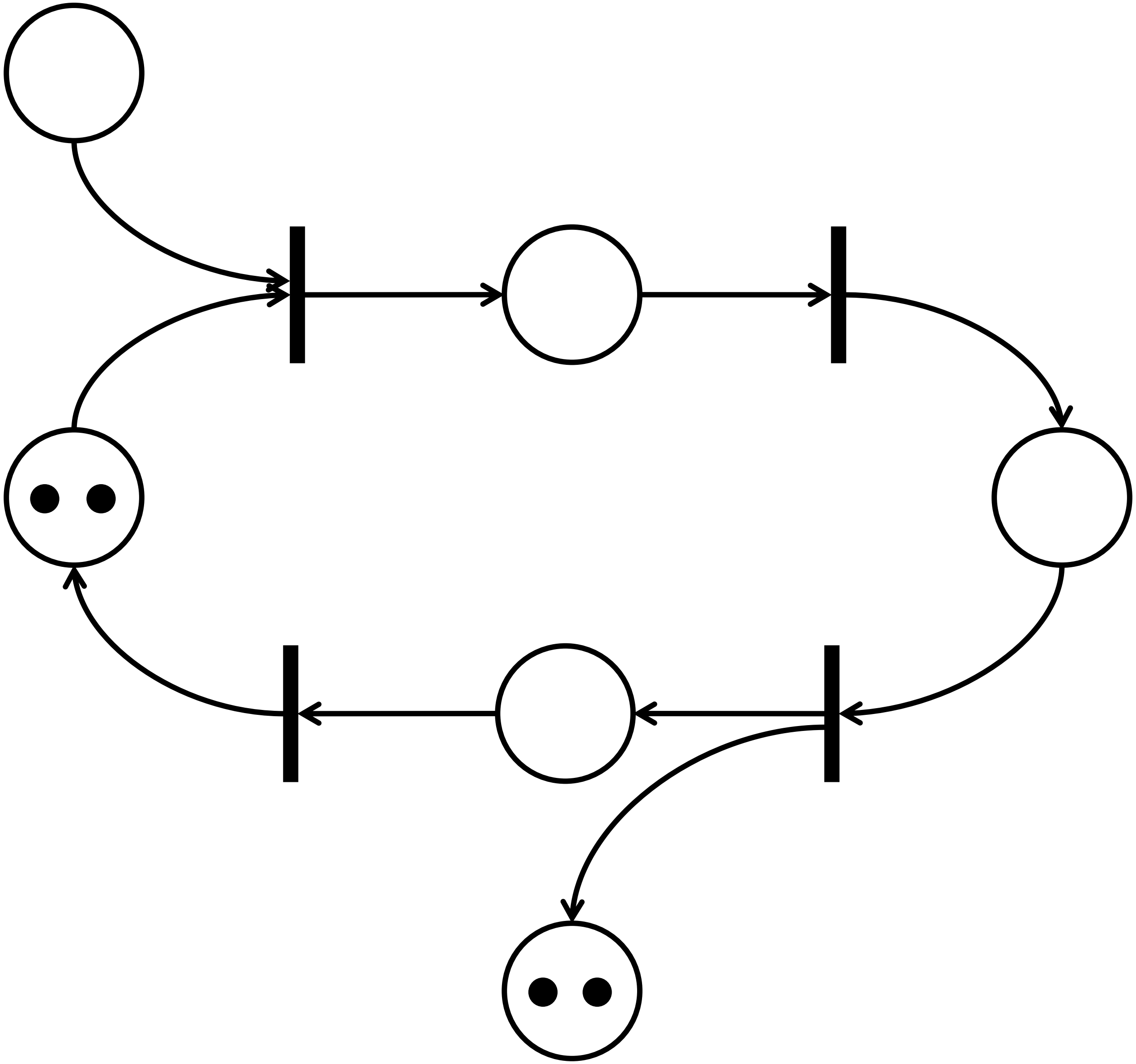
Egyszerű példa a tüzelésekre



Egyszerű példa a tüzelésekre



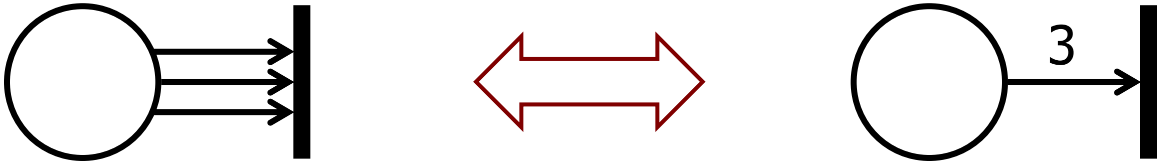
Egyszerű példa a tüzelésekre



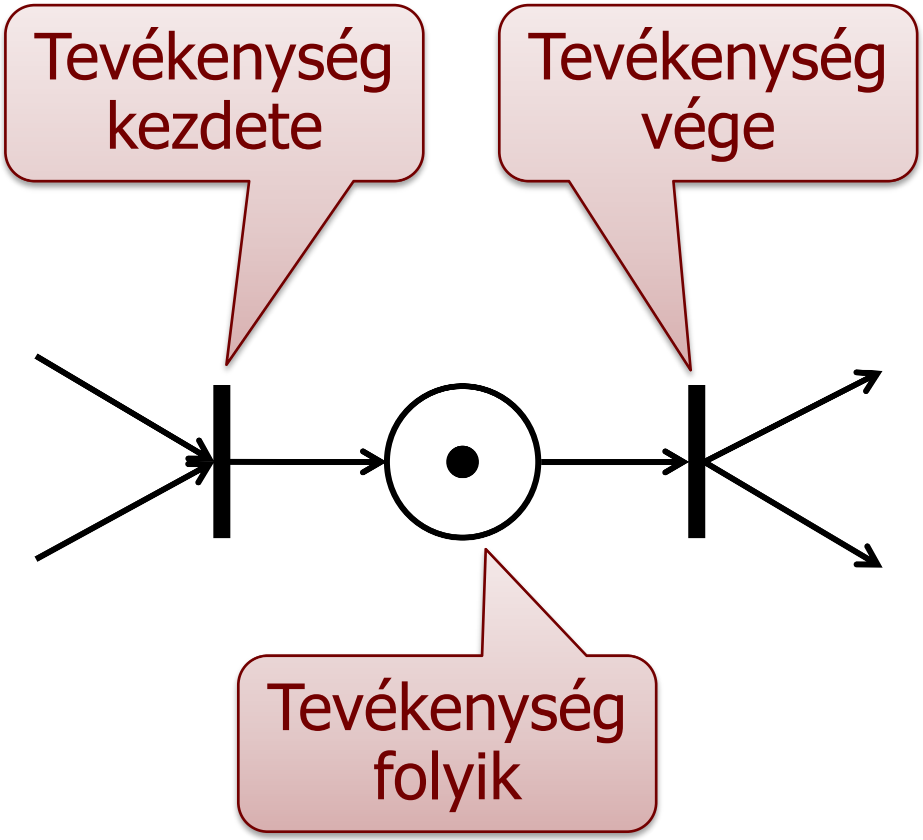
Többszörös élek

Élsúlyok:

- Bármely $e \in E$ élhez $w^*(e) \in \mathbf{N}^+$ élsúlyt lehet rendelni
- A $w^*(e)$ súlyú e él ugyanaz, mint w_e számú párhuzamos él
- Nem rajzolunk párhuzamos éleket, élsúlyt használunk
- Nem szokás feltüntetni az egyszeres élsúlyt

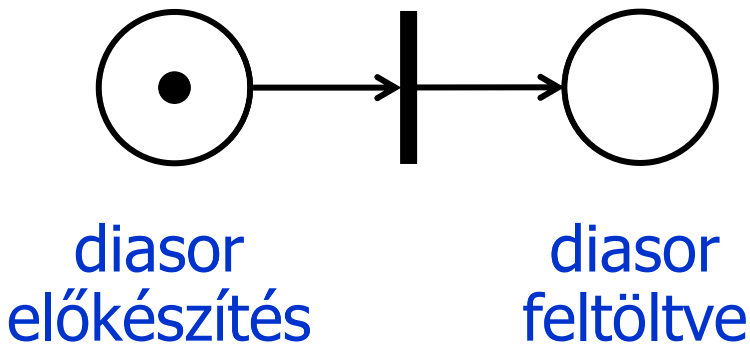


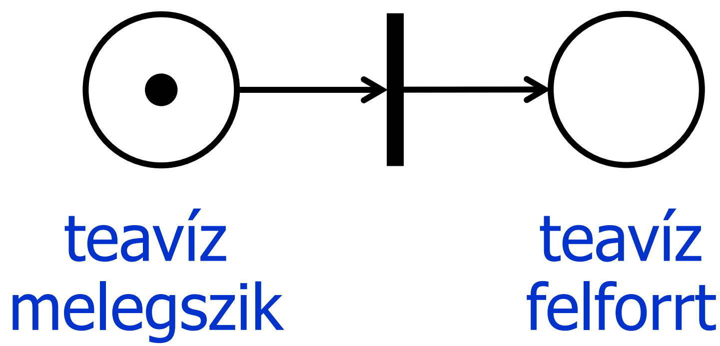
Petri hálók jellemzői



Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események

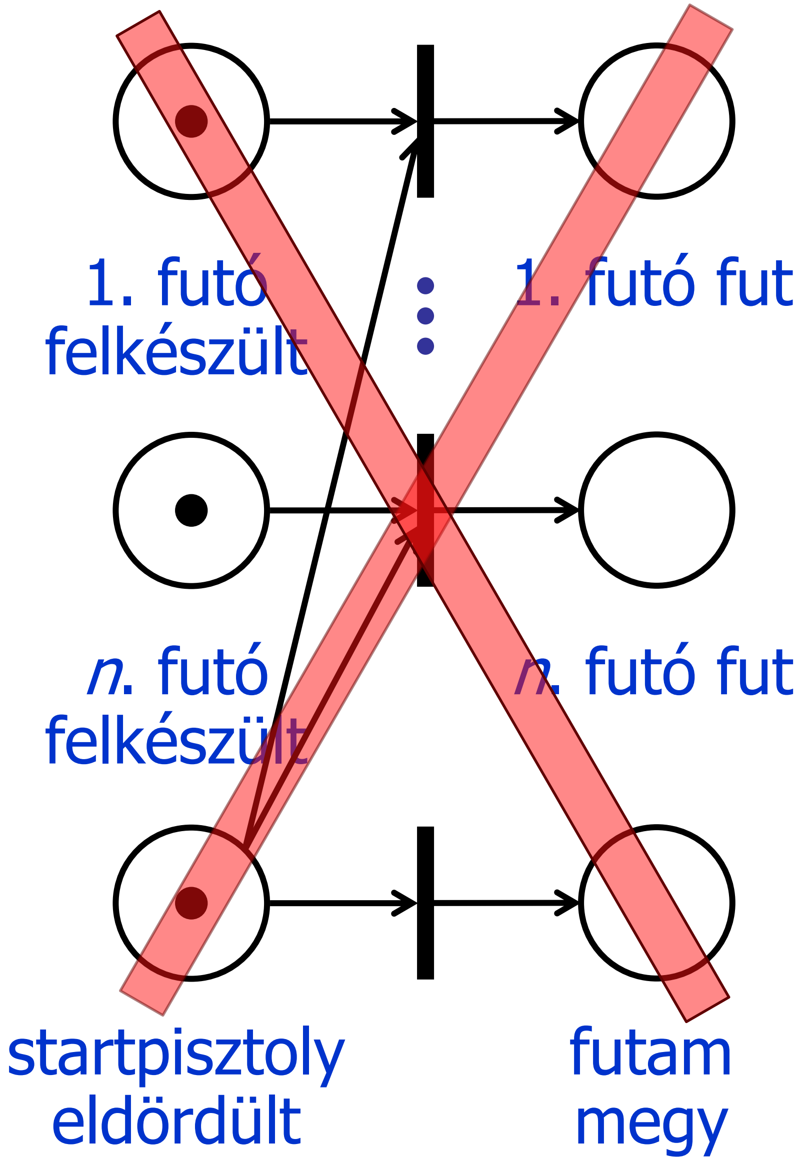
Petri hálók jellemzői

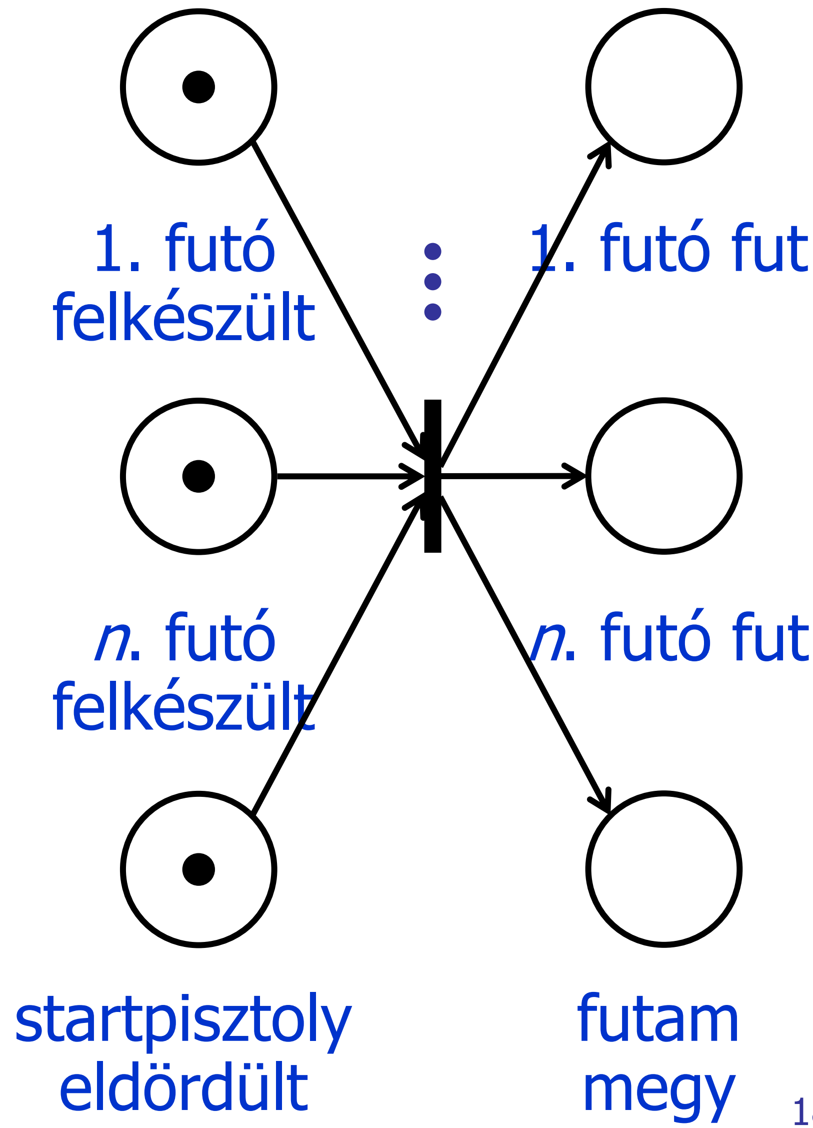




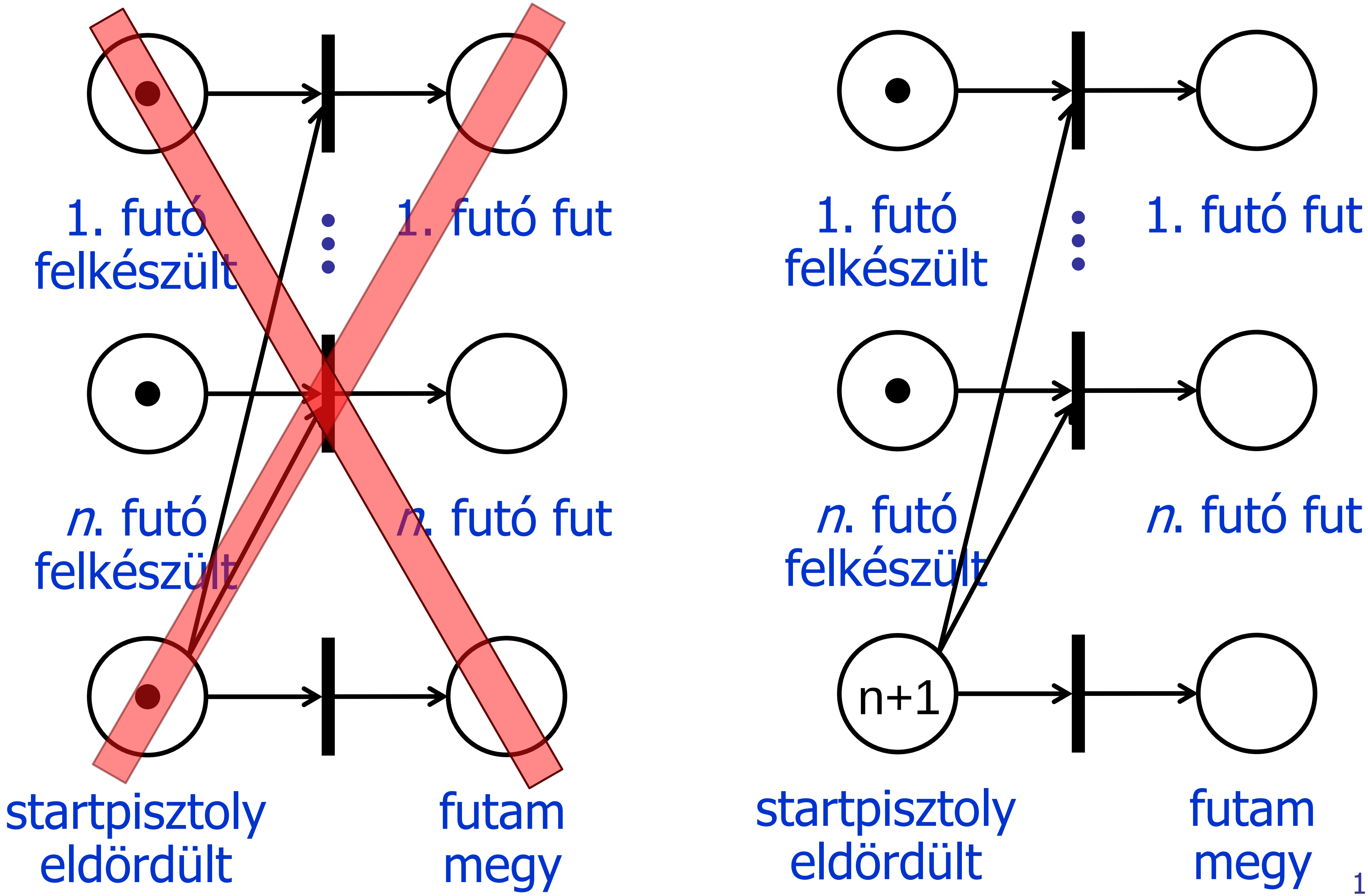
Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események

Példa: Egyidejűség, szinkronizáció

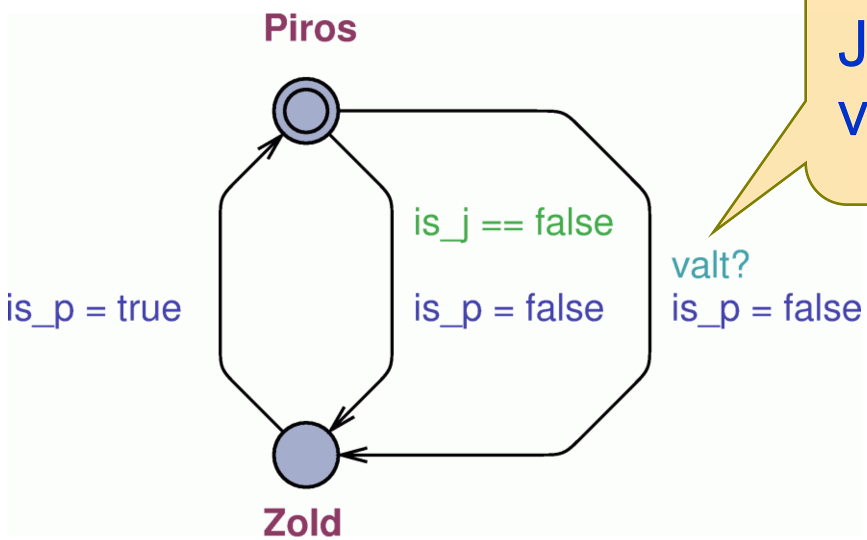




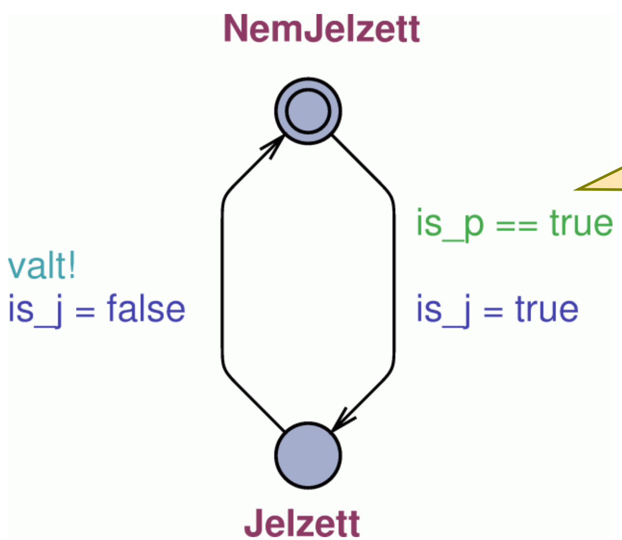
Példa: Egyidejűség, szinkronizáció



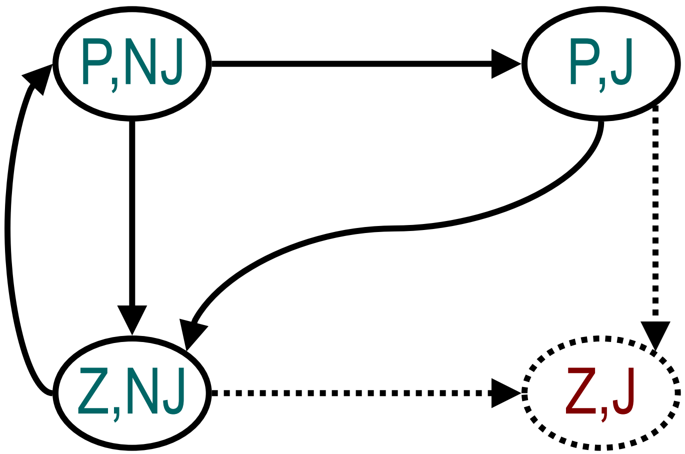
Példa: Gyalogos lámpa jelzőgombbal



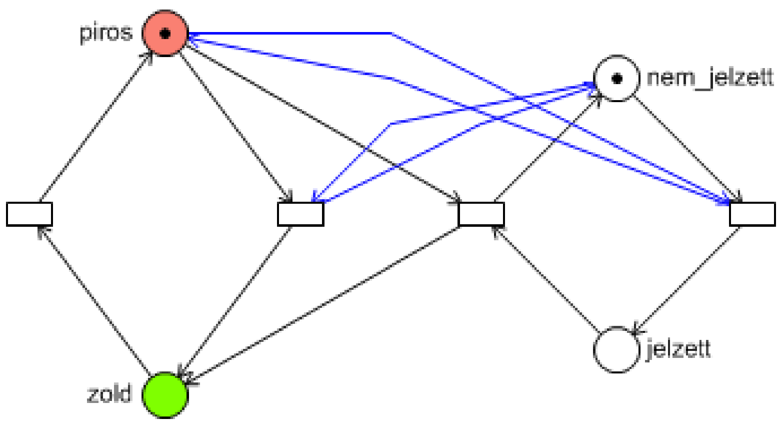
Jelzésre vált



Piros esetén jelez

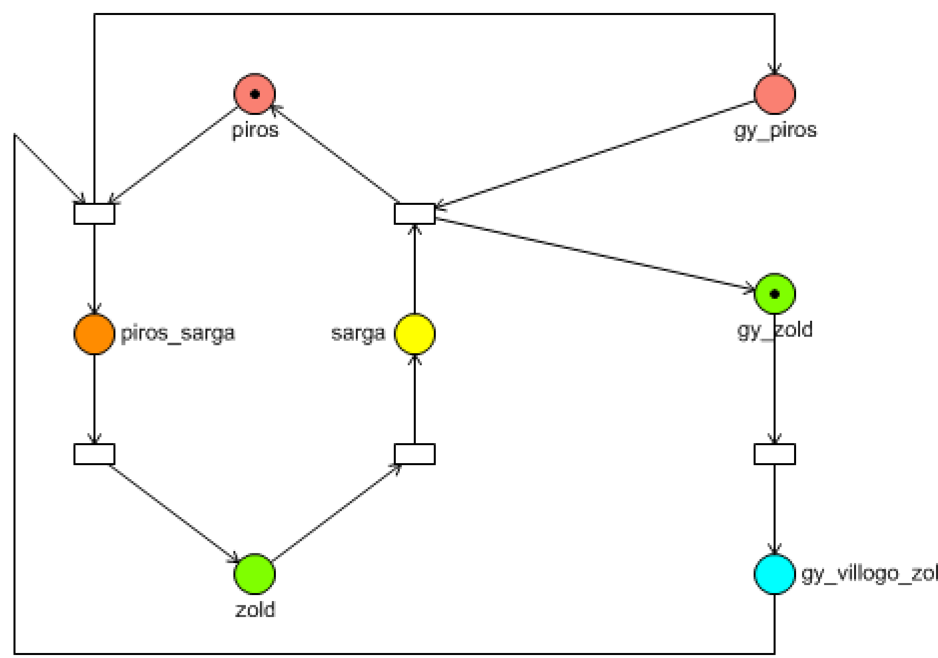


Példa: Gyalogos lámpa jelzőgombbal

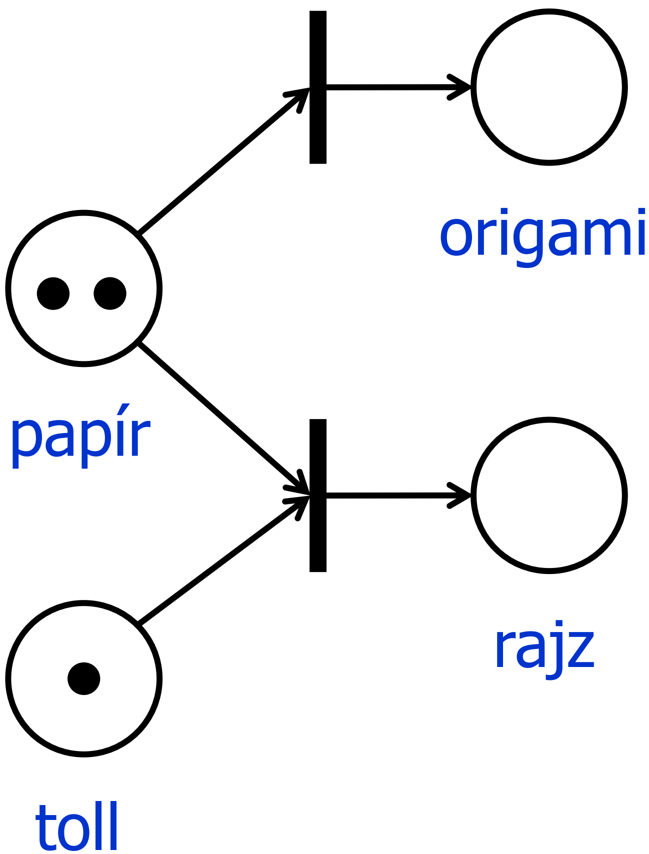


Gyalogos átkelőhely lámpával és nyomógombbal

Kereszteződés forgalmi és gyalogos átkelőhely lámpával

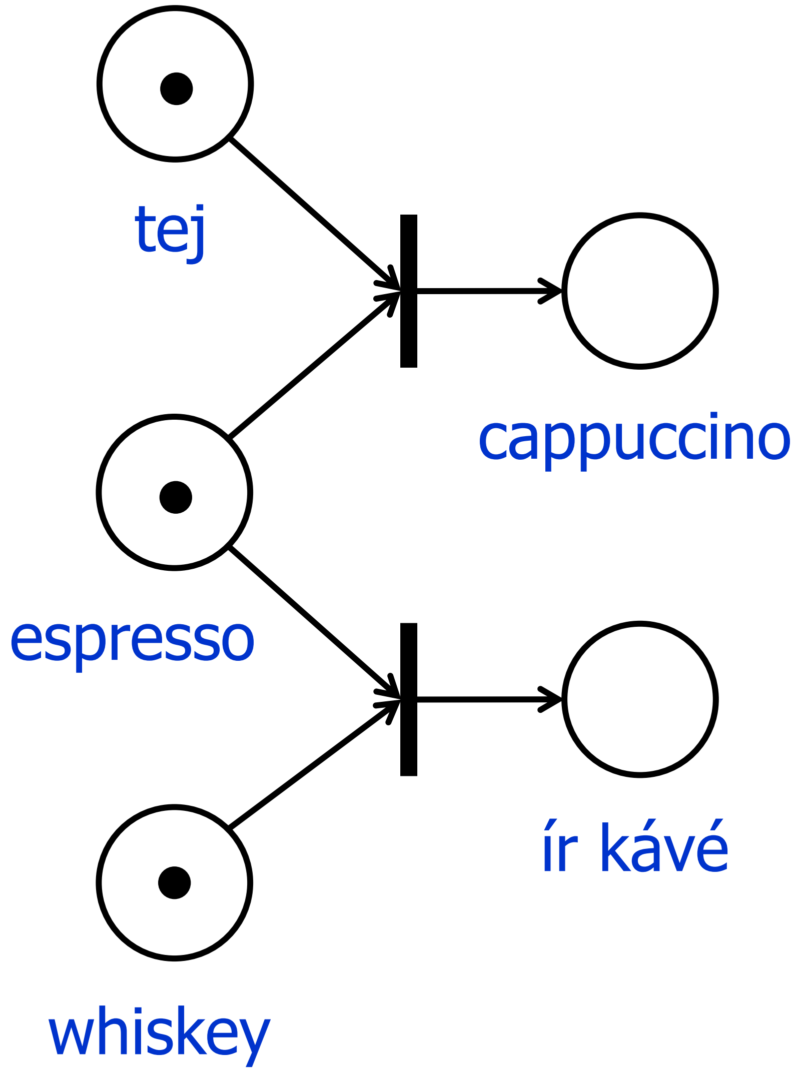


Petri hálók jellemzői



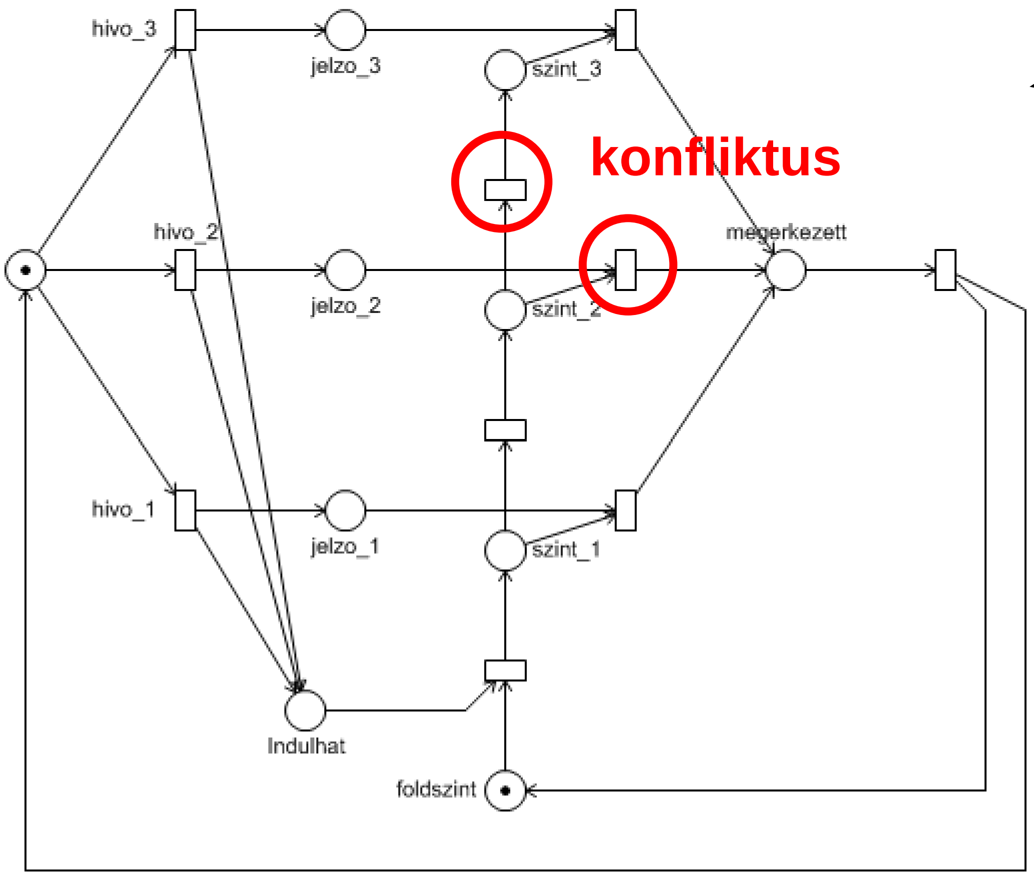
Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali" tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események

Petri hálók jellemzői



Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali" tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események
tranzíciók konfliktusban	kizáró események

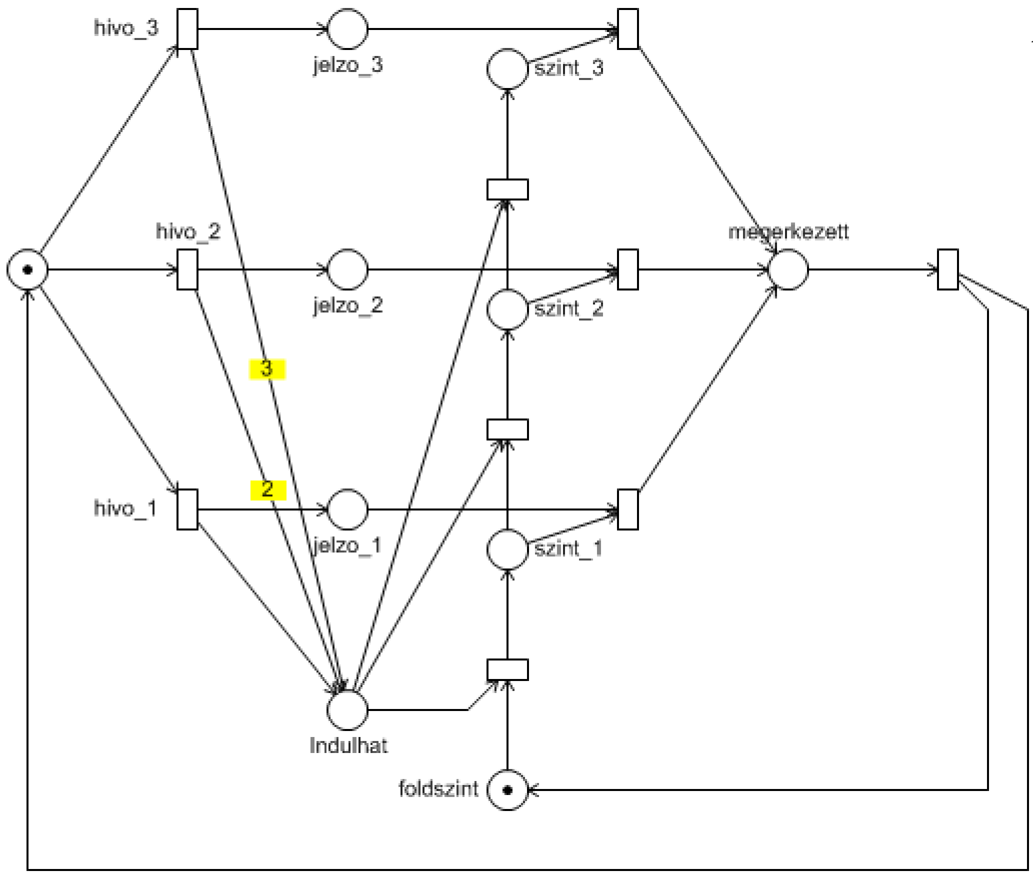
Példa: Konfliktus



Étellift modellje:

- Három szintről hívhatják, az adott szinten megáll
- A modell hibás

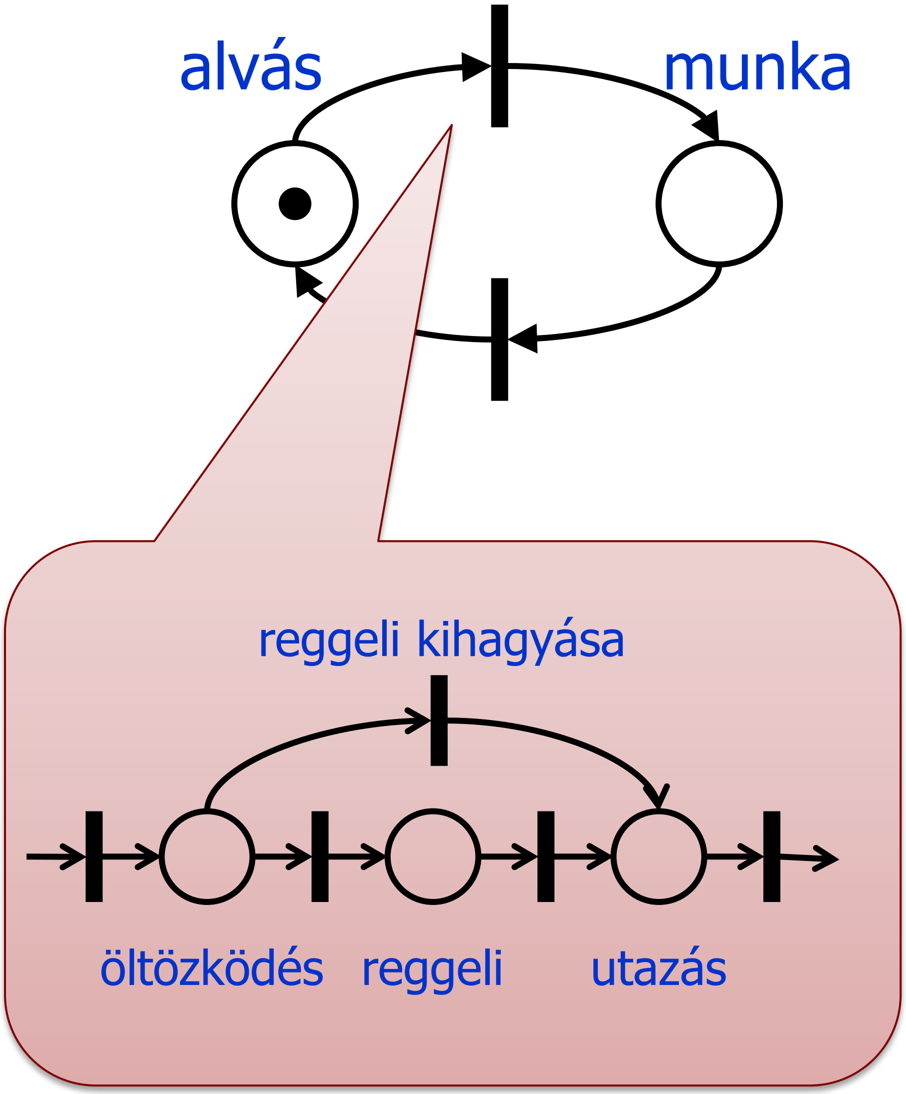
Példa: Konfliktus



A modell javítása:

- Feltétel a továbblépéshez és élsúlyok használata

Petri hálók jellemzői



Petri háló jellemzők	Modellezési tulajdonságok
„azonnali” tüzelések	elemi (atomi) események
aszinkron tüzelések	konkurens / független események
nem-determinizmus	választható események
tranzíciók konfliktusban	kizáró események
elemek finomítása	hierarchikus események

Alapfogalmak összefoglalása

Petri háló:

- Alapelemek: helyek, tranzíciók, élek, tokenek
- Állapot: tokeneloszlás vektor
- Állapot változása: tranzíció tüzelése

Felépítés:

- Tranzíció: állapotváltozást modellez
- Hely: feltétel állapotváltozáshoz
- Petri háló struktúrája: feladat dekompozíciója

Petri hálók formális definíciója

Felépítés összefoglalása

Petri háló (Petri net): $PN = (P, T, E, W, M_0)$

- Helyek (places) $P = \{p_1, p_2, \dots, p_\pi\}$
- Tranzíciók (transitions) $T = \{t_1, t_2, \dots, t_\tau\}$

  $P \cap T = \emptyset$
- Élek (edges) $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Súlyfüggvény (weight) $W : E \rightarrow \mathbf{N}^+$
- Kezdőállapot (initial marking) $M_0 : P \rightarrow \mathbf{N}$

PN struktúra: $N = (P, T, E, W)$

PN adott kezdőállapottal: $PN = (N, M_0)$

Topológia és jelölések

- Helyek és tranzíciók bemeneti és kimeneti elemei:

  $t \in T$ bemeneti helyei: $\bullet t = \{p \mid (p,t) \in E\}$

  $t \in T$ kimeneti helyei: $t\bullet = \{p \mid (t,p) \in E\}$

  $p \in P$ bemeneti tranzíciói: $\bullet p = \{t \mid (t,p) \in E\}$

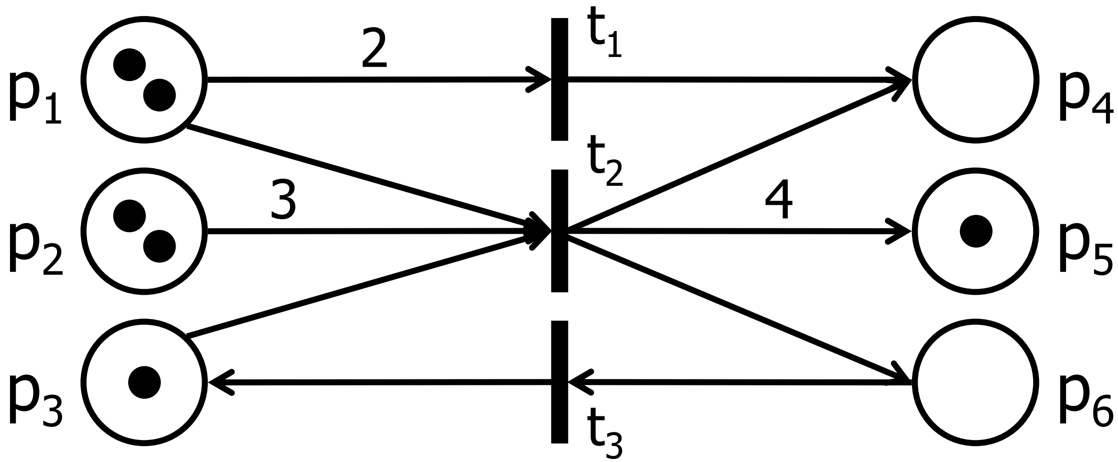
  $p \in P$ kimeneti tranzíciói: $p\bullet = \{t \mid (p,t) \in E\}$

- Csomópontok $P' \subseteq P$ és tranzíciók $T' \subseteq T$ részhalmazára:

$$\bullet P' = \bigcup_{p \in P'} \bullet p \qquad \bullet T' = \bigcup_{t \in T'} \bullet t$$

$$P'\bullet = \bigcup_{p \in P'} p\bullet \qquad T'\bullet = \bigcup_{t \in T'} t\bullet$$

Topológia példa



$\bullet p_1 = \emptyset$

$\bullet p_2 = \emptyset$

$\bullet p_3 = \{t_3\}$

$\bullet p_4 = \{t_1, t_2\}$

$\bullet p_5 = \{t_2\}$

$\bullet p_6 = \{t_2\}$

$p_1\bullet = \{t_1, t_2\}$

$p_2\bullet = \{t_2\}$

$p_3\bullet = \{t_2\}$

$p_4\bullet = \emptyset$

$p_5\bullet = \emptyset$

$p_6\bullet = \{t_3\}$

$\bullet t_1 = \{p_1\}$

$\bullet t_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$

$\bullet t_3 = \{p_6\}$

$t_1\bullet = \{p_4\}$

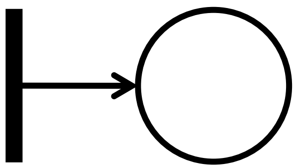
$t_2\bullet = \{p_4, p_5, p_6\}$

$t_3\bullet = \{p_3\}$

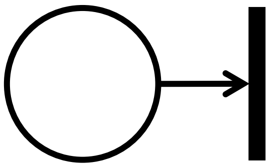
Speciális csomópontok és hálók

Forrás illetve nyelő tranzíciók:

- Egy $t \in T$ forrás tranzíció:
  - Bemenő hely nélküli, azaz $\bullet t = \emptyset$
  - Forrás tranzíció minden esetben tud tüzelni

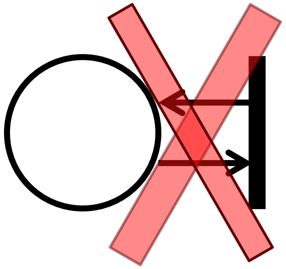


- Egy $t \in T$ nyelő tranzíció:
  - Kimenő hely nélküli, azaz $t \bullet = \emptyset$



Tiszta Petri hálók:

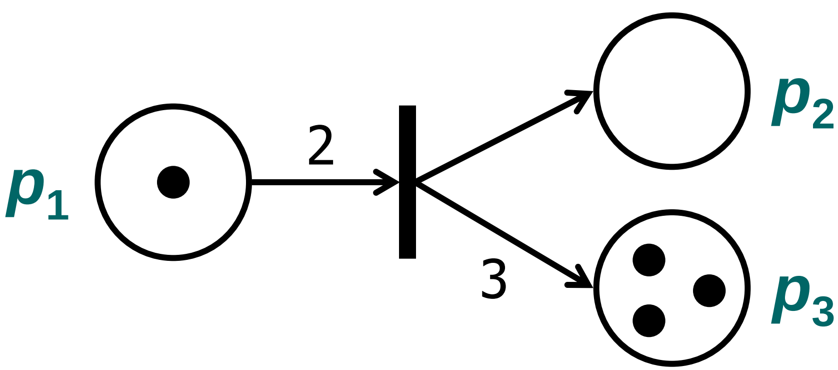
- Egy PN tiszta, ha nincs benne önhurok, azaz $\forall t \in T: \bullet t \cap t \bullet = \emptyset$



Állapotvektor: token eloszlás vektor

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_\pi \end{bmatrix}$$

- Kezdőállapot: M_0 kezdő tokeneloszlás
- Példa:



$$\begin{array}{cc} M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow p_1 \\ \leftarrow p_2 \\ \leftarrow p_3 \end{array} \end{array}$$

Dinamikus viselkedés: Engedélyezettség, tüzelés, állapot trajektória

Dinamikus viselkedés

Petri hálók működésének egy lépése (állapotváltozás):

Tranzíció „tüzelése”

- Eredeti állapot: eredeti tokeneloszlás
- Tüzelés végrehajtása
  1. Engedélyezettség fennállása
  2. Tokenek elvétele a bemeneti helyekről
  3. Tokenek kirakása a kimeneti helyekre
- Új állapot: megváltozott tokeneloszlás

Engedélyezettség feltétele

- Egy $t \in T$ tranzíció engedélyezett, ha minden bemeneti helyét legalább annyi token jelöli, mint onnan a tranzícióba vezető él súlya
  - Azaz egy $t \in T$ tranzíció engedélyezett, ha minden bemeneti helyét legalább $w^-(p,t)$ token jelöli
  - Itt $w^-(p,t)$ a p-ből t-be vezető $e = (p,t)$ él $w(e)$ súlya
- Formálisan felírva:
  - Egy t tranzíció tüzelése engedélyezett, ha

$$\boxed{\forall p \in \bullet t : m_p \geq w^-(p,t)}$$

Tüzelés meghatározása

- Engedélyezett tranzíció „tetszés szerint tüzelhet”
  - Azaz tüzel vagy nem tüzel („fire at will”)
  - Implicit időfogalom: Nincs időzítés, a tüzelés a $[0, \infty)$ időintervallumban bármikor megtörténhet
  - Az időzítetlen Petri háló minden lehetséges konkrét időzítés szerinti viselkedést lefed
- Egyszerre csak egy tranzíció tüzelhet
- Ha több tranzíció engedélyezett:
  - Engedélyezett tranzíciók közül ki kell választani egyet, ami tüzelhet
  - Véletlen választással $\Rightarrow$ Nemdeterminisztikus működés

Az állapotváltozás nagysága

A tranzíció tüzelése:

- Elvesz $w^-(p, t)$ tokent a $p \in \bullet t$ bemeneti helyekről
  - Itt $w^-(p, t)$ nem más, mint a $p \rightarrow t$ él súlya
- Kitesz $w^+(t, p)$ tokent a $p \in t\bullet$ kimeneti helyekre
  - Itt $w^+(t, p)$ nem más, mint a $t \rightarrow p$ él súlya

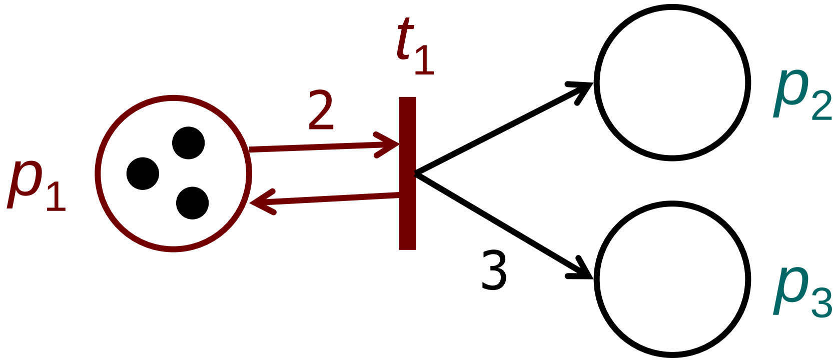
Ha t tranzíció tüzel M állapotban (tokeneloszlással):

- Új állapot: $\boxed{M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t}$
  - ahol e_t a t tranzíciónak megfelelő egységvektor
  - ahol $\mathbf{W}^T$ a transzponált súlyozott szomszédossági mátrix

Súlyozott szomszédossági mátrix

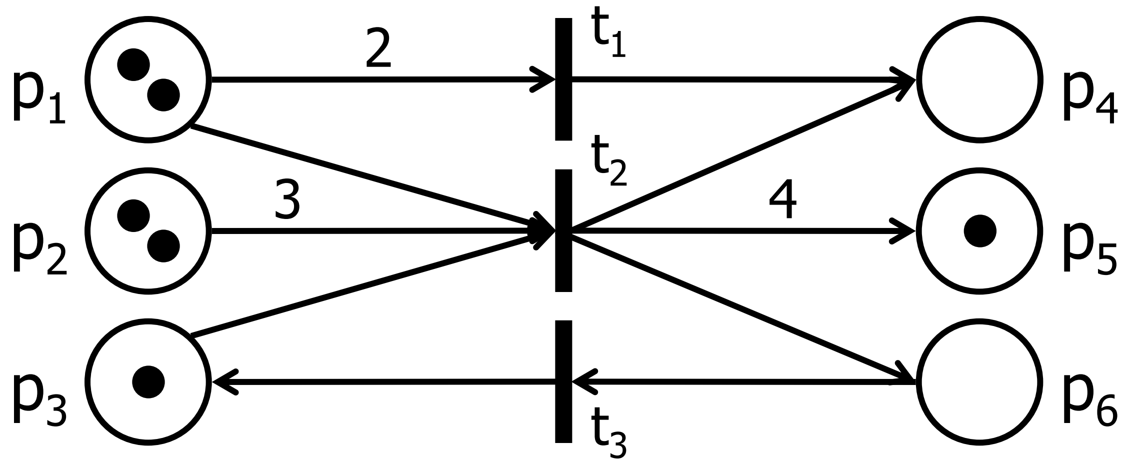
- Súlyozott szomszédossági mátrix: **W** = [w(t, p)]
  - Élsúlyok alapján vehető fel
  - Dimenziója: tranzíciók x helyek, $\tau \times \pi = |T| \times |P|$
- w(t, p) megadja, hogy ha t tüzel, mennyit változik a p -beli tokenszám:

$$w(t, p) = \begin{cases} w^{+}(t, p) - w^{-}(p, t) & \text{ha } (t, p) \in E \text{ vagy } (p, t) \in E \\ 0 & \text{ha } (t, p) \notin E \text{ és } (p, t) \notin E \end{cases}$$



$w(t_1, p_1) =$
$w^{+}(t_1, p_1) - w^{-}(p_1, t_1) =$
$1 - 2 = -1$

Súlyozott szomszédossági mátrix példa



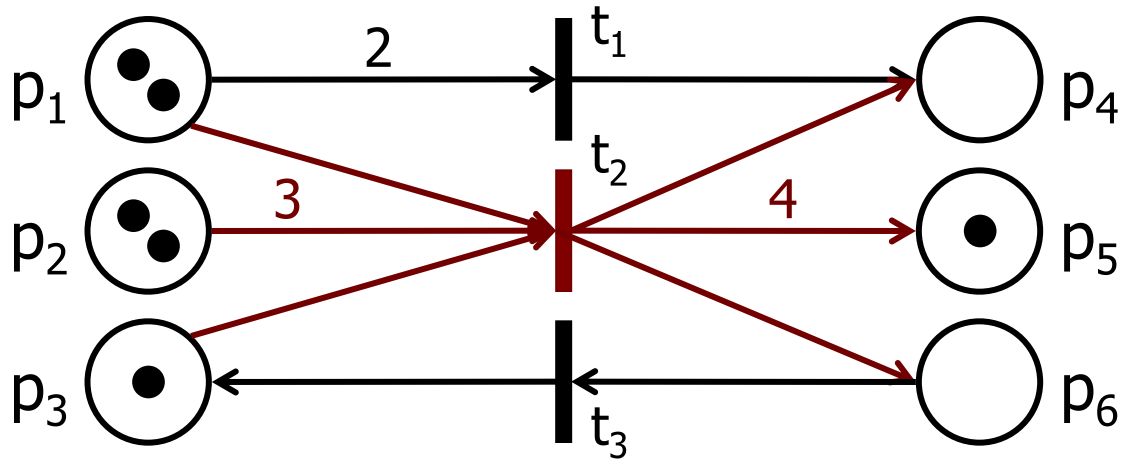
$$W^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W^{-} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W = W^{+} - W^{-}}$$

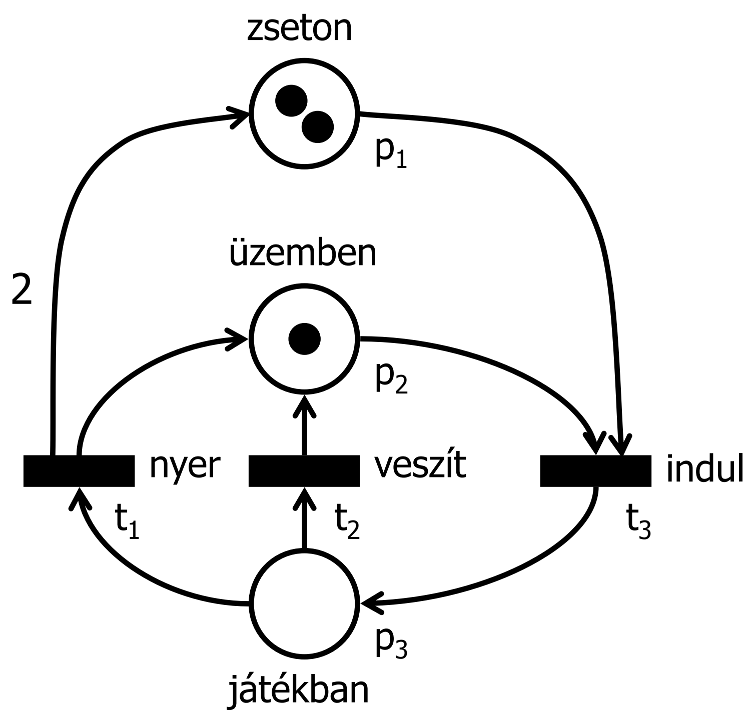
$$W = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \end{array}$$

Súlyozott szomszédossági mátrix példa



$$W = \begin{array}{c|cccccc|c} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \\ \hline & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t_1 \\ & -1 & -3 & -1 & 1 & 4 & 1 & t_2 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & t_3 \end{array}$$

Példa: Egy tranzíció tüzelése



Állapotváltozás:

$$M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

t_3 tranzíció tüzelése a fenti kezdőállapotból:

$$\mathbf{M'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tüzelési szekvencia

- Állapotátmeneti trajektória
  - Egymást követő tüzelések hatására felvett állapotok
- Tüzelési szekvencia

$$\underline{\sigma} = \langle M_{i0}\ t_{i1}\ M_{i1} \ldots t_{in}\ M_{in} \rangle \text{ vagy } \underline{\sigma} = \langle t_{i1} \ldots t_{in} \rangle$$

- Ha az összes tranzíció kielégíti a tüzelési szabályt:

M_{in} állapot M_{i0}-ból elérhető a $\underline{\sigma}$ tüzelési szekvencia által:

$$M_{i0}\ [\underline{\sigma} >\ M_{in}$$

Kiterjesztett Petri hálók:
A tüzelési szemantika módosítása

Petri hálók kiterjesztései

Célok:

- Modellezési erő növelése
- A működés nemdeterminizmusának korlátozása

A formalizmus kiterjesztései:

- Kapacitáskorlát rendelése a helyekhez
- Tiltó élek használata
- Prioritás rendelése a tranzíciókhoz

Helyek kapacitáskorlátja

- Idáig: végtelen kapacitású helyek
  - Nincs korlátozva a tokenek száma egy-egy helyen
  - Végtelen kapacitások, erőforrások megjelenítése
    - Pl. „futó” hely jelölése nem korlátozott: tetszőleges számú processz lehet futó állapotban
- Véges kapacitású Petri-háló
  - Minden p helyhez opcionálisan K(p) kapacitás: Az adott helyen elhelyezhető tokenek maximális száma
  - Véges erőforrások megjelenítése
    - Pl. „futó” hely kapacitása: a futó állapotban lévő processzek maximális száma

Tüzelés véges kapacitású Petri hálóban

- Egy $t \in T$ tranzíció tüzelése akkor engedélyezett, ha
  1. Elegendő token van a bemeneti helyeken:

     $$\forall p \in \bullet t: \quad m_p \geq w^-(p, t)$$

  2. Fennáll a kapacitáskorlát tüzelés után:

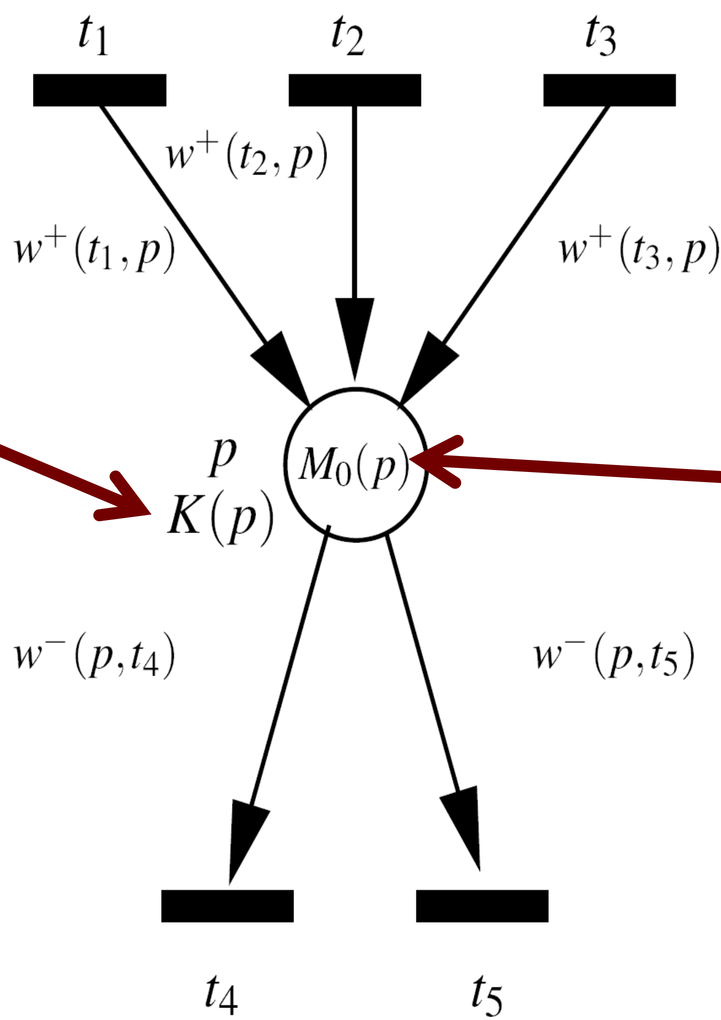
     $$\forall p \in t\bullet: \quad m'_p = m_p + w(t, p) \leq \mathbf{K(p)}$$

     azaz a tranzíció tüzelése egyetlen kimenő p helyre sem juttathat a hely K(p) kapacitásánál több tokent
- Engedélyezett tranzíció tetszés szerint tüzelhet
- A tüzelés után: $\forall p \in P: \; m'_p = m_p + w^+(t, p) - w^-(p, t)$

Korlátos kapacitású hely

El lehet-e kerülni a kapacitáskorlát bevezetését a p hely esetén?

Kapacitáskorlát a p hely esetén



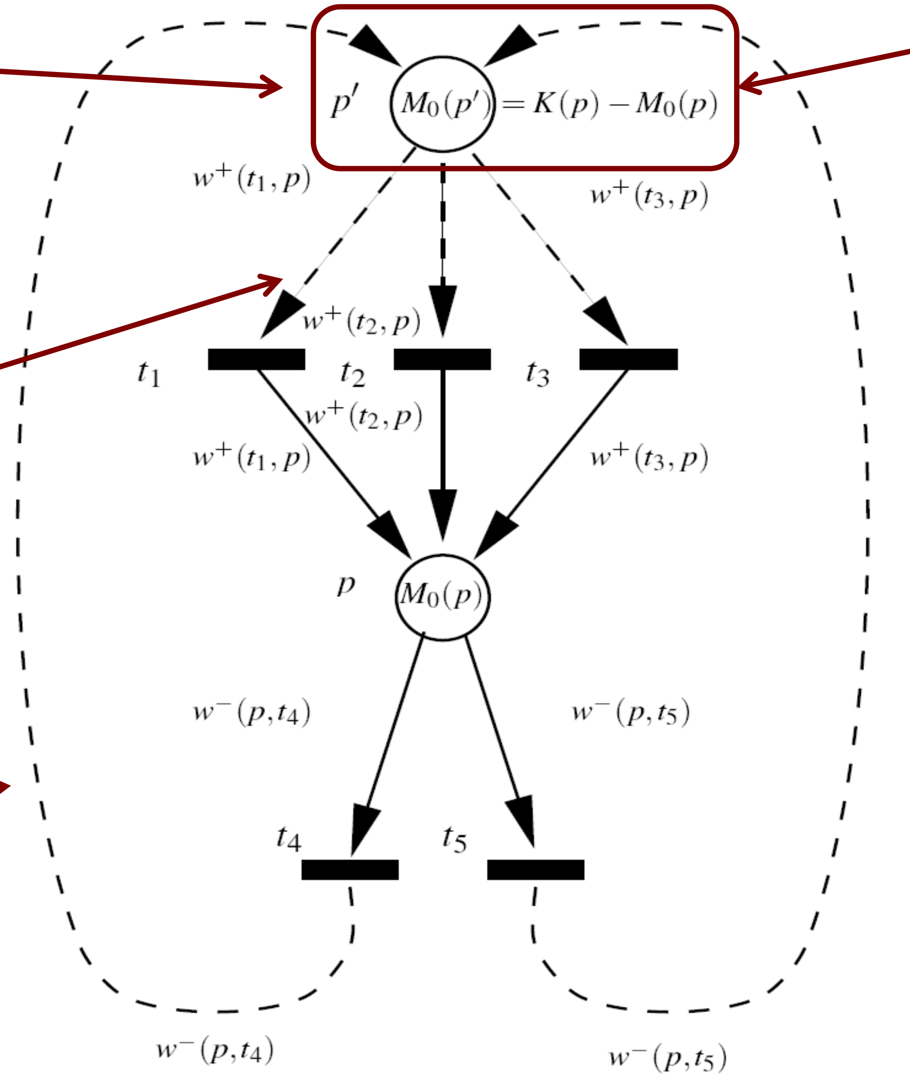
Kezdő jelölés a p hely esetén

Ekvivalens végtelen kapacitású háló (tiszta PN)

Csak akkor rakható a p helyre token, ha a kihasználatlan kapacitás megengedi.

Az odarakott tokenek csökkentik a kihasználatlan kapacitást.

A levett tokenek növelik a kihasználatlan kapacitást.



Adminisztrációs hely: Kihasználatlan kapacitás

Annyi token rakható a p helyre, amennyit a kapacitáskorlát és a kezdő jelölés különbsége (azaz a kihasználatlan kapacitás) megenged.

Kiegészítő helytranszformáció 1/2

Kiegészítő helytranszformáció:

- Véges kapacitású Petri hálóból ekvivalens működésű nem véges kapacitású háló képzése

Tiszta Petri hálók esetén a transzformáció menete:

- Minden egyes véges kapacitású p helyhez
  - Rendeljünk hozzá egy járulékos p′ adminisztrációs helyet
  - A p′ adminisztrációs hely kezdőállapota legyen

$$M_0(p') = K(p) - M_0(p)$$

azaz a p hely még kihasználatlan kapacitása

Kiegészítő helytranszformáció 2/2

- Kiegészítő éleket húzunk be a p’ hely és a $t \in \bullet p \cup p \bullet$ tranzíciók között
- Az élek iránya attól függ, hogy t tüzelése növeli vagy csökkenti-e a p helyen levő tokenek számát:
  - Ha $w(t, p) < 0$, azaz a tüzelés elvesz tokent a p helyről, akkor a t tranzíció és p’ hely között (t, p’) élet húzunk be $|w(t, p)|$ súllyal
  - Ha $w(t, p) > 0$, azaz a tüzelés berak tokent a p helyre, akkor a p’ hely és a t tranzíció között (p', t) élet húzunk be $w(t, p)$ súllyal

A transzformált háló ekvivalenciája

- Belátható, hogy a kiegészítő helytranszformáció az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:
  - Ha van egy (N, M_0) tiszta, véges kapacitású Petri háló, és alkalmazzuk rá a szigorú tüzelési szabályt (azaz a kapacitáskorlát figyelembevételét),
  - valamint van a fenti transzformáció által létrehozott (N', M'_0) társhálója ennek a Petri hálónak, amelyben a szokásos (gyenge) tüzelési szabályt alkalmazzuk,
  - akkor a két háló tüzelési szekvenciái azonosak.

Tiltás és a tiltó él bevezetése

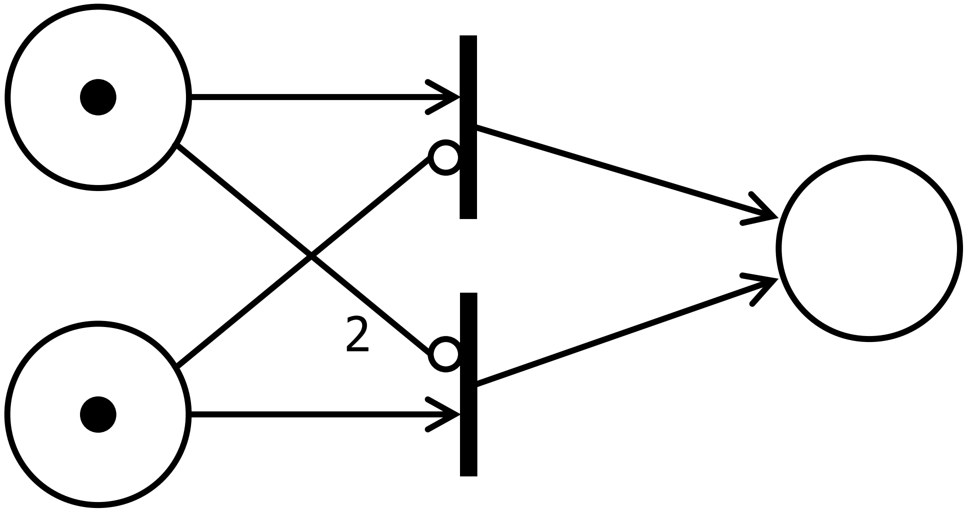
- Klasszikus PN
  - „Ponált” tüzelési feltételek: A tüzelés a feltétel megléte (bemeneti hely jelölése) esetén hajtódjon végre, a feltétel teljesülése vizsgált
- Tiltás kifejezése
  - „Negált” tüzelési feltétel: A tüzelés a feltétel megléte esetén ne hajtódjon végre
  - A bemenő helyeken lévő feltétel negáltja vizsgált
  - Modell kiterjesztése: tiltó él ← jelölés: kör az él végén
- Tiltó élek használata
  - A Petri hálók kifejezőerejét növelik (Turing gép szintjére)
  - De az analízist bonyolultabbá teszik

Tüzelési szabály tiltó él esetén

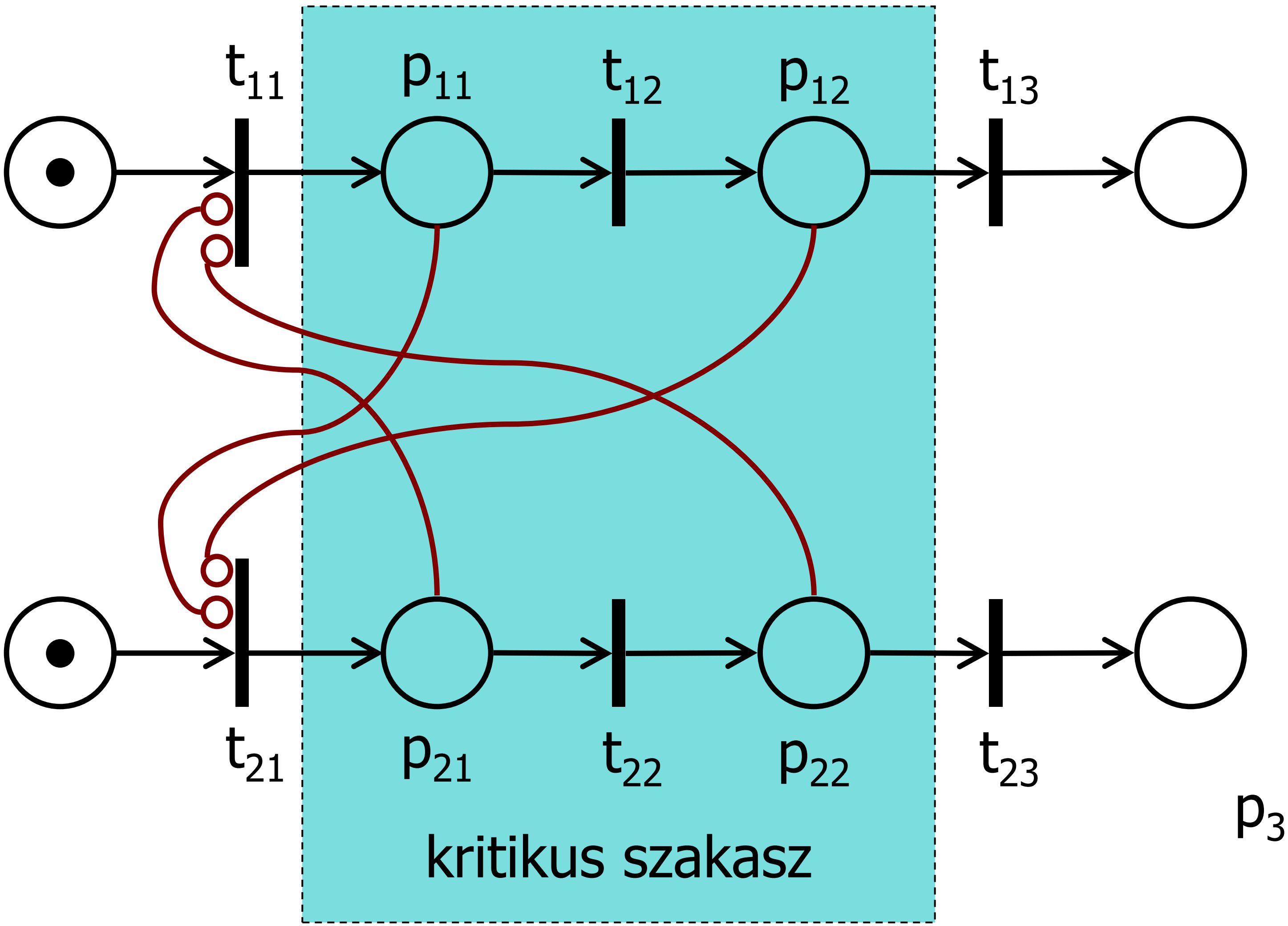
- Tüzelési szabály kiegészítése:

  Ha a t tranzícióhoz kapcsolódó bármely (p, t) tiltó él p bemenő helyén a $w^{-}(p, t)$ élsúlynál nagyobb vagy egyenlő számú token van,

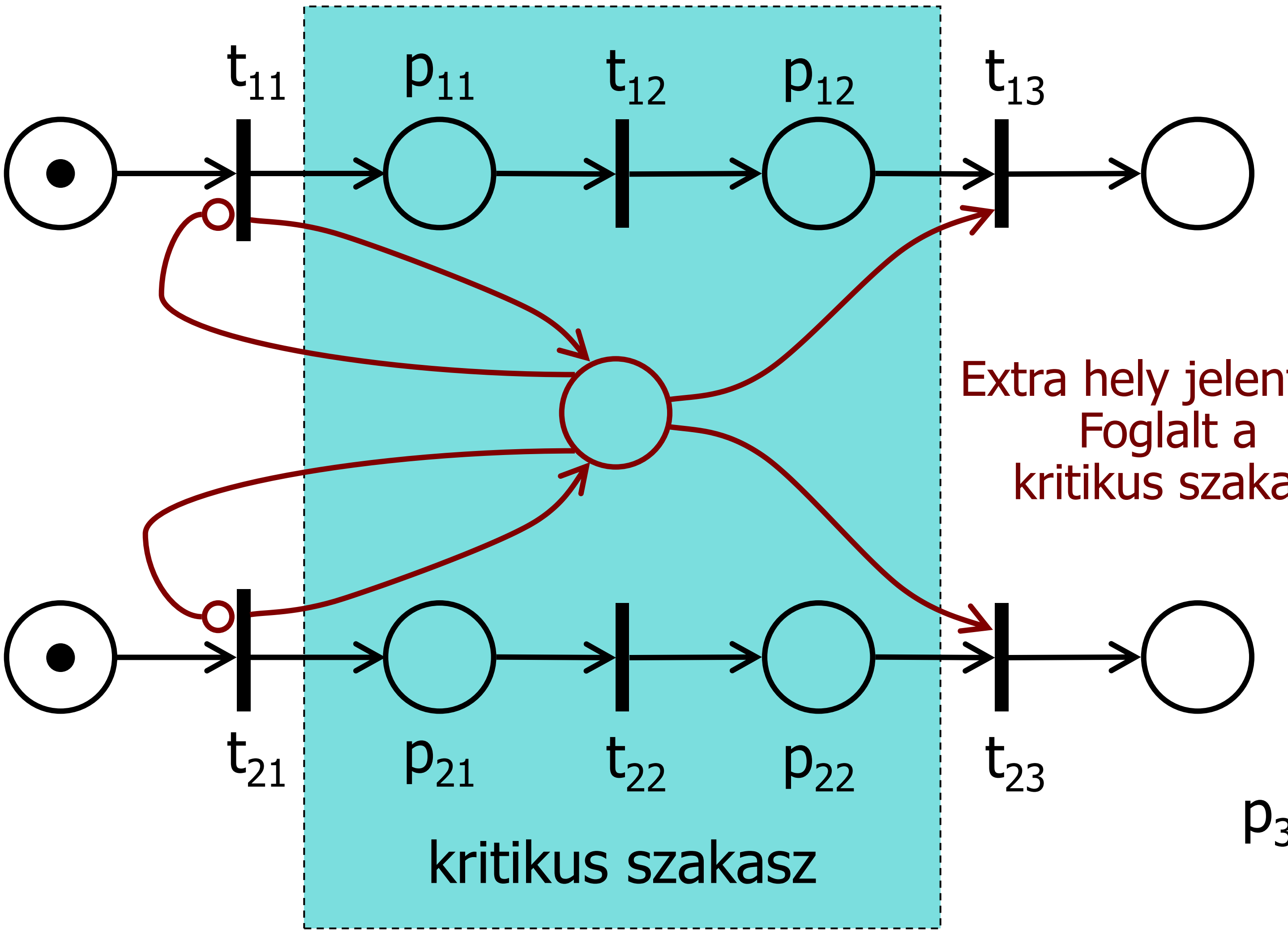
  akkor a tüzelés nem hajtható végre



Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élekkel

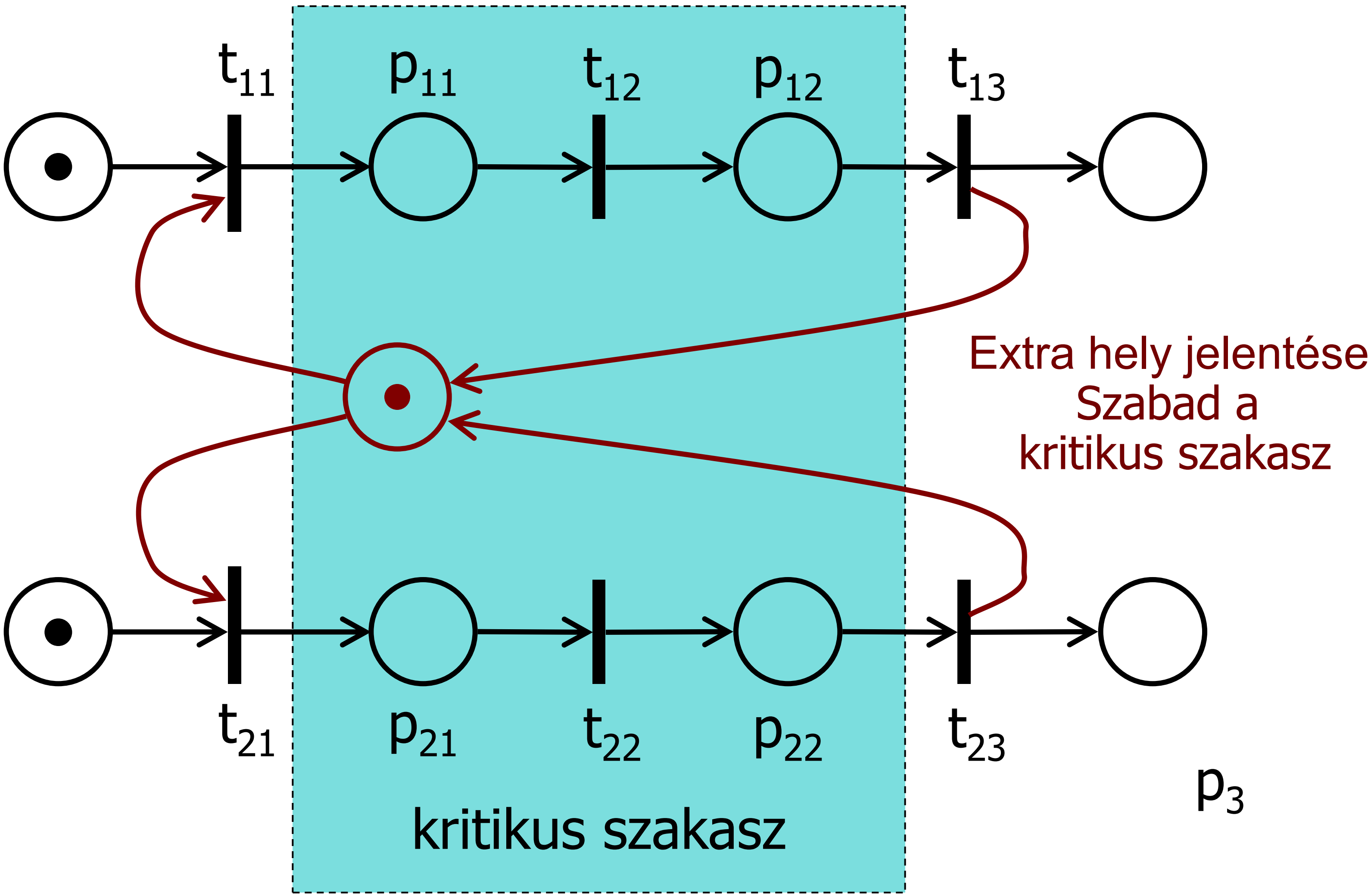


Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élekkel, elegánsabban



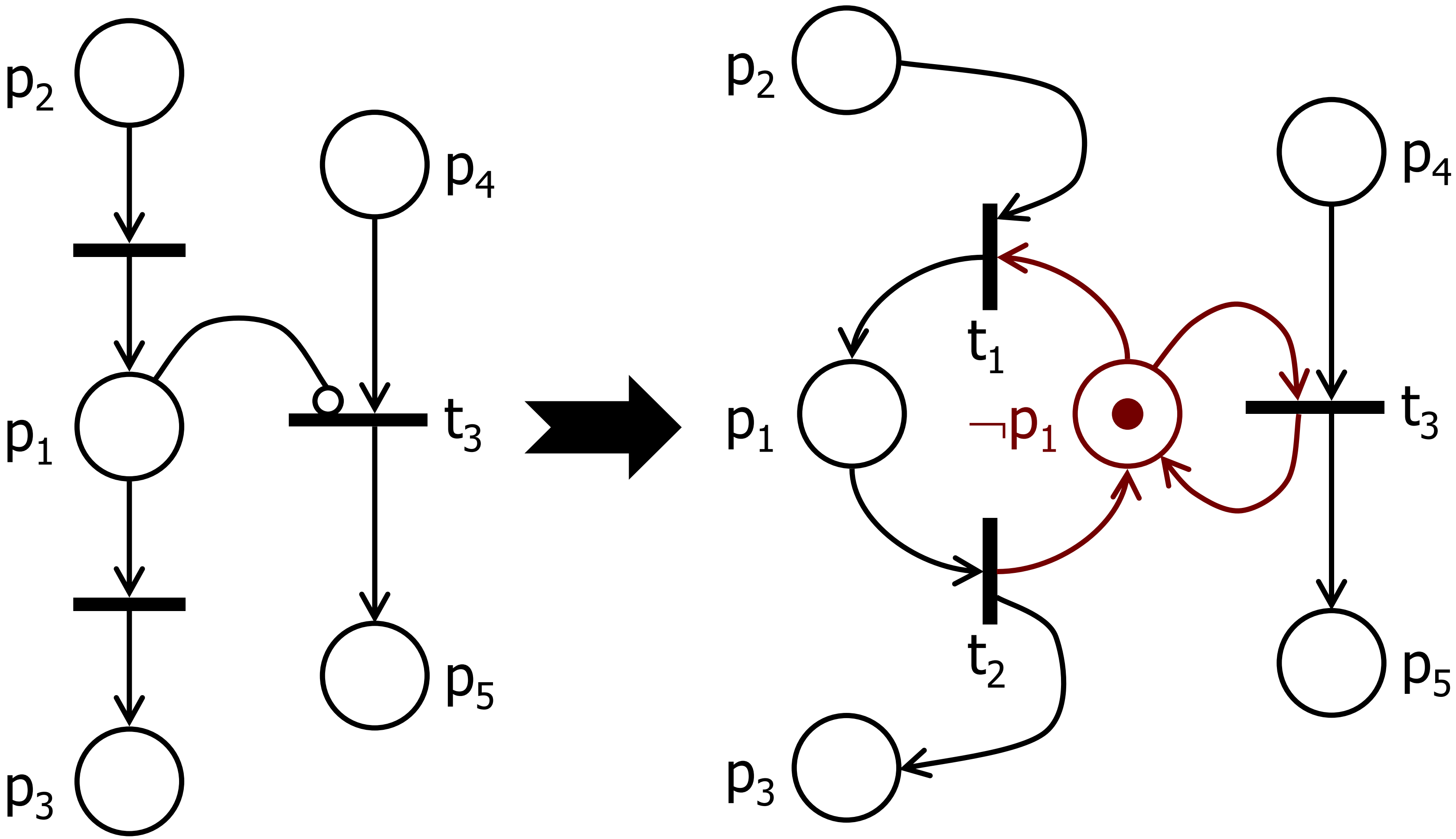
Extra hely jelentése:
Foglalt a
kritikus szakasz

Példa: Kölcsönös kizárás tiltó élek nélkül



Tiltó él kiváltása egyszerű esetben

Nem általánosan használható megoldás (itt: egyszerű logikai feltételre)



Prioritás bevezetése

- Egyszerre engedélyezett tranzíciók: melyik tüzeljen?
  - Nemdeterminisztikus választás helyett prioritás legyen
- Kiterjesztés: Tranzíciókhoz rendelt prioritás
- Tüzelési szabály módosítása:
  - Az engedélyezett tranzíciók közül egy alacsonyabb prioritású mindaddig nem tüzelhet, amíg van engedélyezett ÉS magasabb prioritású tranzíció
  - Prioritási szinten belül továbbra is nemdeterminisztikus a választás!

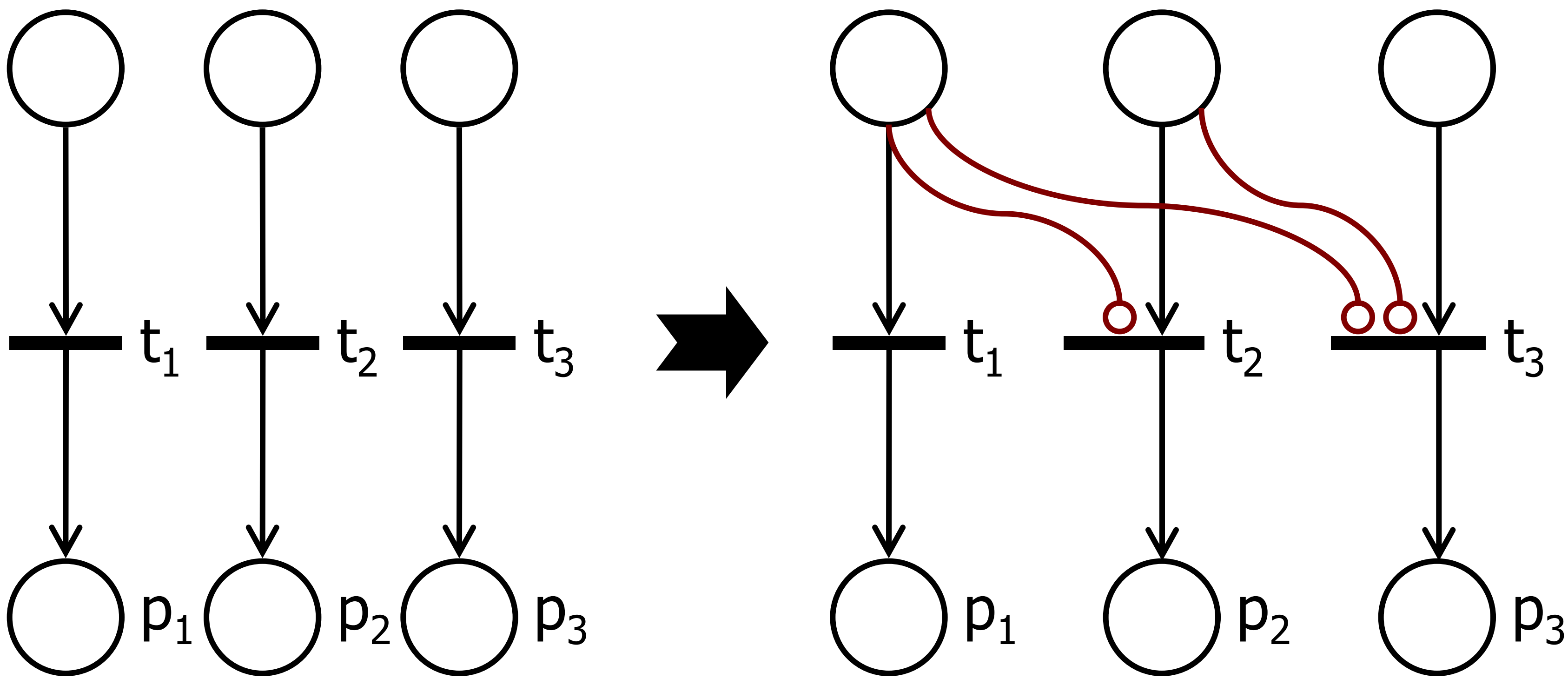
Bővítések a formális definícióban

Petri háló (PN): $PN = \langle P, T, \Pi, E, H, W, M_0 \rangle$

- Helyek: $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_\pi\}$
- Tranzíciók: $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_\tau\}$

  $P \cap T = \varnothing$
- Prioritások: $\Pi : T \to \mathbf{N}$
- Normál élek: $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Tiltó élek: $H \subseteq (P \times T)$
- Súlyfüggvény: $W: E \to \mathbf{N}^+$
- Kezdőállapot: $M_0 : P \to \mathbf{N}$

Ötlet: Prioritás helyett tiltó él?

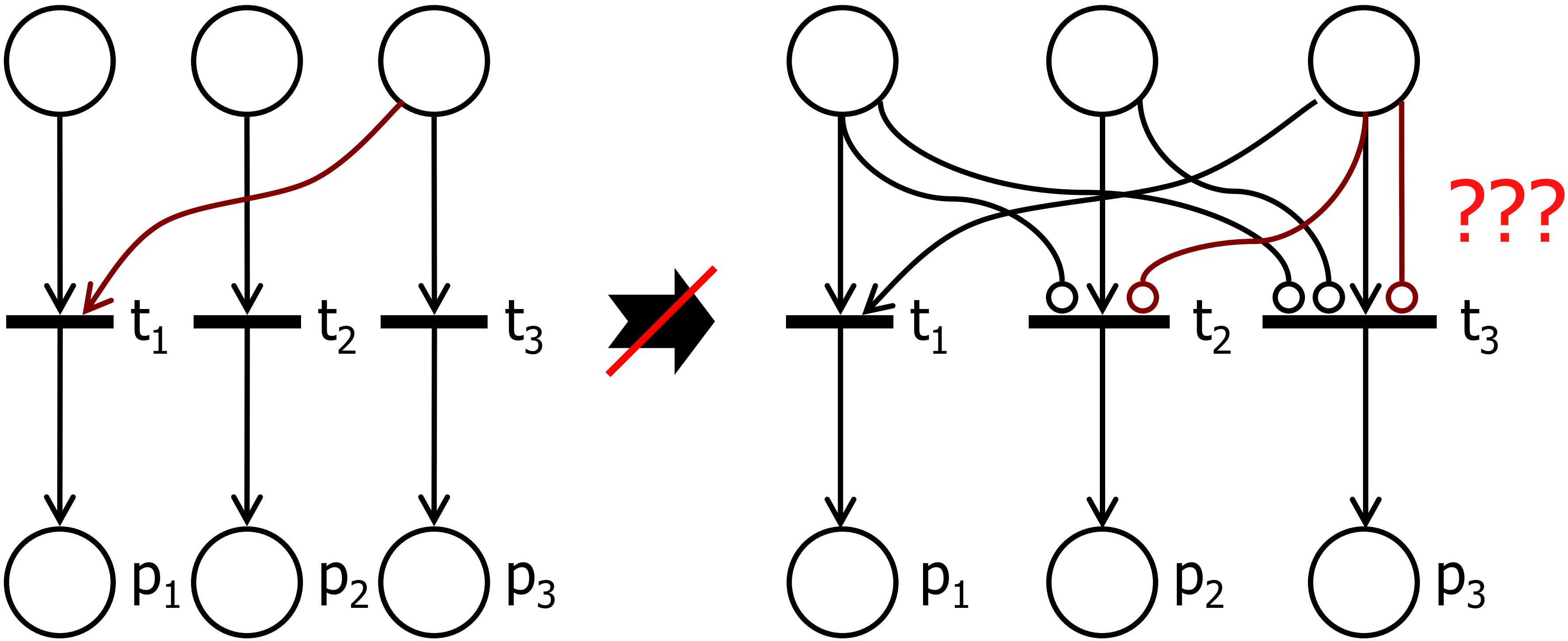


$\pi_1 > \pi_2 > \pi_3$

Ötlet: „Nagyobb prioritású tranzíció bemenő helyeiről tiltó éleket húzunk a kisebb prioritású tranzíciókhoz."

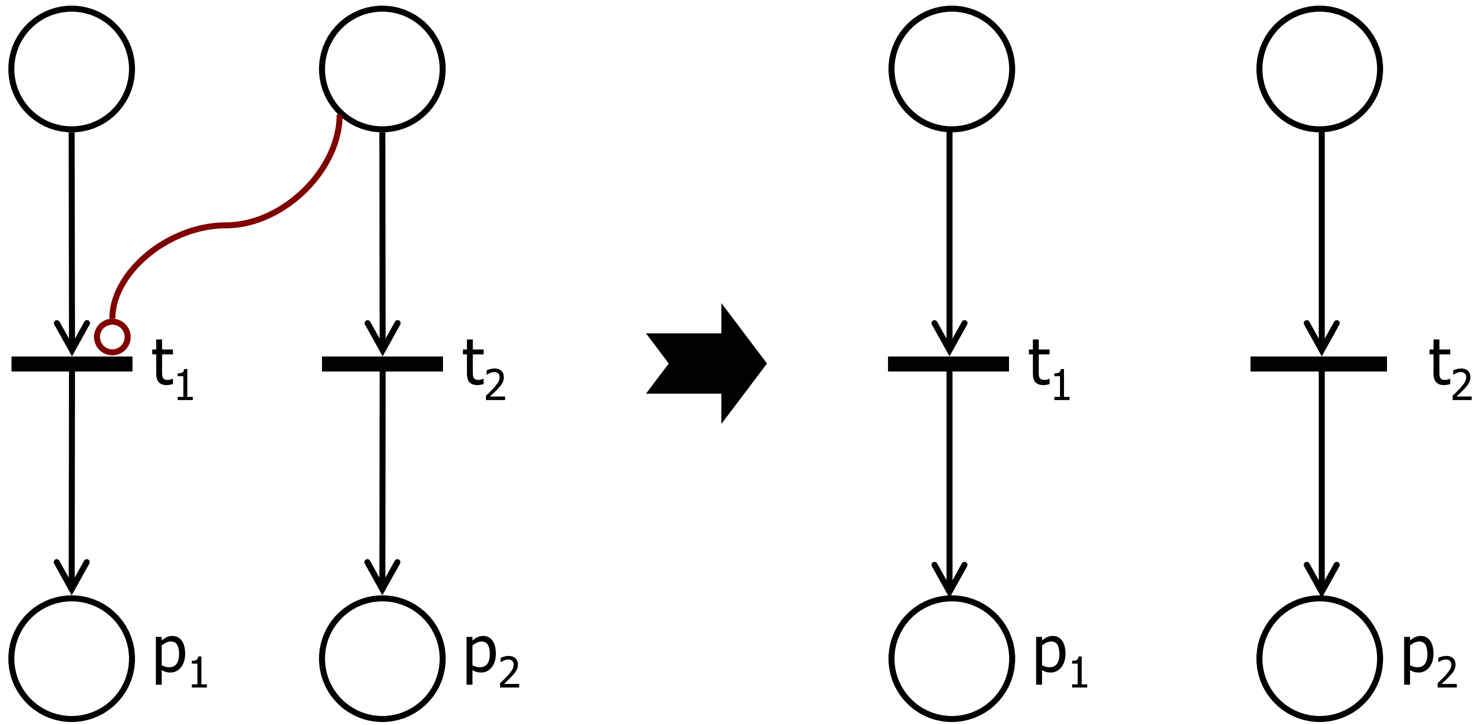
Mennyire általános érvényű ez a konstrukció?

Prioritás helyett tiltó él: nem általános érvényű



$\pi_1 > \pi_2 > \pi_3$

Ötlet: Tiltó él helyett prioritás?

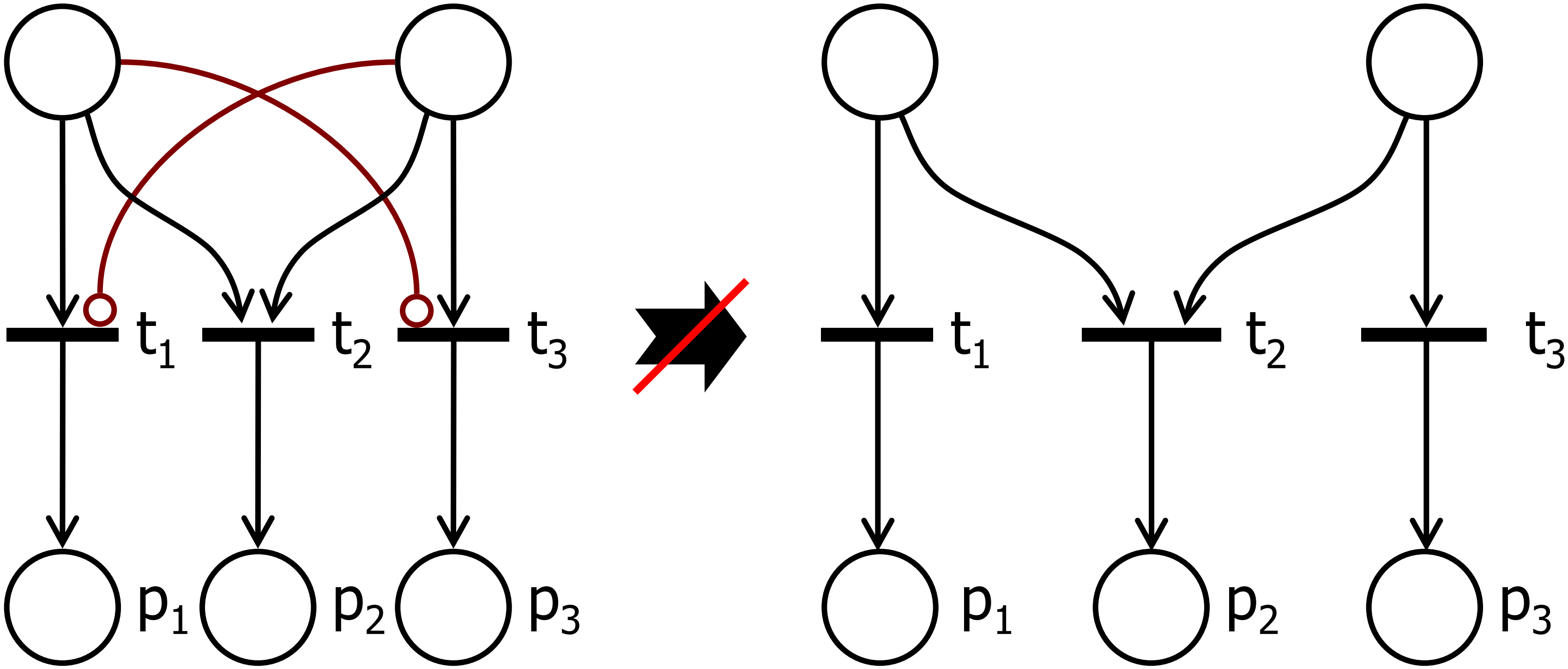


$$\pi_1 < \pi_2$$

Ötlet: „A tiltó éllel letiltott tranzíciónak adunk kisebb prioritást.”

Mennyire általános érvényű ez a konstrukció?

Tiltó él helyett prioritás: nem általános érvényű



$\pi_1 < \pi_3$

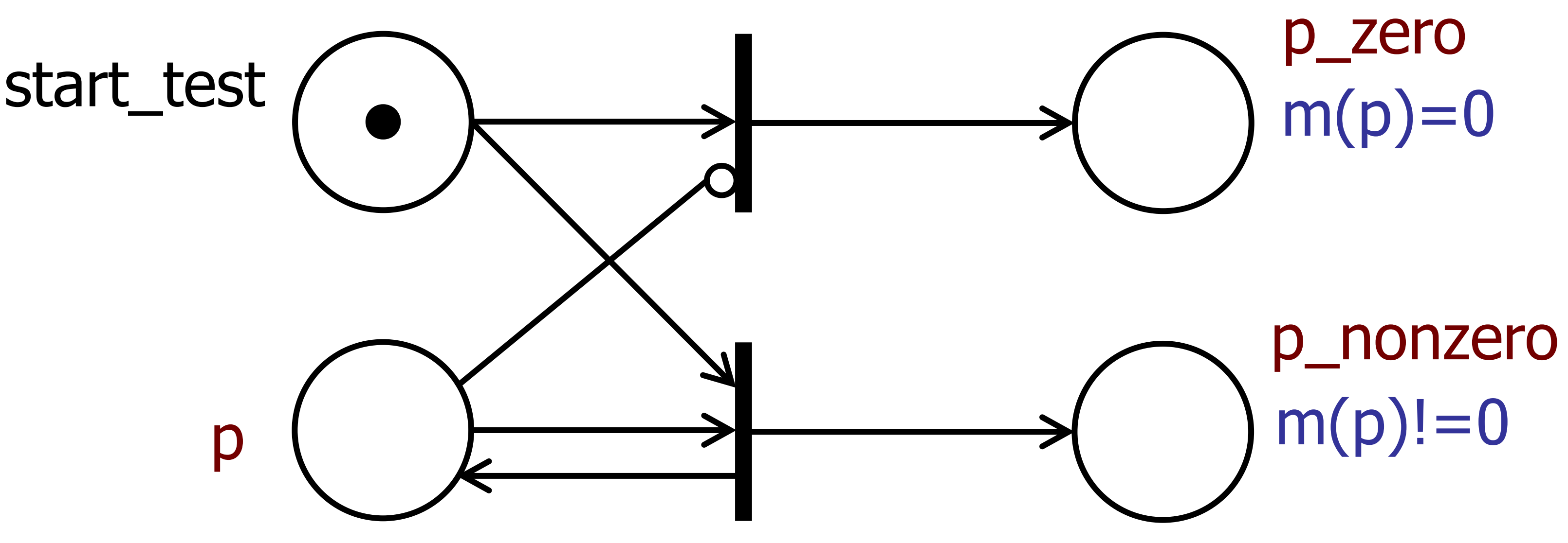
$\pi_3 < \pi_1$

???

Kifejezőerő tiltó éllel

- Tiltó él képes „zero testing”-re: m(p)=0 vizsgálata

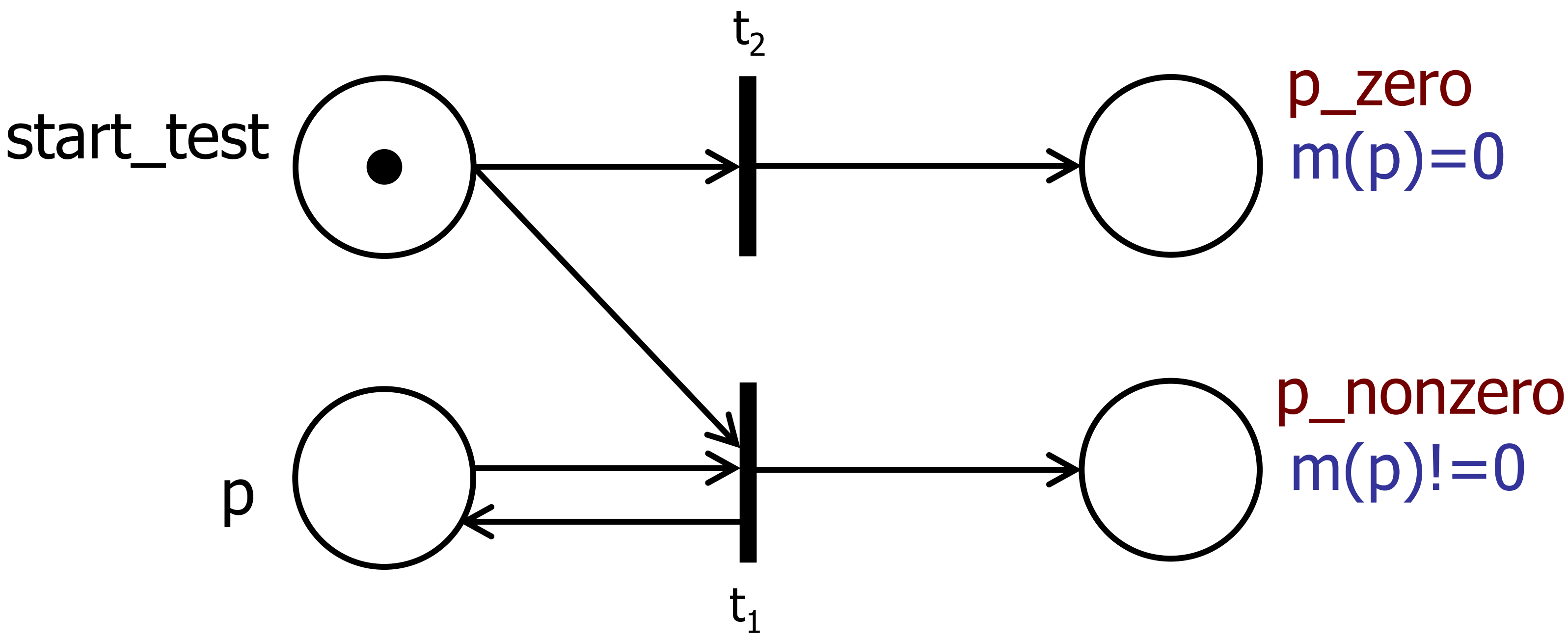
  Szeretnénk a hálóban egy p_zero hely jelölésében látni, hogy m(p)=0 fennáll-e,
  illetve p_nonzero jelölésében látni, hogy m(p)!=0 fennáll-e



Kifejezőerő prioritással

- Prioritás képes „zero testing”-re: m(p)=0 vizsgálata

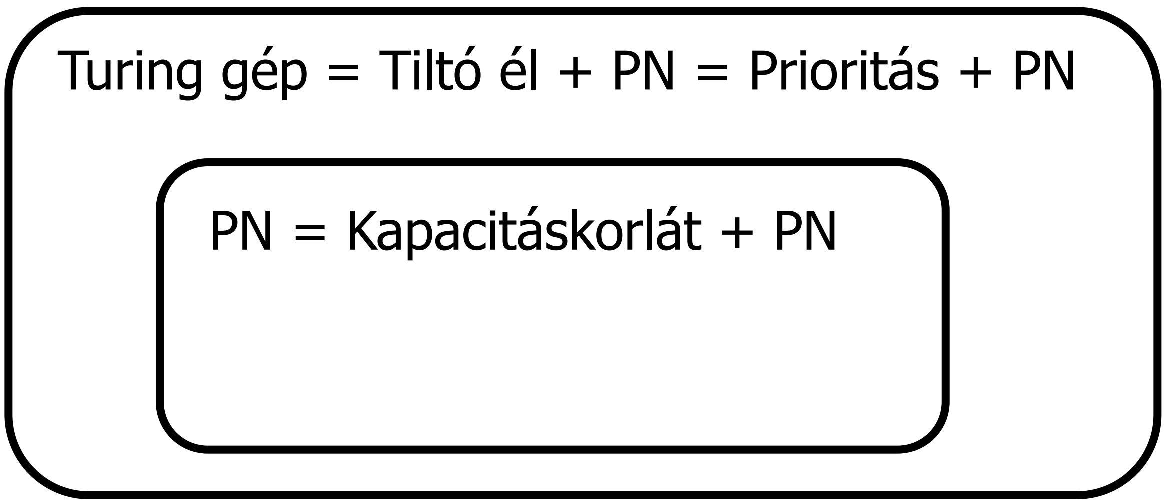
  Szeretnénk a hálóban egy p_zero hely jelölésében látni, hogy m(p)=0 fennáll-e,
  illetve p_nonzero jelölésében látni, hogy m(p)!=0 fennáll-e



$$\boxed{\pi_2 < \pi_1}$$

Kifejezőerő összefoglalása

- „Zero testing” képesség lehetővé teszi, hogy minden Turing gép szimulálható Petri hálóval
  - Következmény: nehéz analízis, eldönthetetlen problémák
- A kapacitáskorlát csak szintaktikus konstrukció



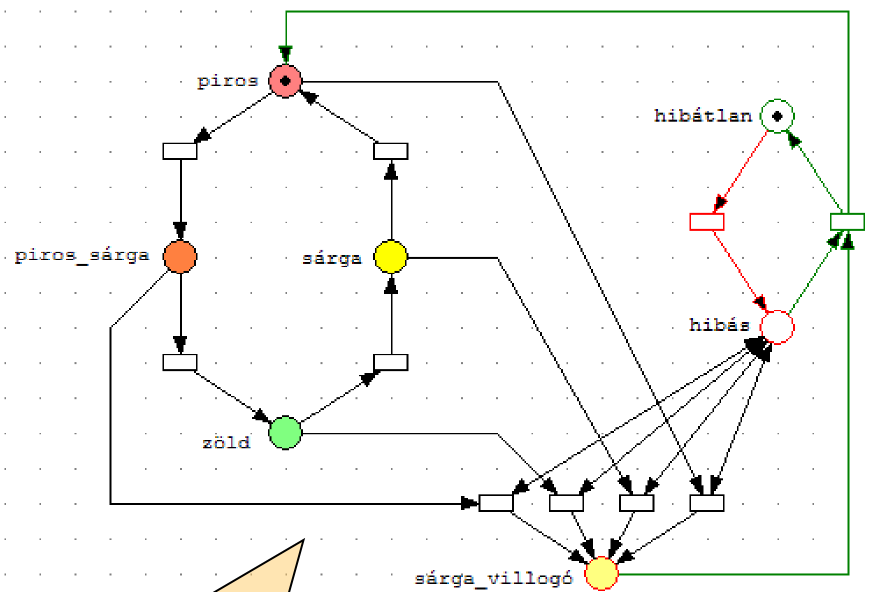
J.L. Peterson, *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice-Hall, 1981.

Kiterjesztés nélküli PN kifejező ereje

- Vannak-e olyan rendszerek, amelyek nem modellezhetőek Petri hálóval, ha egyik kiterjesztést sem használhatjuk?
  - IGEN
- A „nem modellezhetőség” kulcsa:
  - Nem korlátos kapacitású hely esetén nem tesztelhető, hogy a helyen adott k számú token van-e vagy sem
  - Speciális esetként k=0, ami „zero testing” probléma néven ismert
    - Belátható, hogy egy megoldás a „zero testing” problémára megoldást ad az általános k-val paraméterezett esetre

Egyszerű példák Petri háló készítésére

Egyszerű modellek: Forgalmi lámpa meghibásodással

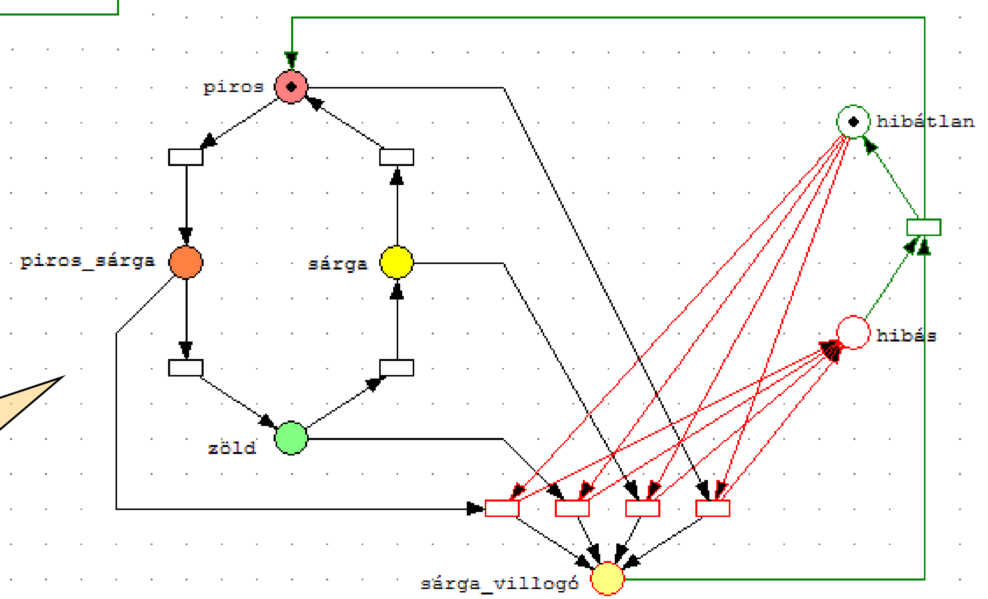


Modellezési konstrukciók:

- Véletlen esemény
- Szinkronizáció
- Állapotváltozó

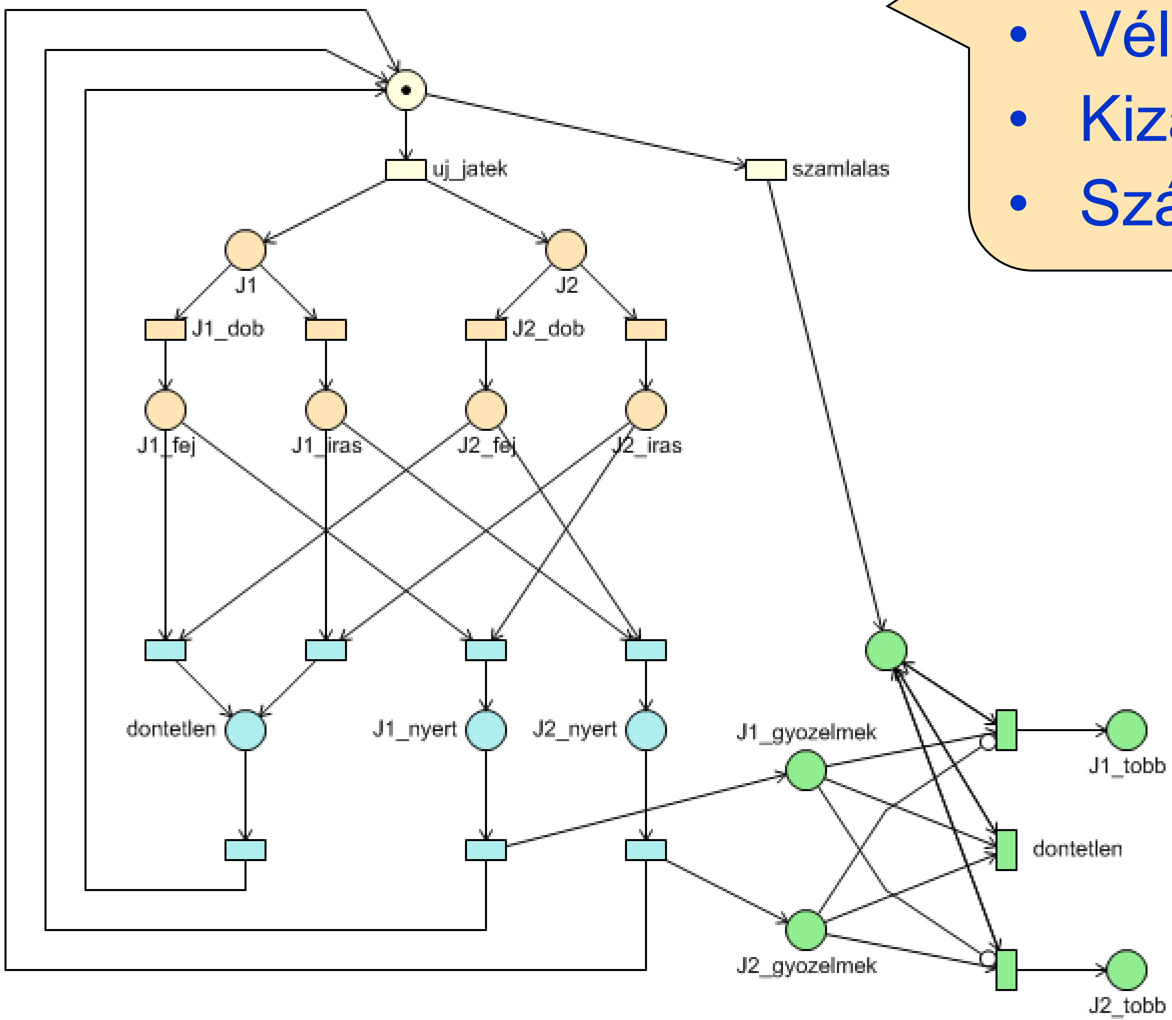
Hibás modell: A meghibásodás csak egy alternatíva

Javított modell: A meghibásodás állapotváltást jelent

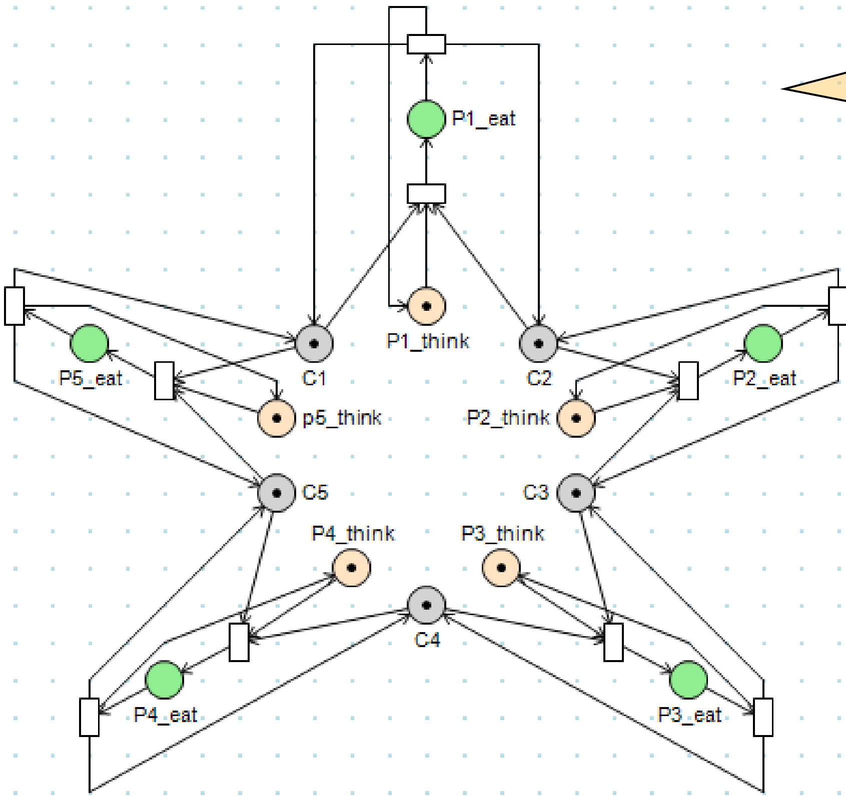


Egyszerű modellek: Pénzfeldobós játék

Modellezési konstrukciók:
- Véletlen választás
- Kizárások (alternatívák)
- Számlálás (döntéshez)

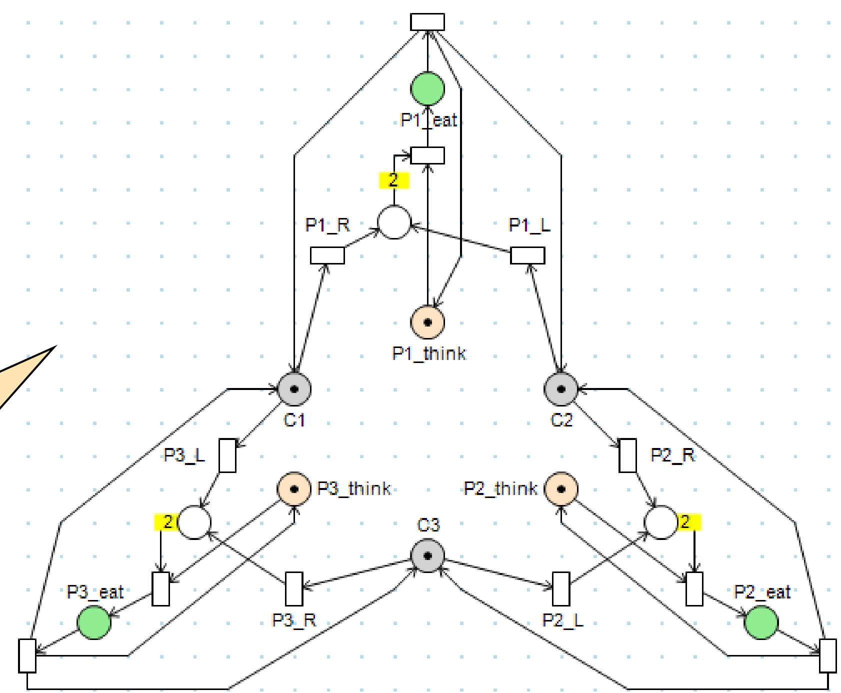


Egyszerű modellek: Étkező filozófusok



Modellezési konstrukciók:

- Atomi esemény: Két villa felvétele



Modellezési konstrukciók:

- Egy villa felvétele egy független esemény
- Holtpont lehetőség