

Gyakorló feladatok:
Szoftver ellenőrzés absztrakcióval.
Modellezés Petri-hálókkal.
Petri-hálók tulajdonságai

Majzik István
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Szoftver ellenőrzés absztrakcióval

- Rajzolja le a programrészlethez tartozó **Control Flow Automaton (CFA)** modellt!
 - A vezérlési helyeket a programsorokhoz írt sorszámokkal (0, 1, 2) azonosítsa.
 - Az assert megsértése esetére vegyen fel egy **err** címkéjű vezérlési helyet, a jó végállapothoz egy **end** címkéjű vezérlési helyet.
- A CFA modellellenőrzésére **vezérlési hely és predikátum absztrakciót** alkalmazunk, ez utóbbihoz egyetlen ($y > 0$) predikátumot használunk.

Mik lehetnek az absztrakt állapottérben a **kezdőállapotok** (*vezérlési hely, predikátumérték*) alakban megadva, ha a program indulásakor az y egész értékű változó tetszőleges lehet?
- Hamis ellenpéldának tekinthető-e az **err** vezérlési hely eléréséhez az absztrakt állapottérben található $(0, true) \rightarrow (2, true) \rightarrow (err, true)$ útvonal?

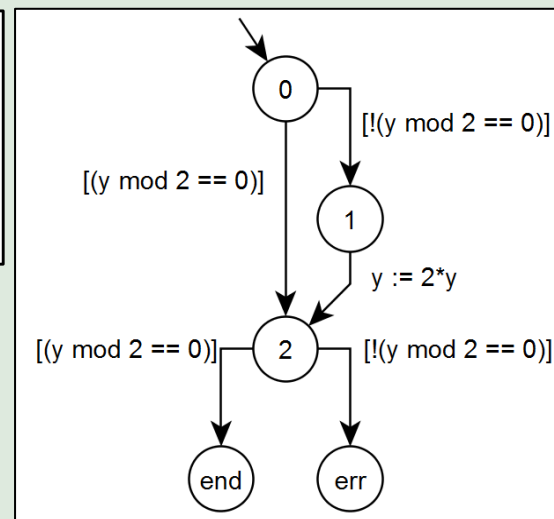
```
      y : int
0:      if !((y mod 2) == 0) {
1:          y := 2*y;
        }
2:      assert((y mod 2) == 0);
```

Szoftver ellenőrzés absztrakcióval: Megoldás

- Rajzolja le a Control Flow Automaton (CFA) modellt!

– Megoldás: Jobbra

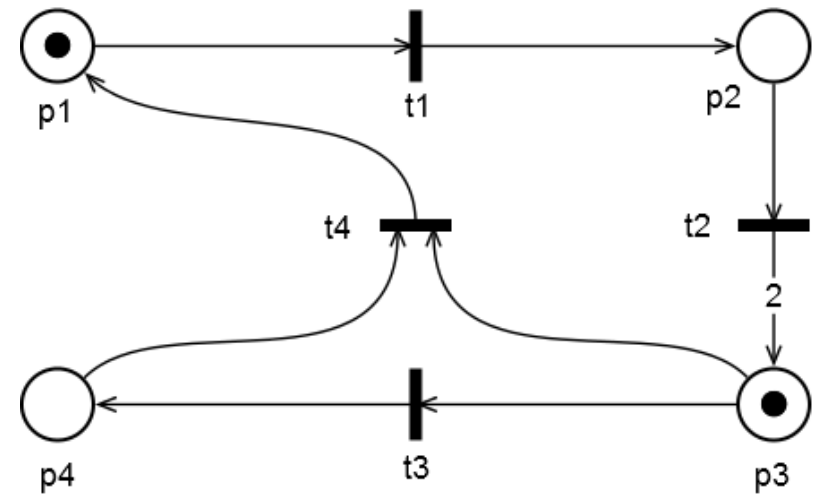
```
y : int
0:   if !((y mod 2) == 0) {
1:       y := 2*y;
      }
2:   assert((y mod 2) == 0);
```



- Az $(y > 0)$ predikátumot használjuk. Mik lehetnek az absztrakt állapottérben a kezdőállapotok *(vezérlési hely, predikátumérték)* alakban megadva, ha a program indulásakor az y egész értékű változó tetszőleges lehet?
 - Megoldás: $(0, \text{true})$ és $(0, \text{false})$
- Hamis ellenpéldának tekinthető-e az err vezérlési hely eléréséhez az absztrakt állapottérben a $(0, \text{true}) \rightarrow (2, \text{true}) \rightarrow (err, \text{true})$ útvonal?
 - Megoldás: $(0, \text{true}) \rightarrow (2, \text{true})$ átmenet esetén $(y > 0)$ és $(y \bmod 2 == 0)$ szükséges, előbbi a predikátum, utóbbi az átmenet feltétele.
A $(2, \text{true}) \rightarrow (err, \text{true})$ átmenet esetén $(y > 0)$ és $!(y \bmod 2 == 0)$ szükséges, ahol itt az utóbbi az átmenet feltétele. Ez ellentmond az előző átmenet feltételének.

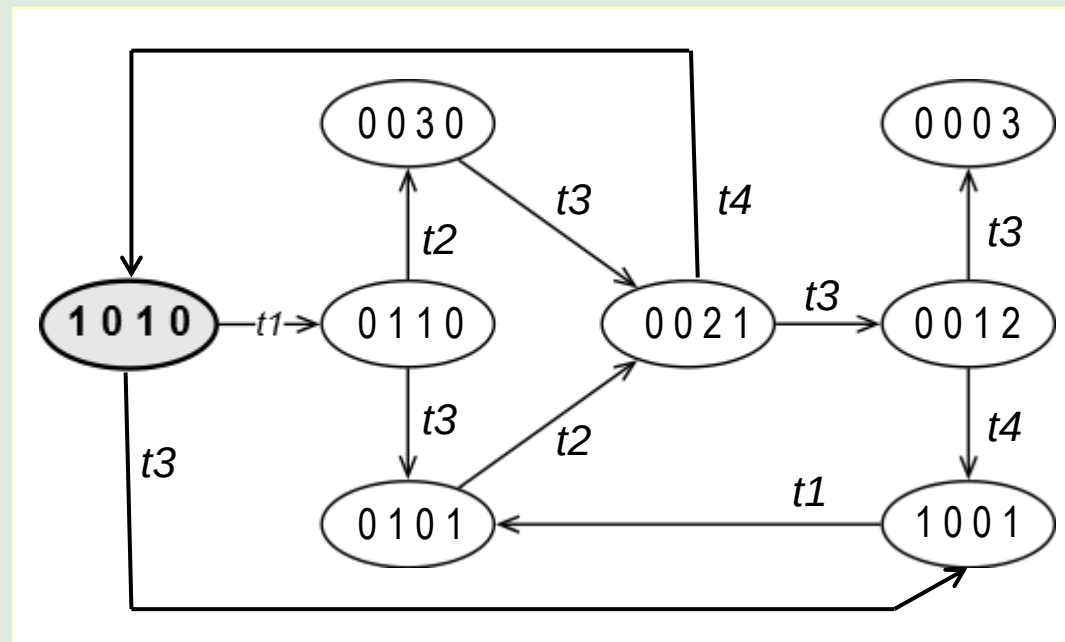
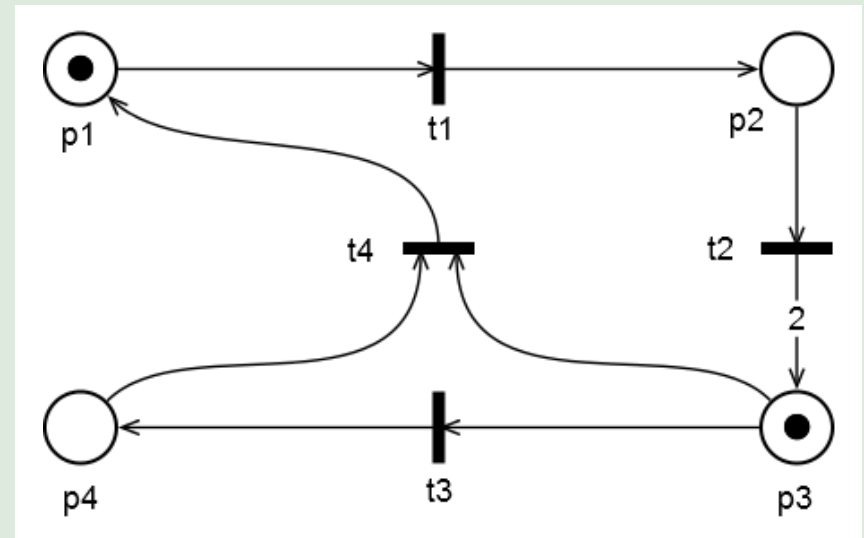
Petri-háló állapotterének felvétele

- Készítse el a jobbra látható Petri-háló elérhetőségi gráfját!



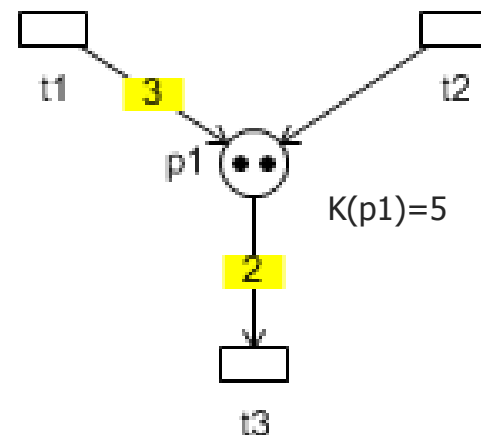
Petri-háló állapotterének felvétele: Megoldás

- Készítse el a jobbra látható Petri-háló elérhetőségi gráfját!



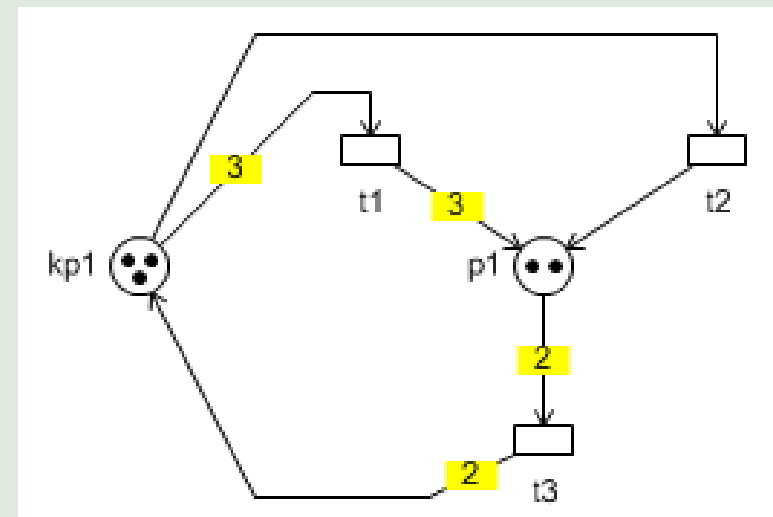
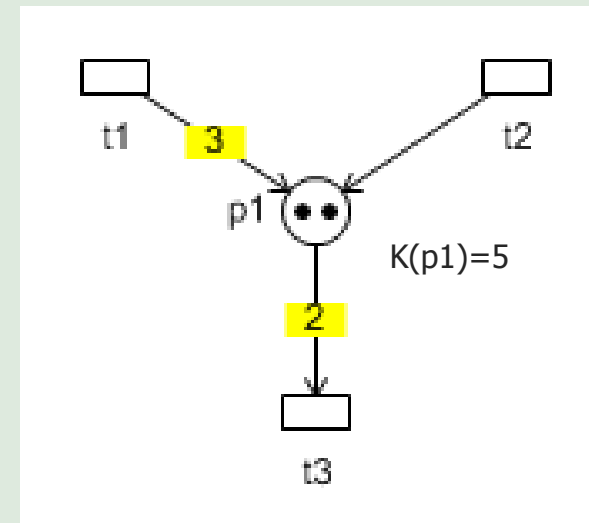
Kapacitáskorlát Petri-hálókbán

- Mit jelent az, hogy egy Petri-hálóban egy hely kapacitáskorlátos?
- A mellékelt véges kapacitású háló kiegészítésével rajzoljon ekvivalens, kapacitáskorlát nélküli hálót!



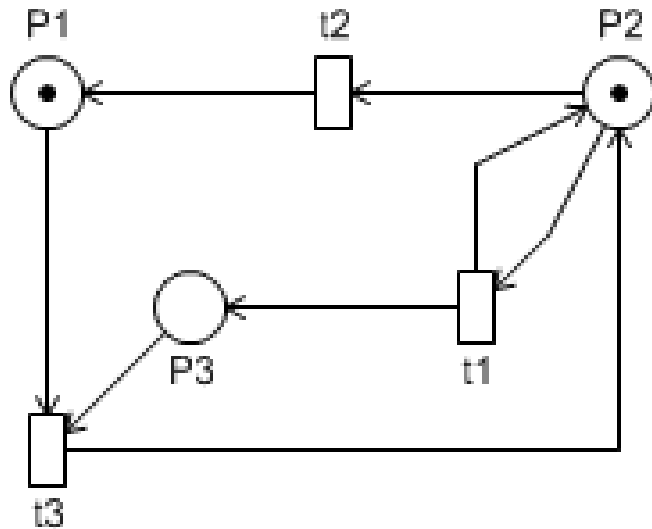
Kapacitáskorlát Petri-hálókbán: Megoldás

- Mit jelent az, hogy egy Petri-hálóban egy hely kapacitáskorlátos?
 - Az adott helyen a tokenszám nem lehet nagyobb, mint a kapacitáskorlát értéke.
- A mellékelt véges kapacitású háló kiegészítésével rajzoljon ekvivalens, kapacitáskorlát nélküli hálót!
 - A szabad kapacitás megjelenítésére **kp1** kiegészítő hely felvétele
 - Szabad kapacitás változásának követése a megfelelő élekkel



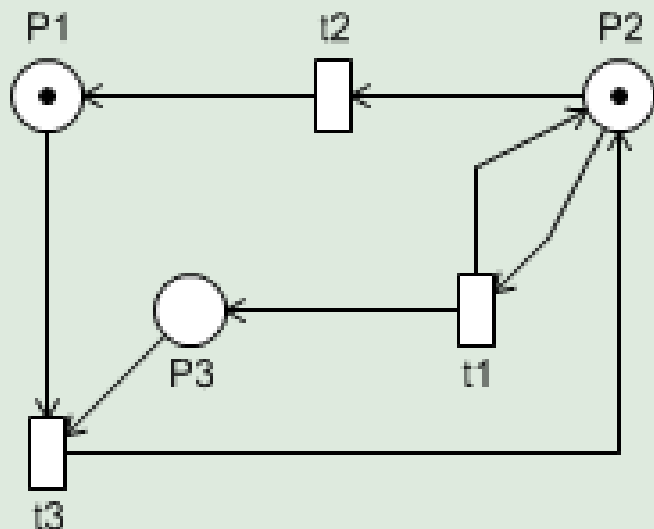
Petri-háló fedési gráfjának felvétele

- Rajzolja fel az alábbi Petri-háló fedési gráfját!

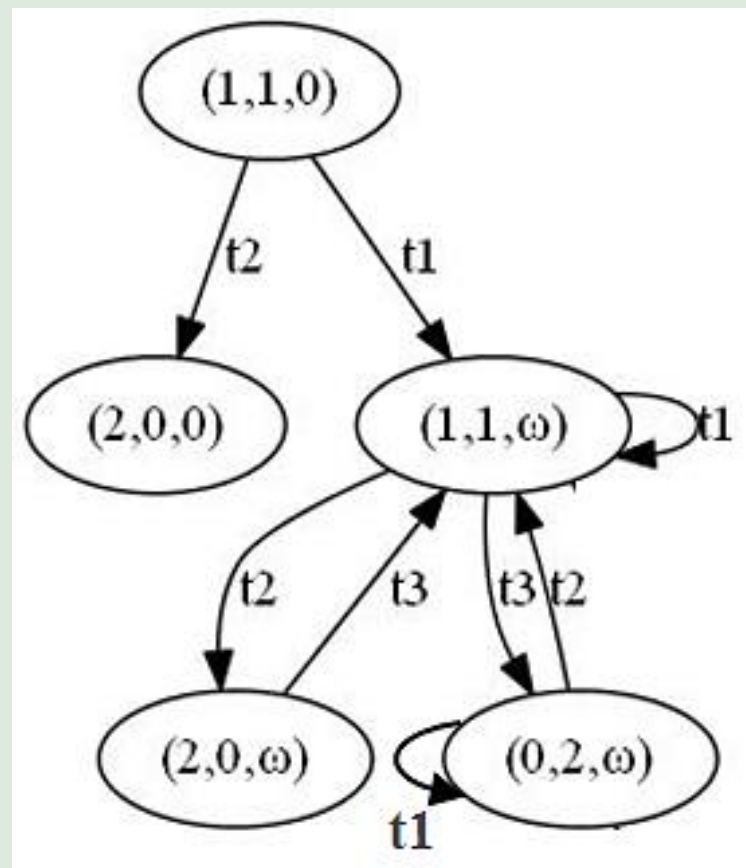


Petri-háló fedési gráfjának felvétele: Megoldás

- Rajzolja fel az alábbi Petri-háló fedési gráfját!

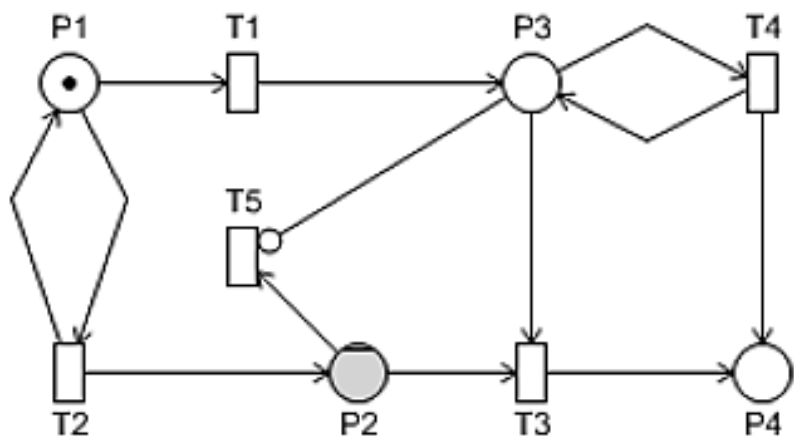


Az előzőt erősen fedő jelölések esetén, az **erősen fedő helyeken** szaporodhat a token; ennek jelölésére megjelenik az ω szimbólum.



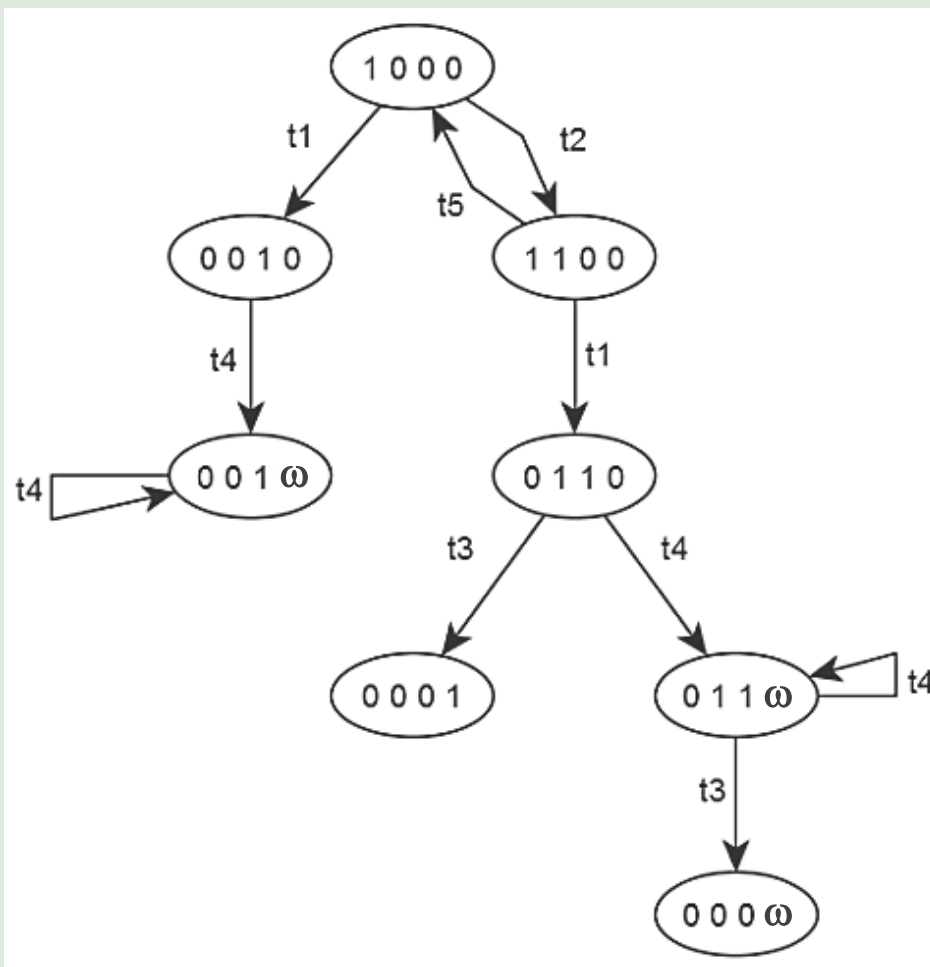
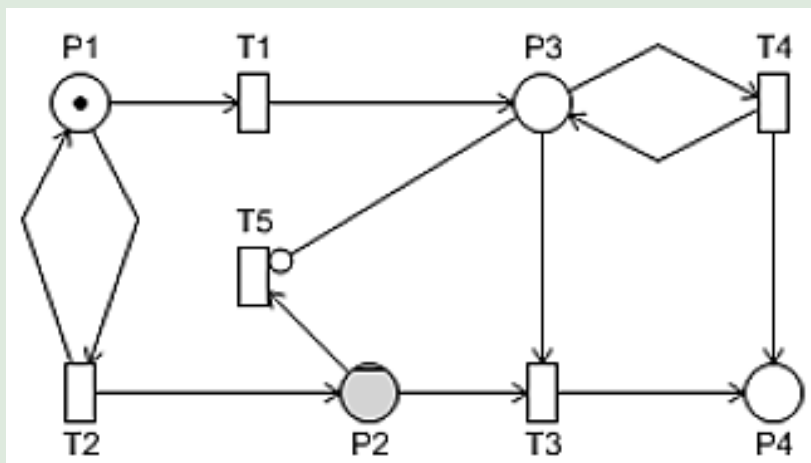
Petri-háló fedési gráfjának felvétele

- Rajzolja fel az alábbi Petri-háló fedési gráfját!
A Petri-háló P2 helye kapacitáskorlátos, $K(P2)=1$.



Petri-háló fedési gráfjának felvétele: Megoldás

- Rajzolja fel az alábbi Petri-háló fedési gráfját!
A Petri-háló P2 helye kapacitáskorlátos, $K(P2)=1$.



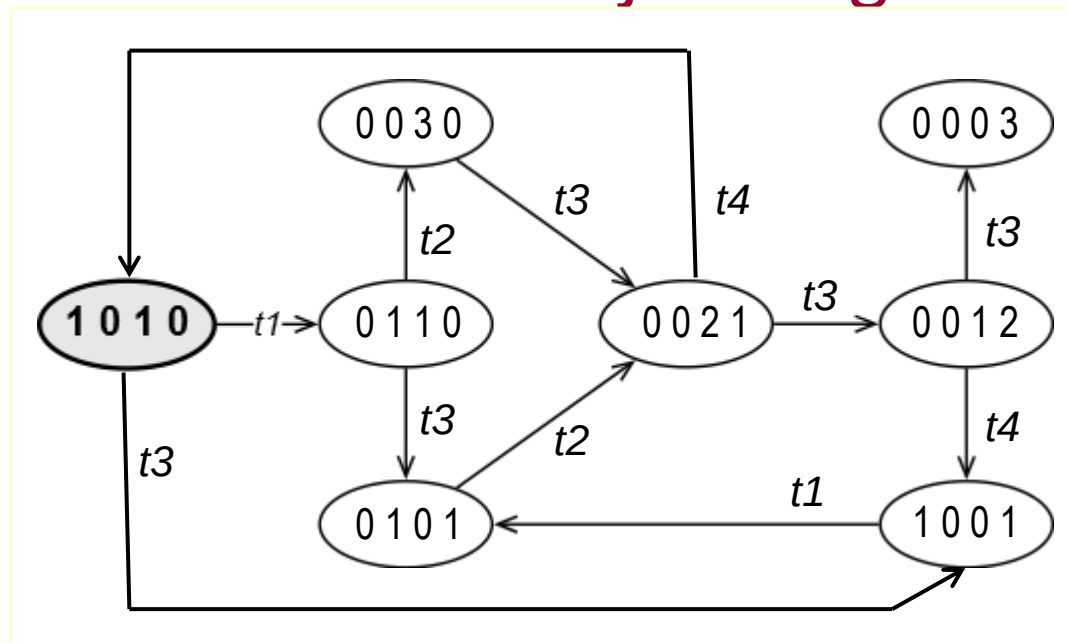
Általában figyelni kell:

Kapacitáskorlátos helyen nem jelenhet meg ω szimbólum.

Lásd itt: (1 0 0 0) után (1 1 0 0) erősen fedő, de a P2 helyen nem jelenik meg ω .

Petri-hálók dinamikus tulajdonságai

Egy Petri-háló jobb oldali állapottere alapján jelölje be az alábbi dinamikus tulajdonságok teljesülését:



	igaz	hamis	nem dönthető el		igaz	hamis	nem dönthető el
(a) A háló elérhetőségi és fedési gráfja azonos	☐	☐	☐	(e) A $t1, t2, t4$ tüzelési szekvencia egy T-invariánst alkot	☐	☐	☐
(b) A háló nem perzisztens	☐	☐	☐	(f) $t3$ és $t4$ tranzíció korlátos fair	☐	☐	☐
(c) A hálóban van holtpont (deadlock)	☐	☐	☐	(g) A $(0\ 1\ 0\ 1)$ állapot visszatérő állapot	☐	☐	☐
(d) $t3$ tranzíció L2-élő	☐	☐	☐	(h) A háló globális fair	☐	☐	☐

Petri-hálók dinamikus tulajdonságai: Megoldás

Dinamikus tulajdonságok: Emlékeztető (1/2)

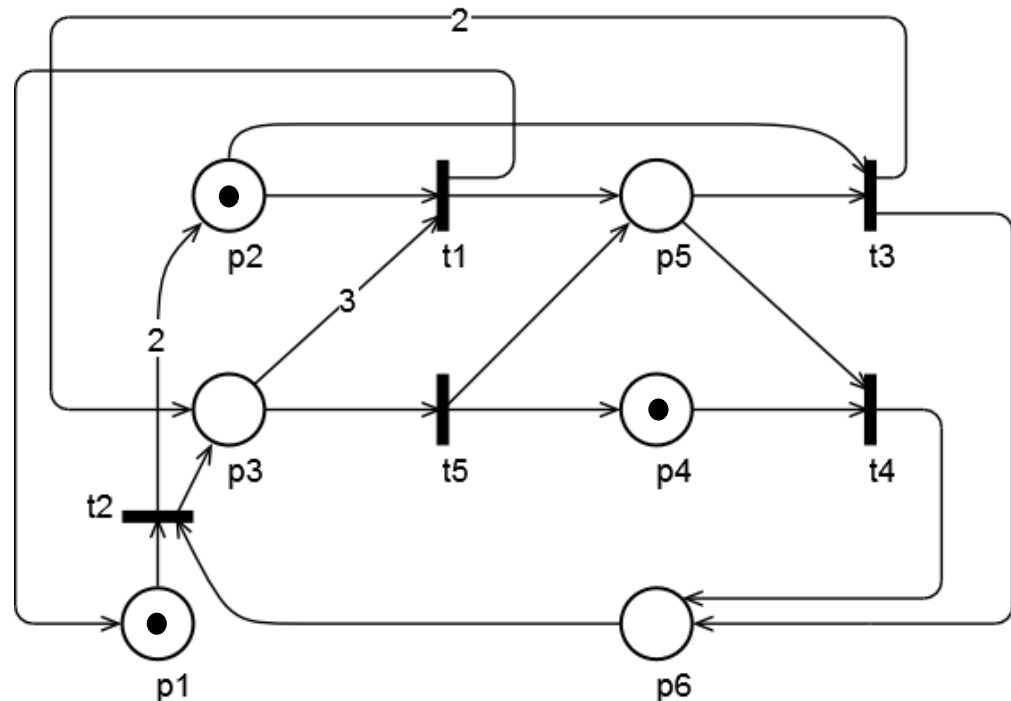
- Korlátosság
 - Véges elérhetőségi gráf, a fedési gráfban nincs ω címke
 - Biztosság: Az elérhetőségi gráfban csak 0 és 1 jelölések vannak
- Megfordíthatóság
 - Az elérhetőségi gráf egyetlen erősen összekötött komponens
- Visszatérő állapot
 - Van az elérhetőségi gráfban erősen összekötött komponens, aminek része a kérdéses állapot
- Fairség
 - „Az egyik engedélyezett tranzíció korlátos sokszor tüzelhet, mielőtt a másik engedélyezett tranzíció tüzelne”:
Ellenpélda: Olyan ciklus, amiben az egyik tranzíció benne van és a másik engedélyezett nincs (mindig kimarad a tüzelésből)
- Perzisztencia
 - „A tranzíció mindaddig engedélyezett marad, amíg nem tüzel”:
Ellenpélda: Több tranzíció engedélyezett, és ha nem az adott tranzíció tüzelt, akkor a következő állapot(ok)ban nem marad engedélyezett (azaz nem jelenik meg kimenő él címkéjeként)

Dinamikus tulajdonságok: Emlékeztető (2/2)

- Tranzíció L1, L2, L3-élőség
 - Elég egy trajektóriát találni, ahol teljesül, hogy a tranzíció 1-szer (L1), k-szor (L2), végtelenszer (L3) tüzelhet (utóbbiak ciklust jelentenek véges állapottérben)
- Tranzíció L4-élőség
 - Végig kell nézni, hogy a tranzíció minden állapotból előbb-utóbb mindig tüzelhetővé válik-e
- A háló élő
 - A háló akkor élő, ha minden tranzíciója L4-élő
 - Ha találunk akár egy tranzíció esetében is ellenpéldát, akkor nem élő
 - Ha van holtpont, akkor a háló biztosan nem élő
 - Ha holtpontmentes, akkor még nem biztos, hogy élő is

Strukturális tulajdonságok (1)

Adott az ábrán látható Petri-háló és a hozzá tartozó W^T szomszédossági mátrix. Milyen számokat kell a mátrixban a betűvel jelölt kitöltetlen helyekre írni?

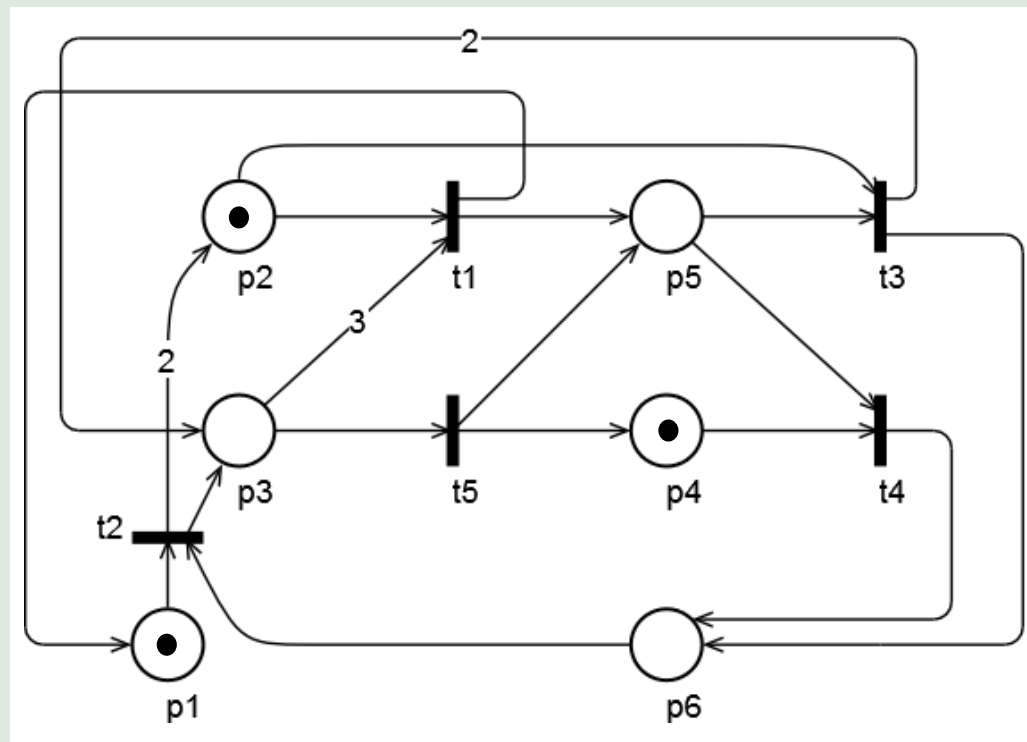


- $A =$
- $B =$
- $C =$
- $D =$

$$W^T = \begin{bmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ p_3 & \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Strukturális tulajdonságok (1): Megoldás

Adott az ábrán látható Petri-háló és a hozzá tartozó W^T szomszédossági mátrix. Milyen számokat kell a mátrixban a betűvel jelölt kitöltetlen helyekre írni?



- $A = -3$
- $B = -1$
- $C = -1$
- $D = 0$

$$W^T = \begin{bmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ p_3 & \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Strukturális tulajdonságok (2)

Ellenőrizze az állapot-
egyenlet alapján, hogy az
alábbiak közül melyek
T-invariánsai a Petri-
hálónak!

$$\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ p_3 & \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

- $(2,2,2,0,0)^T$
- $(0,1,0,1,3)^T$
- $(1,2,1,1,3)^T$

Strukturális tulajdonságok (2): Megoldás

Ellenőrizze az állapot-
egyenlet alapján, hogy az
alábbiak közül melyek
T-invariánsai a Petri-
hálónak!

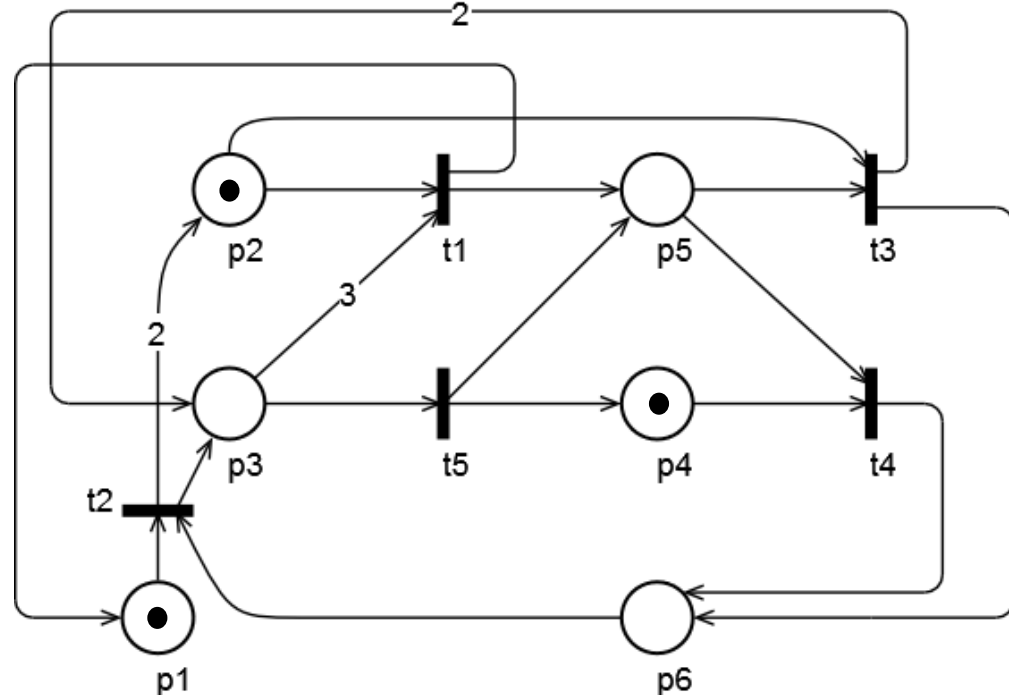
$$\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & -1 & 2 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ p_3 & \mathbf{A} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C} & 1 \\ p_5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ p_6 & 0 & -1 & 1 & 1 & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

- $(2,2,2,0,0)^T$ Invariáns
- $(0,1,0,1,3)^T$ Nem invariáns
- $(1,2,1,1,3)^T$ Nem invariáns

Ellenőrzés az állapotegyenlet alapján: $\mathbf{W}^T \vec{\sigma}_T = 0$

Temporális tulajdonságok

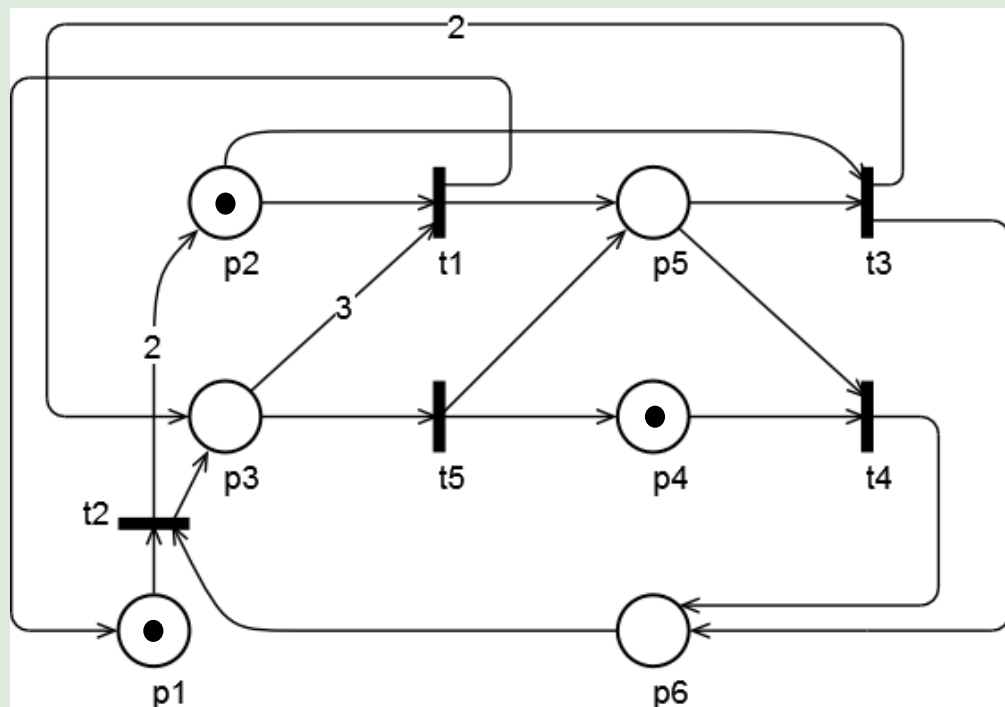
A jobb oldali Petri-hálóra az $M(1,1,0,1,0,0)$ kezdőállapotból igaz-e a következő, CTL temporális logikával megadott állítás?



AG $(4 * m(p_1) + 2 * m(p_2) + m(p_3) + m(p_5) + m(p_6) = 6)$

Temporális tulajdonságok: Megoldás

A jobb oldali Petri-hálóra az $M(1,1,0,1,0,0)$ kezdőállapotból igaz-e a következő, CTL temporális logikával megadott állítás?



AG $(4 * m(p1) + 2 * m(p2) + m(p3) + m(p5) + m(p6) = 6)$

- A kezdőállapotra teljesül.
- A tokenösszeg súlyai alapján felvett $(4,2,1,0,1,1)$ egy P-invariáns, ez $W \cdot \mu_p = 0$ alapján ellenőrizhető
- Tehát a fenti tokenösszeg állandó az állapottérben

Modellezés színezetlen Petri-hálókkal (1/2)

Készítse el a következő folyamat **színezetlen Petri-háló modelljét!**

1. A Formális módszerek ZH 6 feladatból áll. A ZH előkészítésén az előadó, 1 segítő és 5 demonstrátor dolgozik.
2. Az 6 feladat mindegyikéhez az előadó vagy maga állítja össze a feladat vázlatot, vagy kiosztja egy demonstrátornak. Egy demonstrátor, ha feladatot kap, elfoglalt lesz, és nem kaphat több feladatot.
3. Az elkészült feladat vázlatokat a segítő egyenként átnézi. Az átnézés után a feladat kész.
4. Ha az összes feladat kész, az előadó összeállítja a ZH-t.
5. A tanszéken 7 túrórudi és 8 madeleine-sütemény van.
6. Az elfoglalt demonstrátorok néha megéheznek, és elkezdnek túrórudat enni (ha van túrórudi). Ekkor nem tudnak a feladatok összeállításán dolgozni, amíg be nem fejezik az evést.
7. A segítő inkább a madeleine-süteményt szereti, tehát időnként ezt eszi. A sütemény hatására elkezd visszaemlékezni saját diákkorára, és amíg be nem fejezi, nem néz át feladatot.

Modellezés színezetlen Petri-hálókkal (2/2)

Az előző leírás szerinti modellt a lenti a lenti modell-részletet kiegészítve készítse el!



Feladatok



Demonstrátorok



Kiosztott feladatok



ZH



Kész feladat



Feladat vázlat



Segítő



Elfoglalt
demonstrátorok



Madeleine



Visszaemlékezik



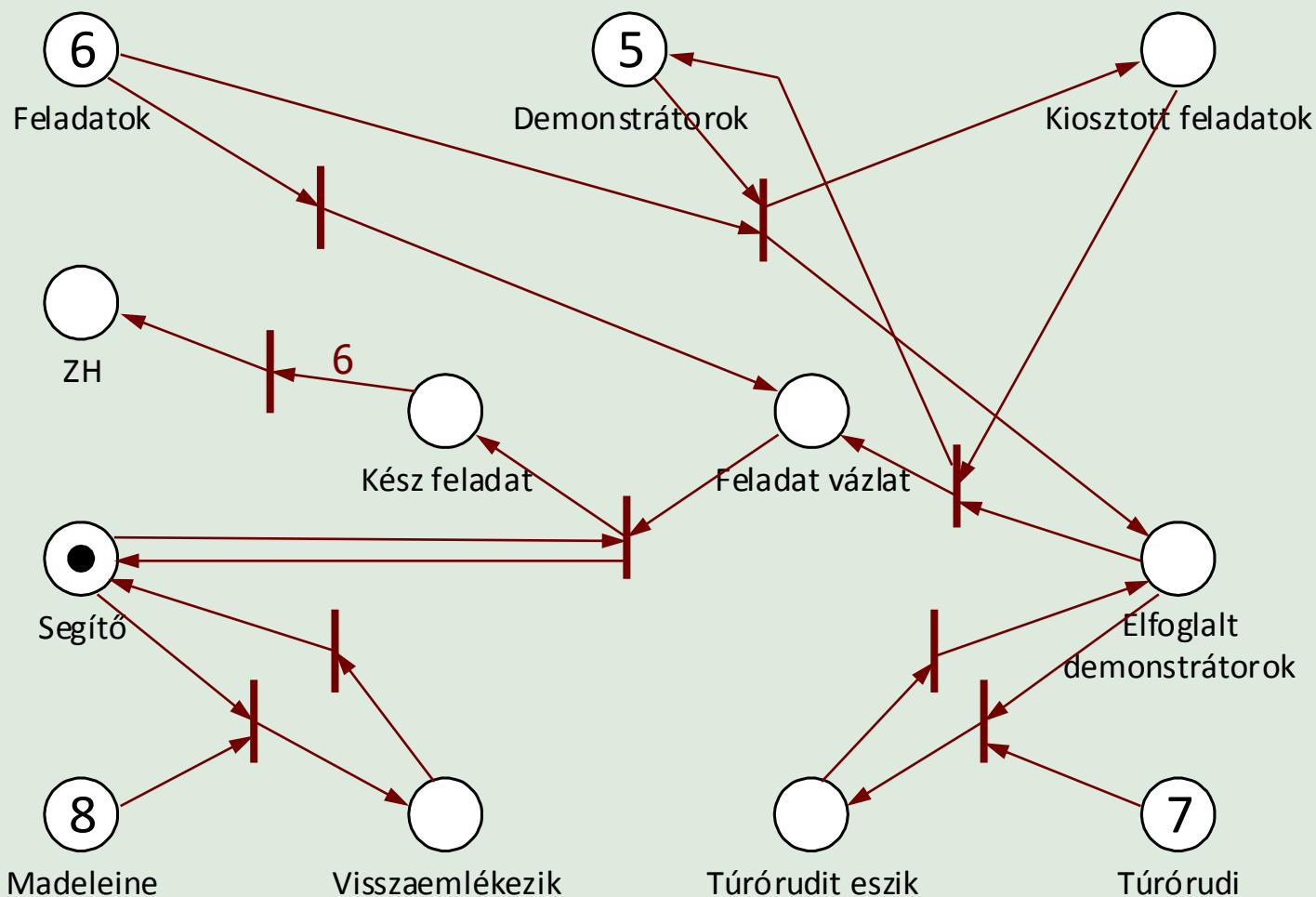
Túrórudit eszik



Túrórudi

Modellezés színezetlen Petri-hálókkal: Megoldás

A megadott modell-részlet kiegészítése:



Modellezés színezett Petri-hálókkal

Adott az ábrán látható színezett Petri-háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező.

1. Mely tranzíciók és milyen lekötéssel engedélyezettek az adott állapotban?

2. Tüzelés után mik lehetnek a háló következő jelölései?

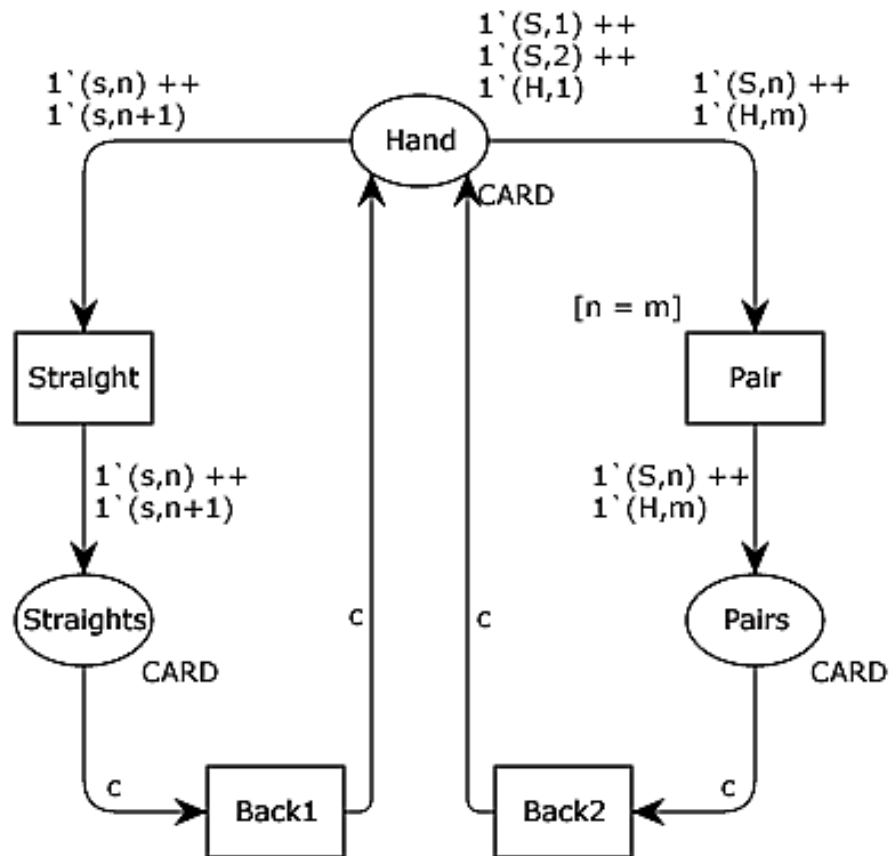
Válasszon ki egyet ezek közül és adja meg az ezután következő lehetséges lekötéseket!

3. Korlátos-e a háló az adott kezdőállapottal?

4. Holtpontmentes-e a háló az adott kezdőállapottal?

5. Van-e a hálóban T-invariáns?

```
colset SUIT = with S | H;  
colset NUM = int with 0..12;  
colset CARD = product SUIT * NUM;  
var s : SUIT;  
var n, m : NUM;  
var c : CARD;
```



Modellezés színezett Petri-hálókkal: Megoldás

1. Engedélyezett:

- **Straight**, $s=S$, $n=1$ lekötéssel
- **Pair**, $n=1$, $m=1$ lekötéssel

2. Következő jelölések:

- **Straight** tüzel: **Hand** lesz $1'(H,1)$, **Straights** lesz $1'(S,1)++1'(S,2)$.
Ezután engedélyezett: **Back1**, $c=(S,1)$ vagy $c=(S,2)$ lekötéssel
- **Pair** tüzel: **Hand** lesz $1'(S,2)$, **Pairs** lesz $1'(S,1)++1'(H,1)$.
Ezután engedélyezett: **Back2**, $c=(S,1)$ vagy $c=(H,1)$ lekötéssel

3. Korlátos:

- Minden tranzíció ugyanannyi tokenet vesz el, mint amennyit kirak, így a tokenek száma nem változik

4. Holtpontmentes:

- A **Back1** illetve **Back2** mindig vissza tudja (egyenként) rakni, amit a **Straight** illetve a **Pair** elvett, tehát mindig ciklikus a működés

5. T-invariánsok fejben is megkereshetők:

- **Straight**, **Back1**, **Back1**
- **Pair**, **Back2**, **Back2**

Színezett Petri-hálók széthajtogatása

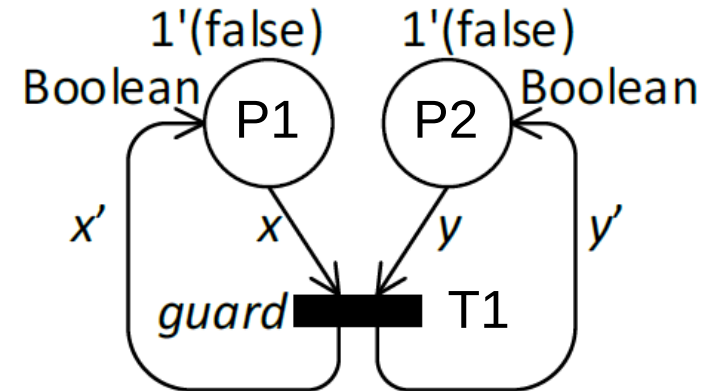
- Adott az ábrán látható színezett Petri háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező:

var x, y, x', y' : Boolean;

Az őrfeltétel: $\text{guard} =$

$$(\neg x \wedge \neg y \wedge x' \wedge \neg y') \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg x' \wedge y') \vee (\neg x \wedge y \wedge x' \wedge y')$$

- Készítse el a színezett Petri-háló struktúrával **ekvivalens működésű színezetlen Petri háló struktúrát**, azaz a színezett Petri háló széthajtogatását!
- Élő-e és/vagy korlátos-e** a fenti színezett háló és az ekvivalens működésű széthajtogatott színezetlen háló az adott (vagy bármilyen korlátos) kezdőállapottal?



Színezett Petri-hálók széthajtogatása: Megoldás

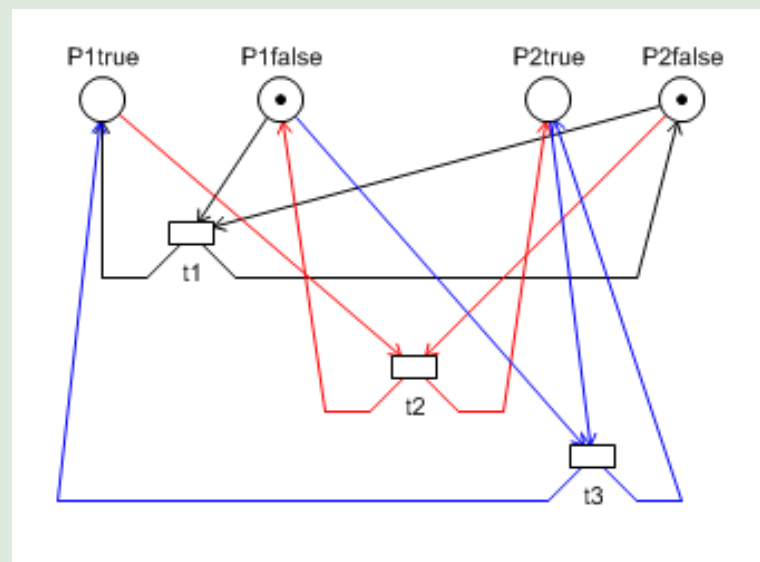
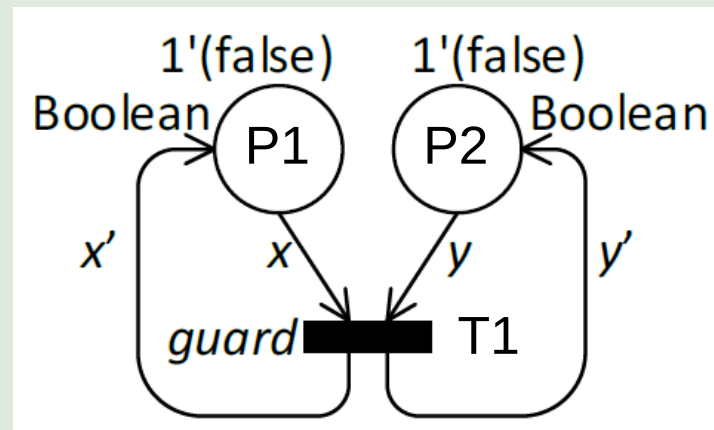
- Adott az ábrán látható színezett Petri háló modell és a hozzá tartozó definíciós mező:

```
var x, y, x', y': Boolean;
```

Az őrfeltétel: $\text{guard} =$

$$(\neg x \wedge \neg y \wedge x' \wedge \neg y') \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg x' \wedge y') \vee (\neg x \wedge y \wedge x' \wedge y')$$

- Petri háló széthajtogatása:
- Élő-e és/vagy korlátos-e a fenti színezett háló?
 - Nem élő (van holtpont)
 - Korlátos: Egyik tranzíció sem szaporíthatja a tokeneket



Elméleti kérdések

1. Adja meg a **P-invariánsok formális definícióját** (a definícióban szereplő változók jelentésének megadásával), és adjon egy példát ezek gyakorlati felhasználhatóságára!
2. Rajzoljon le egy **forrás tranzíciót** és egy **nyelő tranzíciót**! Indokolja meg, veszélyeztethetik-e ezek egy Petri-háló **élőségét és biztosságát**!
3. Adja meg a tanult **tulajdonságmegőrző transzformációk** segítségével az alábbi topológiával megadott Petri-háló **redukciós lépéseit**, és rajzolja le a végeredményt!
 - $p_1 = \emptyset$
 - $p_2 = \{t_1, t_2\}$
 - $t_1 = \{p_1\}$
 - $t_2 = \{p_1\}$

Elméleti kérdések: Megoldás

1. Adja meg a **P-invariánsok formális definícióját** (a definícióban szereplő változók jelentésének megadásával), és adjon egy példát ezek gyakorlati felhasználhatóságára!
 - P-invariánsok: Egy nemnegatív μ_p súlyvektor által kijelölt helyeken a tokenek súlyozott összege állandó marad:

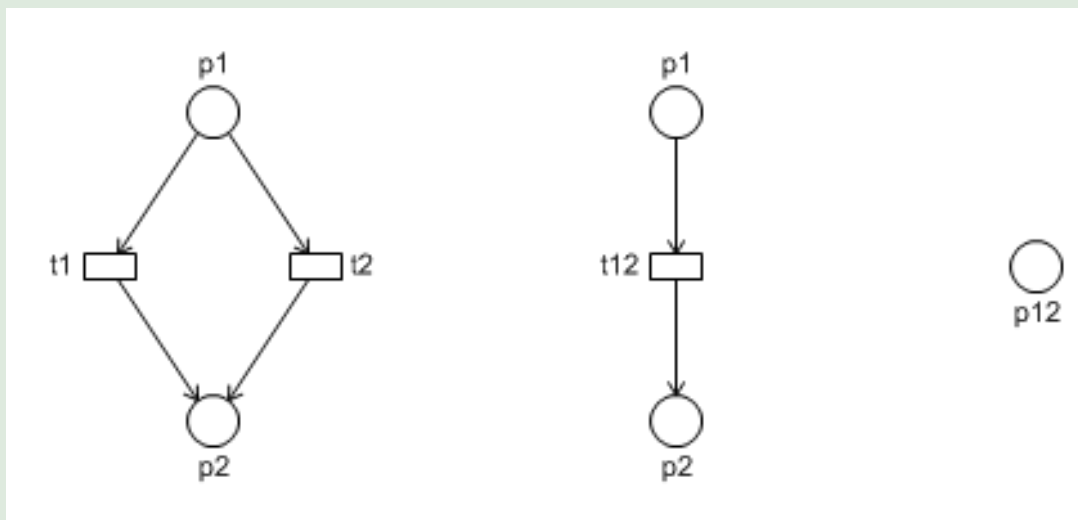
$$\vec{\mu}_p^T M = \text{állandó}$$

- Alkalmazási példa: Munkafolyamat modellje esetén a tokenekkel modellezett erőforrások száma nem változik (egyszeres súlyozással)
2. Rajzoljon le egy **forrás tranzíciót** és egy **nyelő tranzíciót**! Indokolja meg, miért veszélyeztethetik ezek egy Petri-háló élőségét és biztosságát!
 - Forrás tranzíció: Csak kimenő éle van. Tokeneket „termel”, így a korlátosságot és biztosságot veszélyezteti a kimenő helyein.
 - Nyelő tranzíció: Csak bemenő éle van. Tokeneket „fogyaszt”, így az élőséget veszélyeztetheti.

Elméleti kérdések: Megoldás

3. Adja meg a tanult tulajdonságmegőrző transzformációk segítségével az alábbi topológiával megadott Petri-háló redukciós lépéseit, és rajzolja le a végeredményt!

- $p_1 = \emptyset$
- $p_2 = \{t_1, t_2\}$
- $t_1 = \{p_1\}$
- $t_2 = \{p_1\}$



1. lépés: Párhuzamos tranzíciók szabálya
2. lépés: Soros helyek szabálya