

Színezett Petri hálók

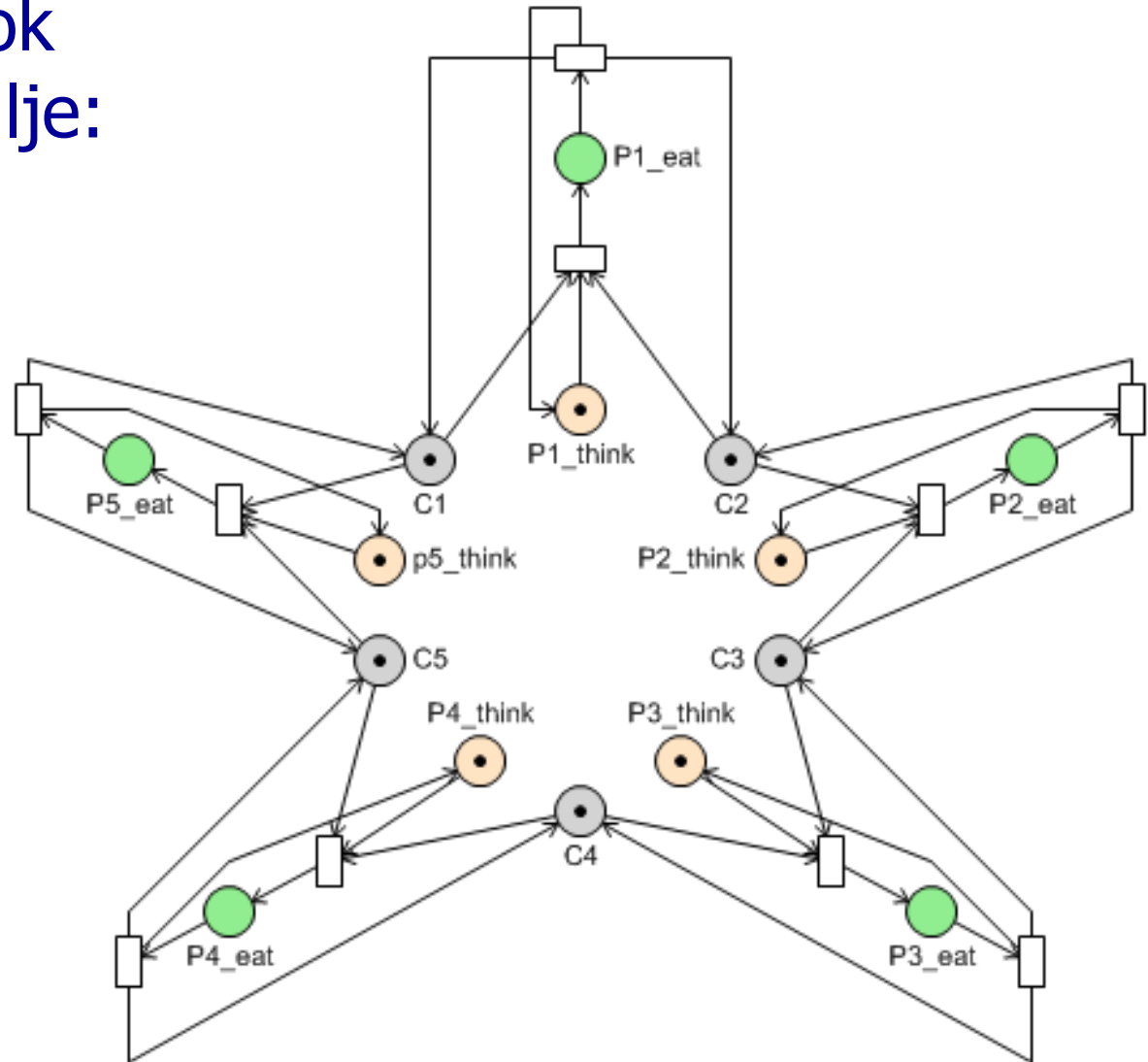
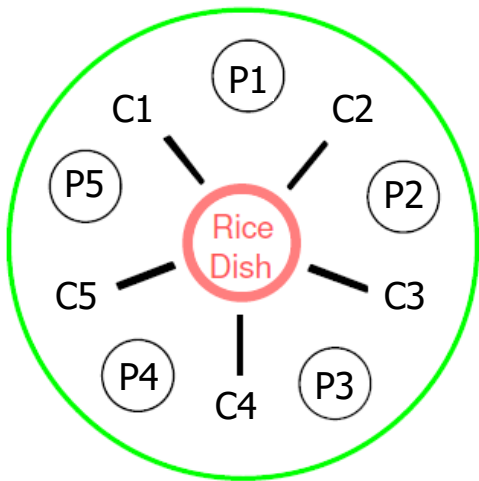
dr. Bartha Tamás

dr. Majzik István

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

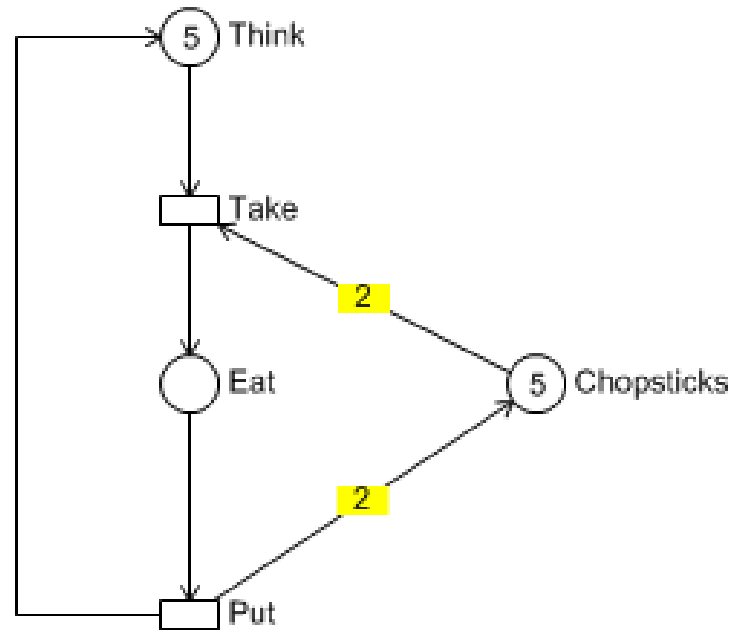
Motiváció

Étkező filozófusok
Petri-háló modellje:



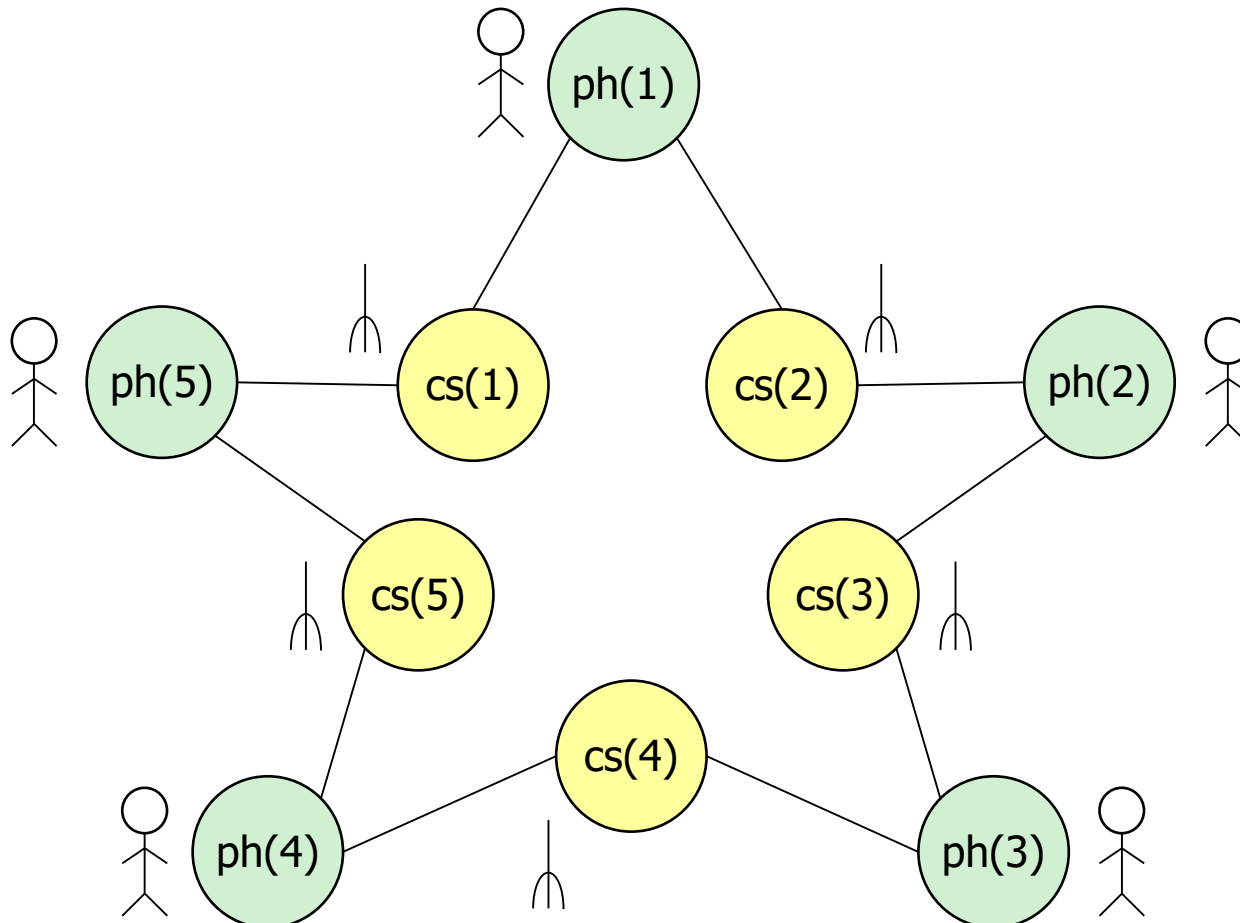
Motiváció

- Miért nem így?



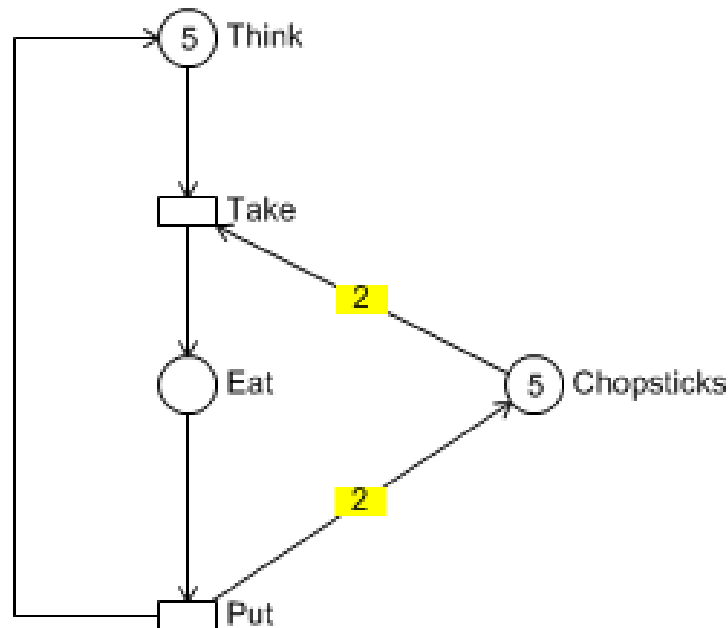
Motiváció

- Szereplők megkülönböztetése szükséges (lehetőleg paraméterezhetően)



Motiváció

- Tokenek: Filozófusok és villák
 - Legyenek megkülönböztethetők
- Tranzíciók: Villa felvétele és lerakása
 - Legyen meghatározható, melyik filozófus melyik villát



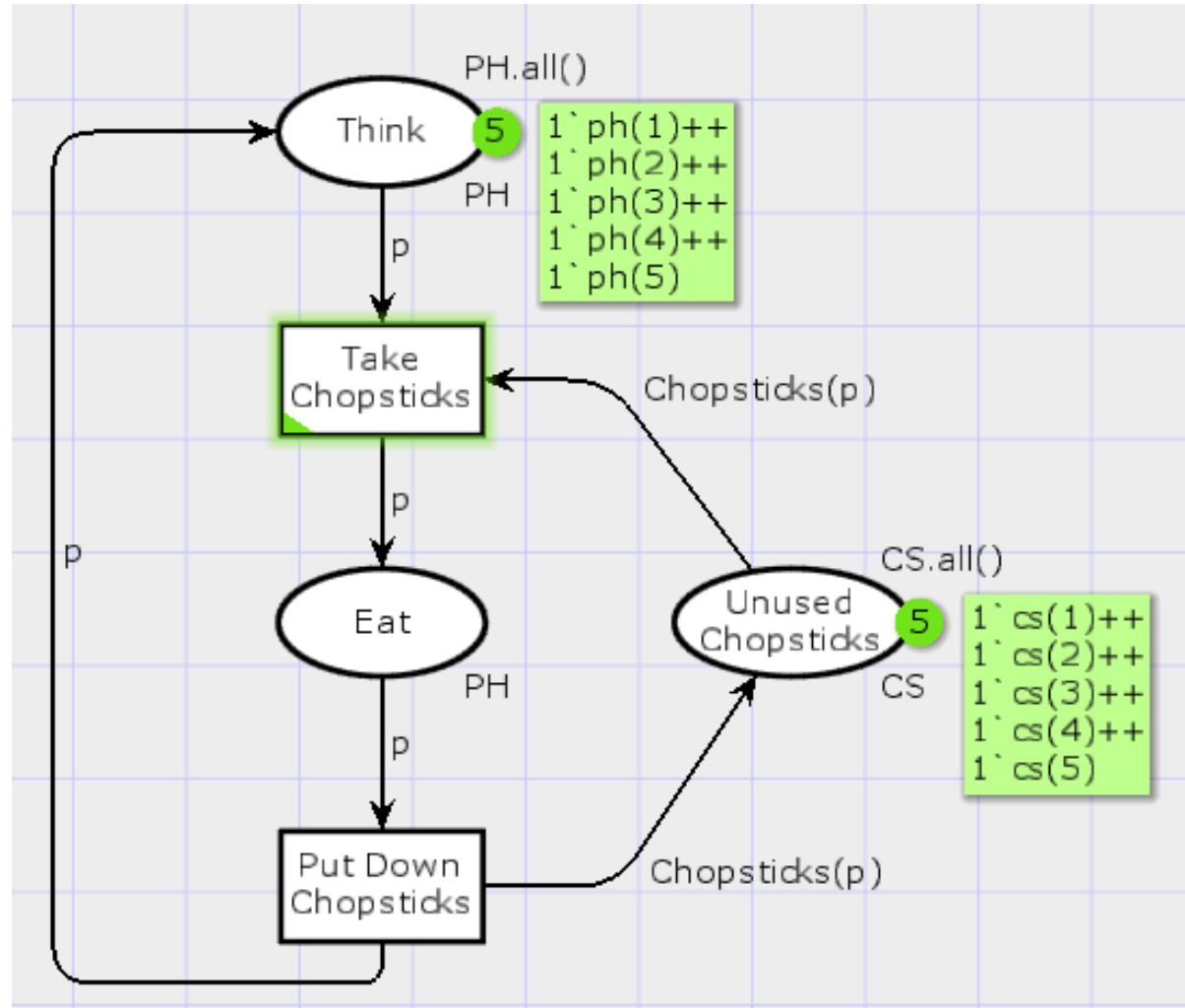
Motiváció

- Megoldás: Színezett Petri-háló

- Tokenek megkülönböztetve
- Tranzíciók hatása részletezve

```
val n = 5;  
colset PH = index ph with 1..n;  
colset CS = index cs with 1..n;  
var p: PH;
```

```
fun Chopsticks(ph(i)) =  
  1`cs(i) ++  
  1`cs(if i=n then 1 else i+1);
```



Színezett Petri-hálók

- A színezett Petri-hálók (Coloured Petri Net, CPN)
 - A színezetlen hálók kiterjesztései:
 - Rugalmas adatszerkezetekkel
 - Adatmanipulációs nyelvvel
 - A színezett Petri-háló modellek ötvözik:
 - Grafikus reprezentáció → struktúra áttekinthetőség
 - Adatmanipuláció → kifejezőerő
 - Jól definiált szemantika → formális analízis
 - CPN modell = háló struktúra + deklarációk + kifejezések + inicializáló kifejezések

Színezett Petri-hálók fő elemei (áttekintés)

- Tokenek kiterjesztései
 - Adatérték: **színezett token**
 - Adattípus: **színhalmaz** (színkészlet, színosztály)
- Helyek kiterjesztései
 - Hely **típusa**: fogadható tokenek adattípusa (színhalmaza)
 - Hely **inicializáló kifejezése**: kezdeti tokenek megadása
 - Hely **aktuális jelölése**: típusnak megfelelő színezett tokenek (multihalmaz: egy színezett tokenből több is lehet)
- Élek kiterjesztései
 - **Élkifejezés**: elvett ill. kirakott tokenek
 - Leköthető **változók**: kirakott token értéke függhet az elvettől
- Tranzíciók kiterjesztései
 - **Örfeltétel** a tüzeléshez
 - Tüzeléskor: **Élkifejezések kötése** színezett tokenekhez

Színezetlen és színezett Petri hálók összehasonlítása

Színezetlen (P-T) Petri hálók:

- színezetlen tokenek
- tokenek halmaza (számosság)
- tokenszám manipuláció
- kezdeti jelölés
- tiltó élek
- élsúlyok
- tranzíció engedélyezése
- konfliktus különböző engedélyezett tranzíciók között
- *~ assembly nyelv*

Színezett Petri hálók:

- színezett tokenek
- tokenek multihalmaza
- tokenszám és -szín manipuláció
- inicializáló kifejezések
- őrfeltételek
- élkifejezések (változókkal)
- lekötés engedélyezése
- konfliktus ugyanazon tranzíció engedélyezett lekötései között is
- *~ magas szintű programnyelv*

Színezett Petri hálók felépítése

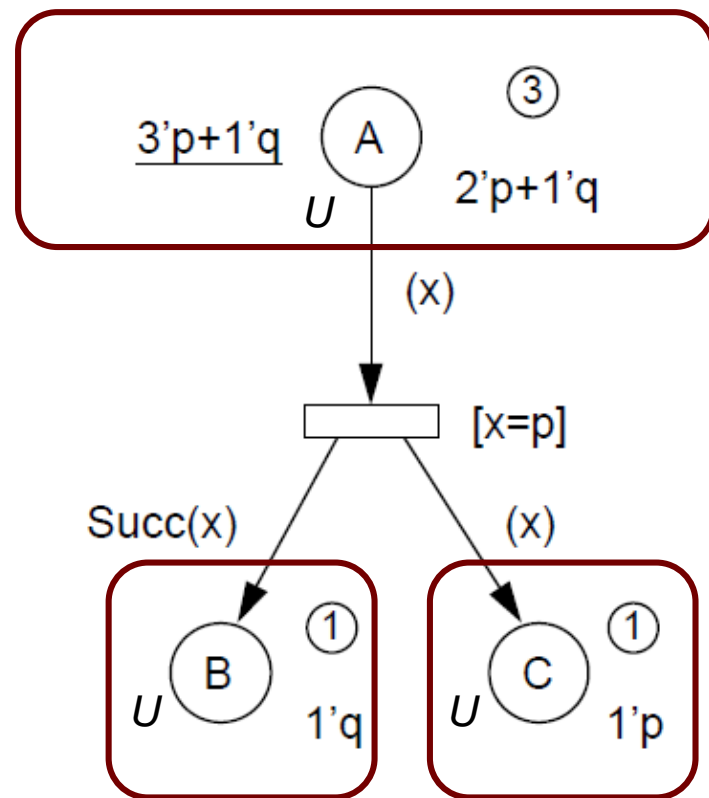
Tokenek kiterjesztései

- Színezett token
 - Adatérték reprezentálása
- Színhalmaz (színosztály)
 - Adattípus megadása
 - Pl. felsorolás (with),
alaptípus (int, bool, string, ...)
 - Komplex is lehet
 - Pl. color P = product U * I
- Változók (token hordozása)
 - Típus megadással (színhalmaz)
 - Pl. var x: U
- Deklaráció: formális nyelven
 - Standard ML

```
color U = with p | q;  
color I = int;  
color P = product U * I;  
color E = with e;  
var x : U;  
var i : I;
```

Petri háló helyek kiterjesztései

- Hely színhalmaza (típusa)
 - Milyen típusú tokeneket képes fogadni a hely (a deklarált típusok egyike)
 - Megjelenítés: hely mellé írva, dőlten
- Inicializáló kifejezés
 - A kezdeti jelölés megadása
 - A színhalmaz egy **multi-halmaz**a (egy adott színű tokenből több is lehet)
 - Megjelenítés: hely mellé írva, aláhúzva
Pl. $\underline{3'p + 1'q}$ darabszám jelölés
- Aktuális jelölés
 - Az aktuális tokenek megadása
 - Megjelenítés: hely mellé írva; bekarikázott szám: darabszám, részletes megadás: pl. $2'p + 1'q$



Petri háló tranzíciók kiterjesztései

- Élkiefejezések

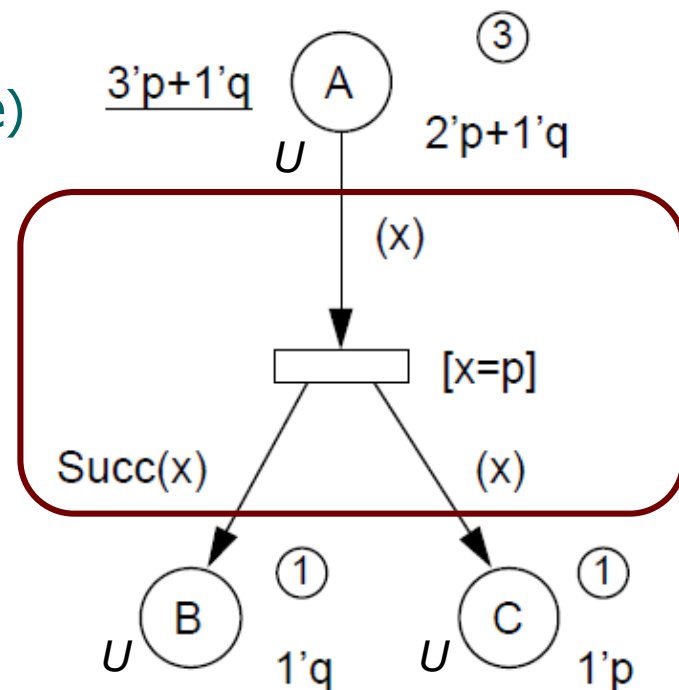
- Elveendő tokenek (engedélyezés feltétele), illetve kirakott tokenek (tüzelés eredménye)
- Típusa: az élhez tartozó hely típusa (egy tranzícióhoz több „típusú” él húzható)
- Megjelenítés: él mellett, pl. (x) , $\text{Succ}(x)$

- Változó használható az élkiefejezésben

- Adatértékeket (színezett tokeneket) lehet hozzá kötni a bemeneti helyről
- Típusa kell legyen (milyen színhalmaz elemei köthetők hozzá)
- Egy tranzíció esetén: azonos kötéssel, ha a tranzíció több élkiefejezésében is szerepel

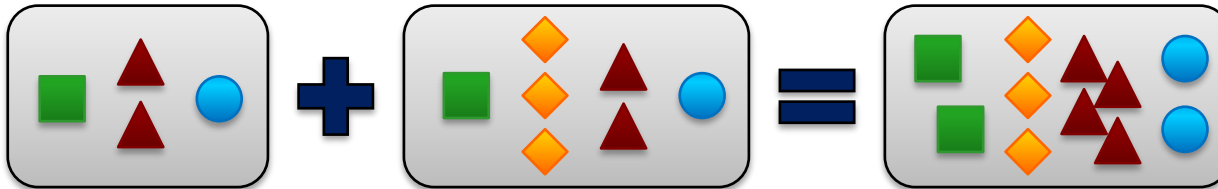
- Örfeltétel

- Boole-kifejezés, a tranzíció engedélyezettségéhez igaz kell legyen
- Megjelenítés: tranzíció mellett, pl. $[x=p]$

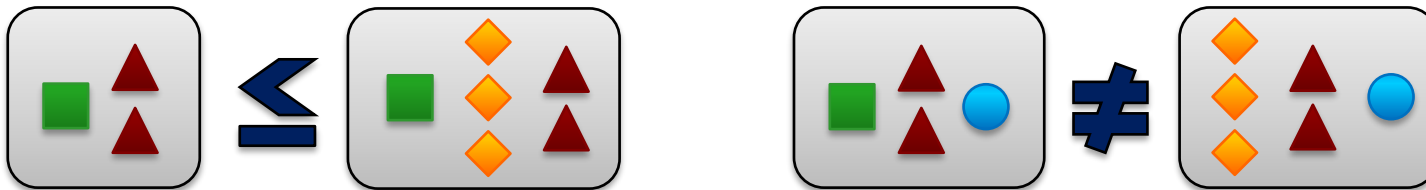


Élkifejezések: Műveletek multihalmazokkal

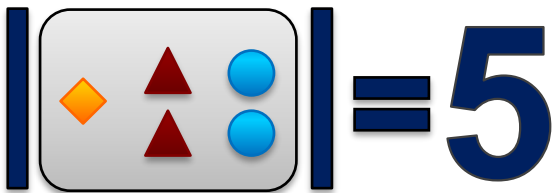
Összeadás: $a_1 + a_2$



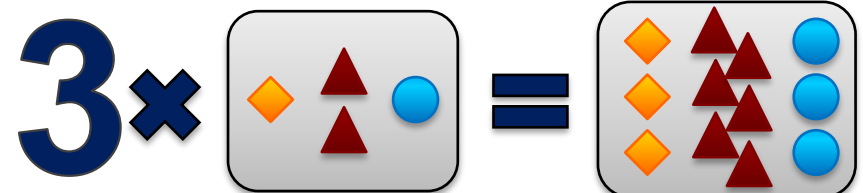
Összehasonlítás: $a_1 \leq a_2$, $a_1 \neq a_2$



Számosság: $|a_1|$



Szorzás skalárral: $n \cdot a_1$



Kivonás: $a_1 - a_2$ (csak ha $a_1 \geq a_2$)



Színezett Petri háló felépítés: Összefoglalás

- Háló struktúra (elnevezésekkel):
 - Megjeleníti a rendszer vezérlési illetve adatfolyam struktúráját
 - Helyek, tranzíciók, élek
- Deklarációk:
 - Definiálják az adatstruktúrákat és a felhasznált függvényeket
 - Színosztályok, változók, függvények megadása
- Kifejezések:
 - Megadják a háló szintaktikai és adatmanipulációs elemeit
 - Aktuális jelölések, élkifejezések, őrfeltételek
- Inicializációs kifejezések:
 - Megadják a modell kezdeti jelölését (kezdőállapotát)

```

color U = with p | q;
color I = int;
color P = product U * I;
color E = with e;
var x : U;
var i : I;

```

• CPN háló alkotóelemei:

– Helyek

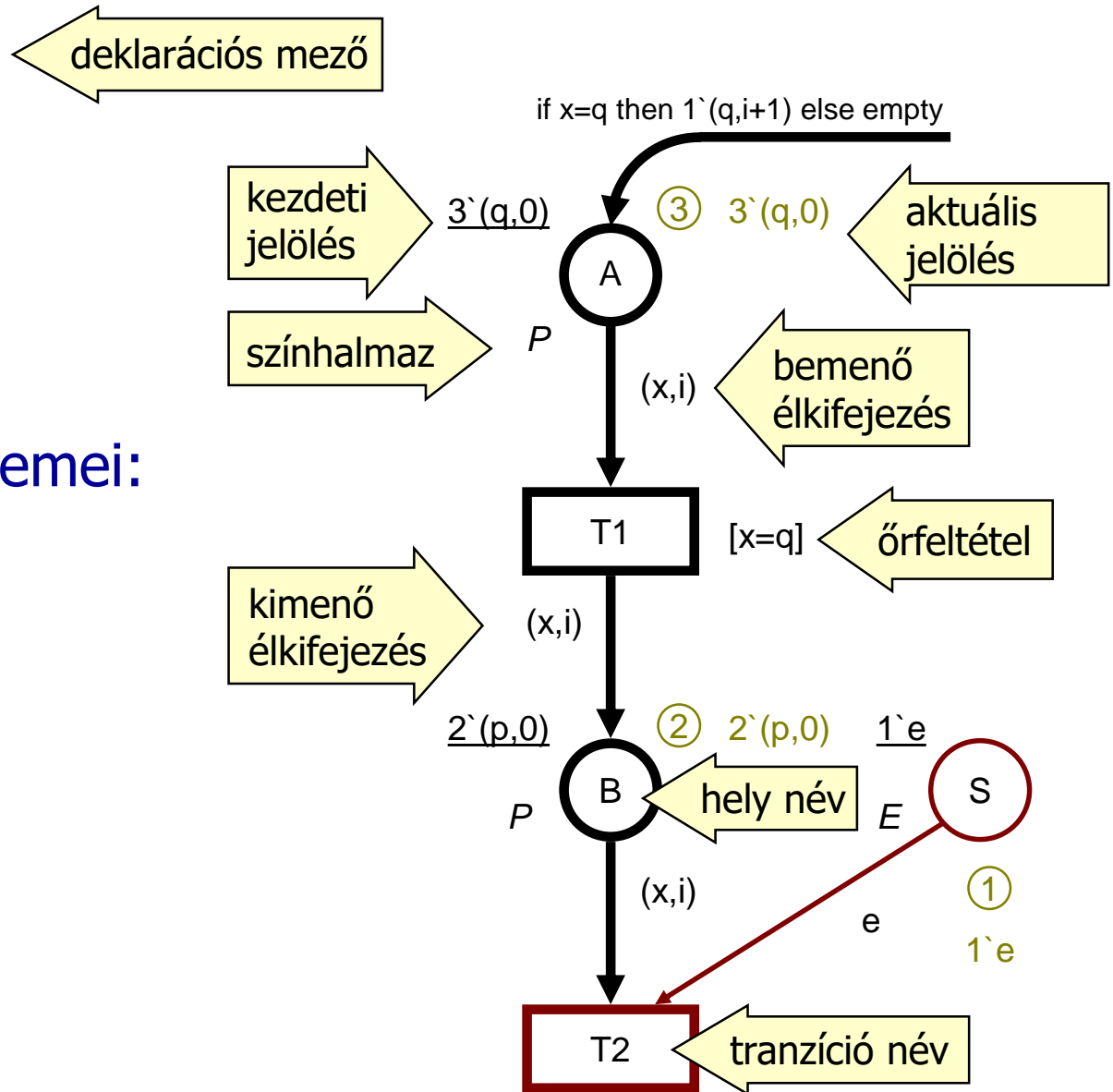
- Név
- Színhalmaz
- Kezdeti jelölés
- Aktuális jelölés

– Tranzíciók

- Név
- Örfeltétel

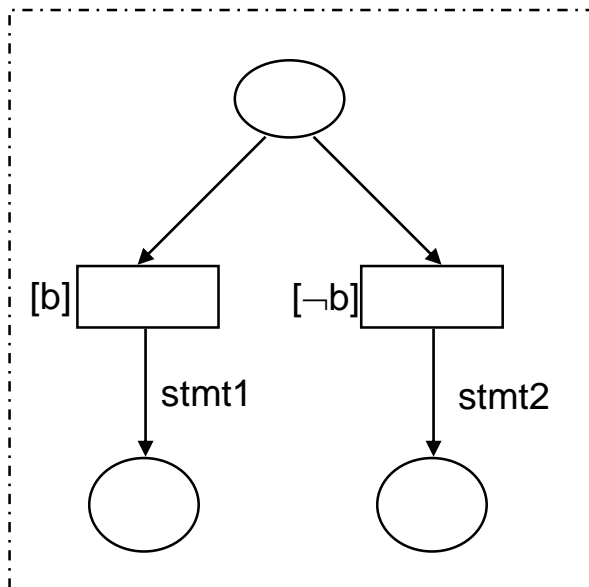
– Élek

- Élkifejezések (bemenő, kimenő)

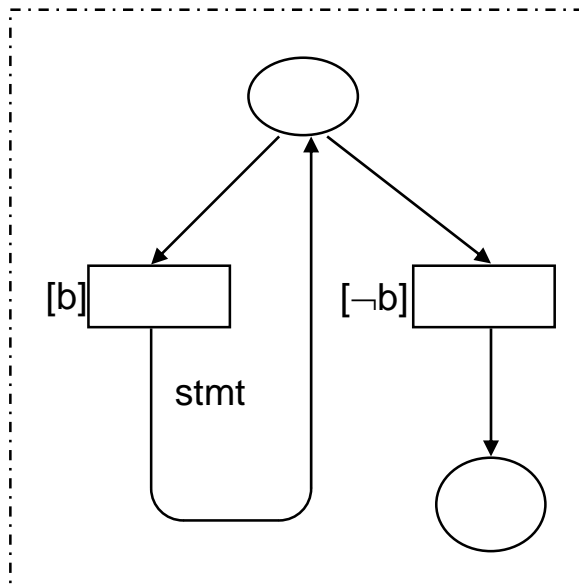


Példa: Vezérlési struktúrák 1.

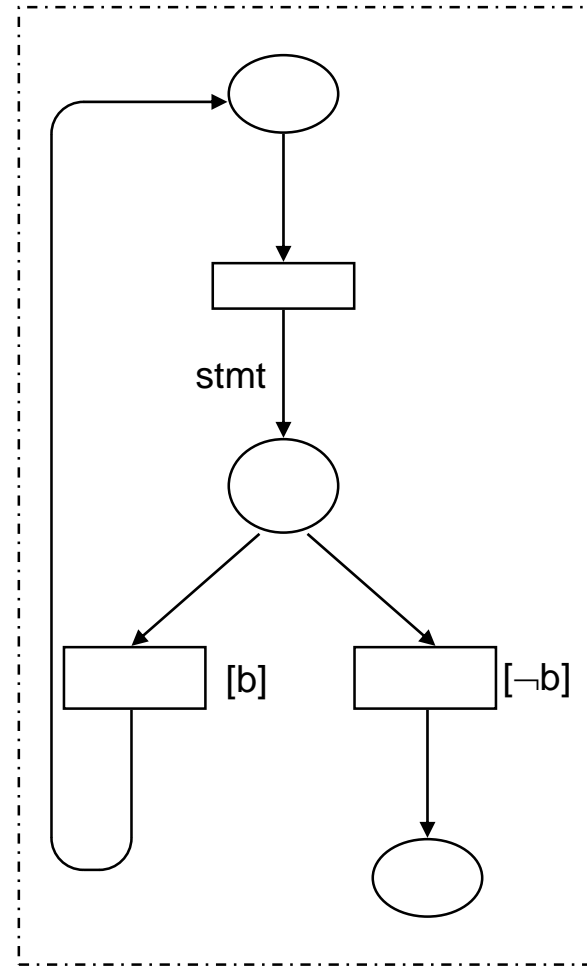
IF b THEN stmt1 ELSE stmt2



WHILE b DO stmt

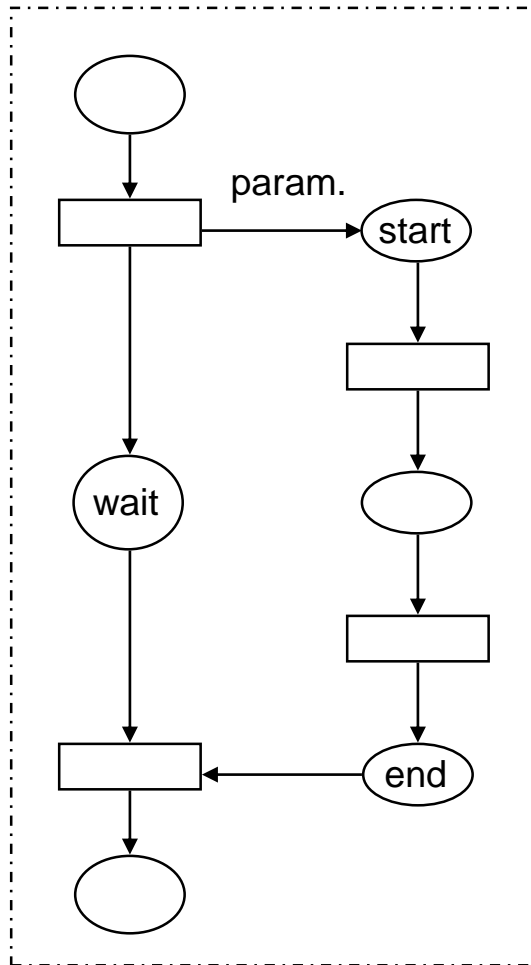


REPEAT stmt UNTIL b

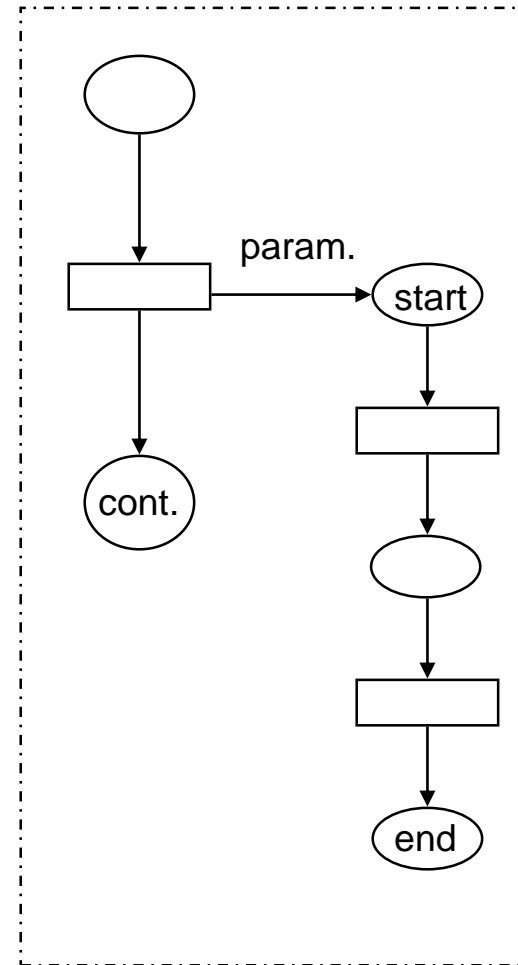


Példa: Vezérlési struktúrák 2.

Alprogram hívás



Processz indítása



Coloured Petri Nets (CPN) hálóknak eszközkészlete a CPN Tools eszközben

CPN hálók: Színosztályok definiálása

- Egyszerű színosztályok
 - Színezetlen tokenek:
`unit`
 - Alapvető típusok:
`int, bool, real, string`
 - Részhalmaz:
`with 1..4;`
 - Felsorolás:
`with true | false;`
 - Indexelés (vektor):
`index d with 1..4;`
- Az alábbi elemek definíciójában szerepelnek:
 - Összetett színosztályok
 - Változók, konstansok
 - Függvények

Összetett színosztályok

- Módszerek kombinált színosztályok létrehozására
 - Unió képzés:
`union S + T;`
 - n-esek képzése (Descartes-szorzat):
`product P * Q * R;`
 - Rekord (címkézett n-esek):
`record p:P * q:Q * r:R;`
 - Lista:
`list int with 2..6;`

További CPN háló elemek: Változók

- Változók

Tokenek szimbolikus nevei

- Változódeklaráció:

```
var proc : P;
```

- Konstansok

Rögzített értékek

- Konstansdeklaráció:

```
val n = 10;
```

```
val d1 = d(1):D;
```

- Az alábbi kifejezésekben:

- Élkifejezések
- Örfeltételek

- Az alábbi deklarációkban:

- Színosztályok
- Függvények
- Élkifejezések, örfeltételek, inicializáló kifejezések

További CPN háló elemek: Függvények

- Függvények

Mellékhatás-mentes SML
nyelvű függvények

– Példa:

```
fun Chopsticks(ph(i)) =  
  1`cs(i) ++  
  1`cs(if i=n then 1 else i+1);
```

- Műveletek, operátorok

Infix jelölésrendszer

- Az alábbi kifejezésekben:

- Színosztályok
- Függvények
- Konstansok
- Élkifejezések, őrfeltételek, inicializáló kifejezések

További CPN háló elemek: Kifejezések

- Háló kifejezések

- Értéke: a változók egy adott lekötésével értékelhető ki
- Típusa: az összes lehetséges kiértékelési eredmény halmaza
- Példák:

`x=q`

`2` (x, i)`

`if x=q then 2`i else empty`

`Mes (s)`

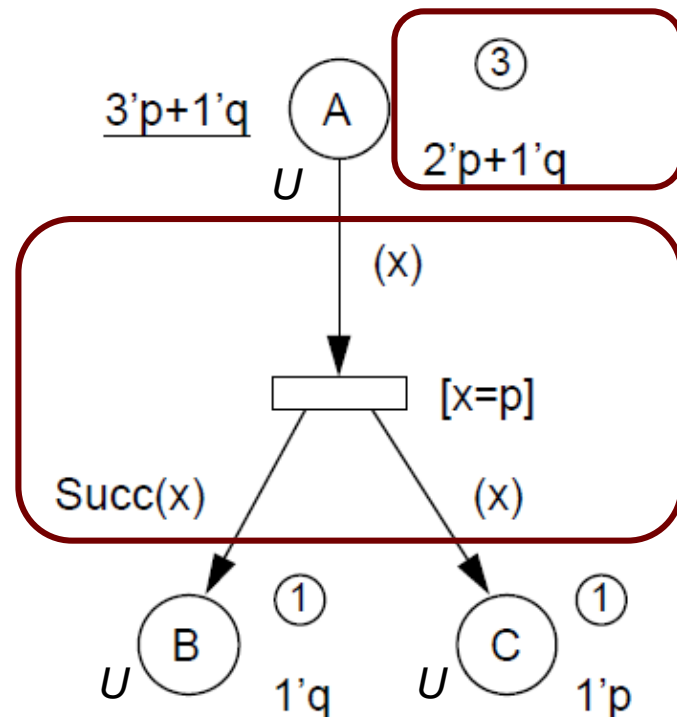
- Felhasználásuk:

- Élkifejezések, őrfeltételek, inicializáló kifejezések

Színezett Petri hálók működése (informális szemantika)

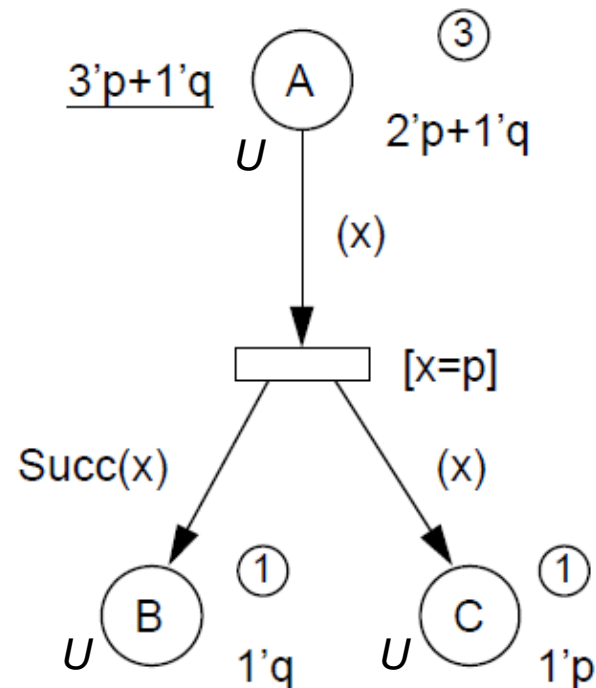
Jelölés és lekötés

- Jelölés:
 - Színezett tokenek eloszlása a helyeken
- Lekötés egy tranzíció élkifejezéseiben:
 - A változót adatértékhez (színezett tokenhez) kötjük a bemeneti helyről
 - Egy tranzíció esetén: egy adott változó minden előfordulása ugyanúgy lesz lekötött (azonos változó ugyanazt az értéket veszi fel)
 - Lekötetlen változó kimenő élen: Típusának bármely értékét felveheti
 - Különböző tranzíciók a lekötés szempontjából függetlenek (azonos nevű változó lekötései itt függetlenek)



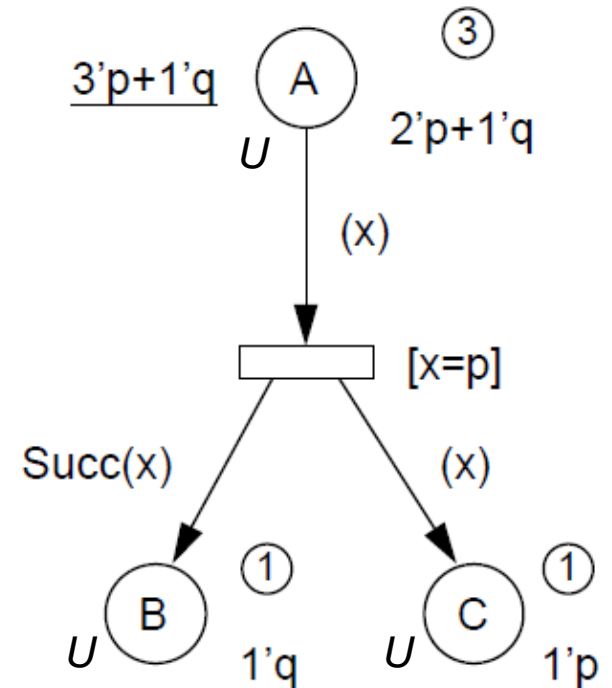
Engedélyezettség

- **Tranzíció engedélyezett egy adott jelölésben egy adott lekötésre:**
 - A bemenő helyek tartalmazzák azokat a tokeneket, ami az élkifejezés értéke az adott lekötésben
 - Az őrfeltétel igaz
 - Ha egy tranzíció engedélyezett egy adott lekötésre, akkor **tüzelhet**
- **Kötési elem tüzeléshez:**
 - Egy (tranzíció, lekötés) pár, pl. $(T1, \langle x=p \rangle)$
 - Engedélyezett lehet egy adott jelölésben \rightarrow tüzelhet
 - Egy tranzíció esetén: **több lekötés**, ezekből **több engedélyezett kötési elem képezhető**; ezek tüzelhetnek



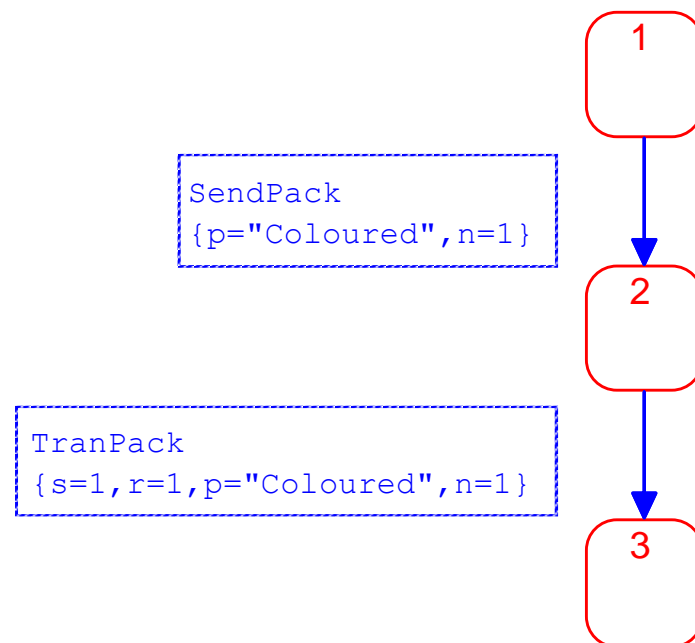
Tüzelés

- Tranzíció tüzel egy **lekötésben** (azaz egy kötési elem tüzel):
 - **Bemenő helyekről** az élkifejezés adott kötésben lévő értéke által meghatározott (számú, színű) token **elvétele**
 - **Kimenő helyekre** az élkifejezés adott kötésben lévő értéke által meghatározott (számú, színű) token **odarakása**
- Lépés (a tüzelés hatása az állapottérben):
 - A színezett Petri háló egy jelöléséből egy másik lesz



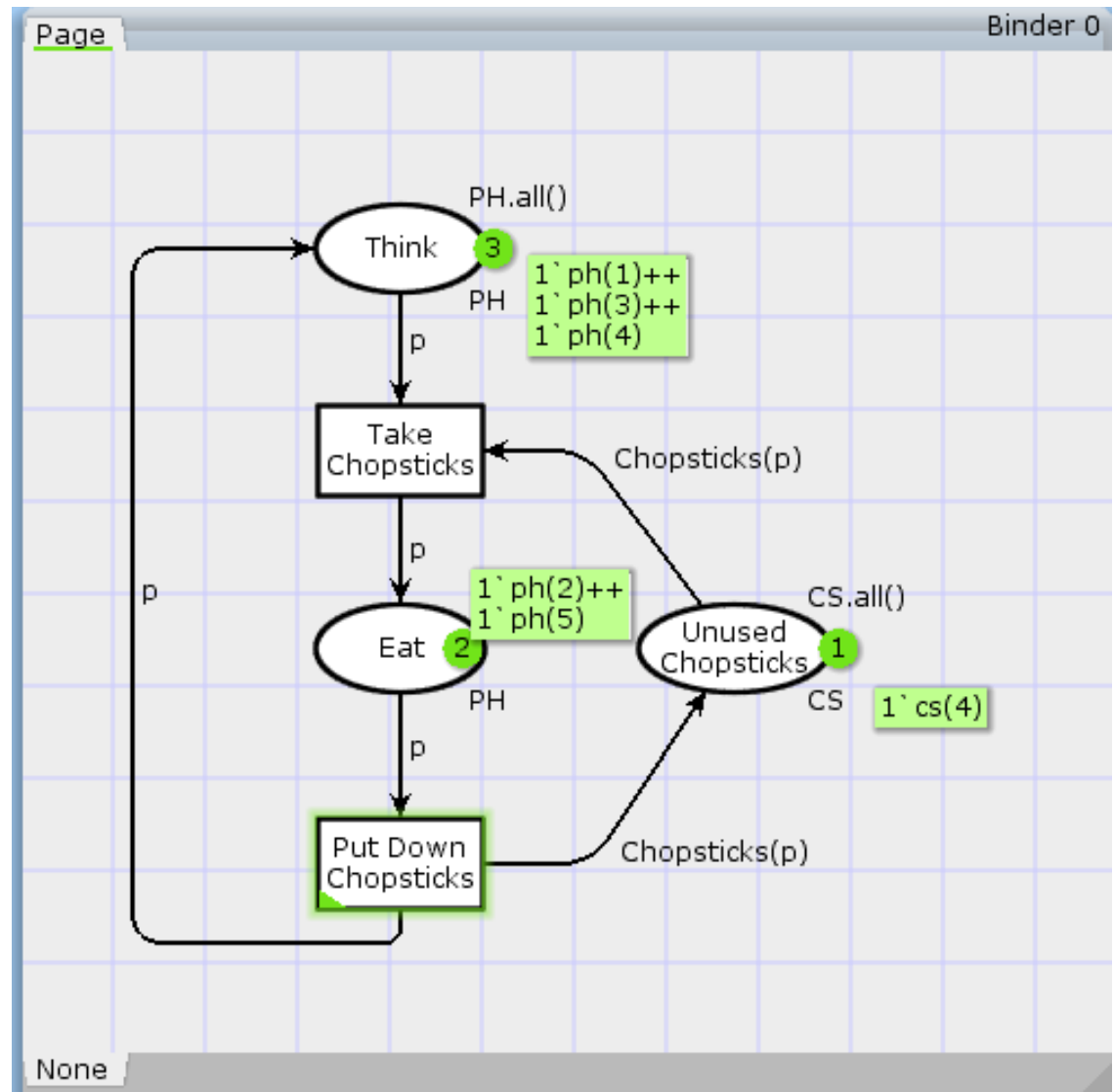
Elérhetőségi gráf

- Csomópont az elérhetőségi gráfban:
 - Egy **jelölés**: tokenek színe és száma minden helyre
 - Sorszám rendelhető hozzá, elődök és utódok lehetnek
- Él az elérhetőségi gráfban:
 - Egy kötési elem, amiben tüzelés történt: **tranzíció** és a **lekötés** megadása
 - Definíció szerint egyszerre egy tüzelő kötési elem van feltüntetve az elérhetőségi gráfban



CPN Tools demo

- Étkező filozófusok modellje
- Szimuláció: Lekötés kiválasztása, tüzelés
- Elérhetőségi gráf felvétele



Példa: Egy egyszerű commit protokoll

A probléma leírása:

- Egy rendszerben három egység van: c_1 , c_2 és c_3
- Közülük véletlenszerűen az egyik lesz a koordinátor, aki kérést küld a másik kettőnek
- A kérés hatására a felkért egység vagy **abort**, vagy **commit** szavazatot ad
- A két egység szavazata alapján a koordinátor dönt: ha mindkét egység **commit** döntést hozott, akkor a döntés **commit**, egyébként **abort**
- A koordinátornak nincs szavazata

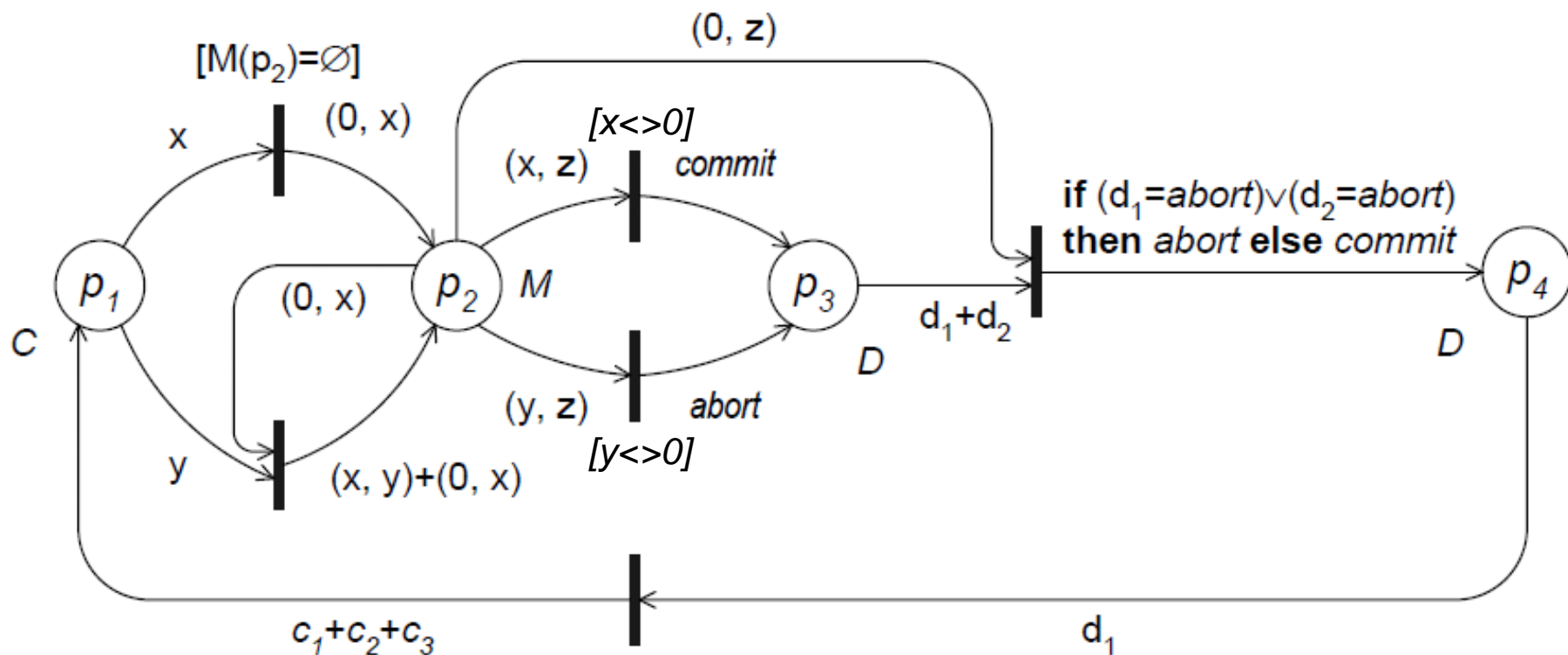
Példa: Az egyszerű commit protokoll modellje

- Három színosztály, ebből kettő egyszerű halmaz:
 - $C = \{0, c_1, c_2, c_3\}$ az egységeknek,
 - $D = \{\text{commit}, \text{abort}\}$ a szavazatoknak / döntéseknek
- Egy pedig kompozit színosztály:
 - $M = C \times C$, a felkéréseknek (ki kit kért fel szavazásra);
 - a $(0, x)$ token: a koordinátort senki sem kéri fel
- Öt változó: $x, y, z \in C$; és $d1, d2 \in D$
- Az **if** élkifejezés: a programozási nyelveknél megszokott jelentéssel
- A háló kezdőállapotában a p_1 helyen 3 token van:
 $M(p_1) = 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3$, a többi hely üres
- A \emptyset jel az üres halmazt jelöli

Példa: Az egyszerű commit protokoll modellje

- Színezett Petri háló modell:

- p_1 : Résztvevők (kezdeti állapotban c_1, c_2, c_3 tokenek)
- p_2 : Kérések
- p_3 : Szavazatok
- p_4 : Döntés



Színezett Petri hálók formális definíciója és szemantikája

Színezett Petri hálók formális definíciója

$$\text{CPN} = (\Sigma, P, T, A, C, G, E, M_0)$$

Színhalmazok: $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\kappa\}$

Helyek: $P = \{p_1, p_2, \dots, p_\pi\}$

Tranzíciók: $T = \{t_1, t_2, \dots, t_\tau\}$

$$P \cap T = \emptyset$$

Élek: $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$

Színkészlet: $C : P \mapsto \Sigma$

Örfeltétel: $G : \forall t \in T, [\text{Type}(G(t)) = \mathbb{B} \wedge \text{Type}(\text{Var}(G(t))) \subseteq \Sigma]$

Élkifejezés: $E : \forall a \in A, [\text{Type}(E(a)) = C(p)_{\text{MS}} \wedge \text{Type}(\text{Var}(E(a))) \subseteq \Sigma]$

Kezdőállapot: $M_0 : \forall p \in P, [\text{Type}(M_0(p)) = C(p)_{\text{MS}}]$

A formális definíciókban alkalmazott jelölések

- Egy v változó típusa (színosztálya): $\text{Type}(v)$
- Egy $expr$ kifejezés típusa: $\text{Type}(expr)$
- Egy $expr$ kifejezésben szereplő változók halmaza: $\text{Var}(expr)$
- A v változó egy lekötése: $b(v) \in \text{Type}(v)$
- Kifejezés által b lekötésre visszaadott érték: $expr\langle b \rangle$
ahol $v \in \text{Var}(expr)$ és $b(v) \in \text{Type}(v)$

Multihalmazok

- Multihalmaz: azonos elemből több példány is lehet benne
 - Leképezés: $\text{Bag}(A)$, az A elemkészletre, $a \in [A \rightarrow \mathbf{N}]$
 - Formálisan: $a = \sum_{x \in A} a(x) \cdot x$ más jelölés (CPN): $a = \sum_{x \in A} a(x)'x$
- Műveletek multihalmazokkal:
 - Összehasonlítás: $a_2 \neq a_1$ ha $\exists x \in A, a_2(x) \neq a_1(x)$
 $a_2 \leq a_1$ ha $\forall x \in A, a_2(x) \leq a_1(x)$
 - Számosság: $|a| = \sum_{x \in A} a(x)$
 - Összegzés: $a_1 + a_2 = \sum_{x \in A} (a_1(x) + a_2(x)) \cdot x$
 - Különbség: $a_1 - a_2 = \sum_{x \in A} (a_1(x) - a_2(x)) \cdot x$ feltéve, hogy $a_2 \leq a_1$
 - Szorzás skalárral: $n \cdot a = \sum_{x \in A} (n \cdot a(x)) \cdot x$

Multihalmazok (folytatás)

- **Unió, multihalmazok egyesítése:** $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_m$
 - **Tartomány:** $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$
 - **Eleme:** $e_i \in \bigcup_1^m A_k$ ha $\exists A_j, e_i \in A_j$
- **n-esek képzése:** $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$
 - **Tartomány:** $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
 - **Eleme:** $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \in \prod_1^n A_j$ ha $\forall e_i \in A_i$
 - **Általánosítás:** $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

Élkifejezések

- **Használhatók: Változók**
 - Rendelkeznek típussal: $\text{Type}(v)$
 - Értékük a típushoz tartozó multihalmaz egy eleme lehet
- **Lezárt élkifejezés: nem tartalmaz változókat**
- **Nyílt élkifejezés: változókat tartalmaz, amelyeket le lehet kötni egy értékkel**
 - **Lekötés:** egy konkrét értékhozzárendelés minden változóhoz
 - Adott lekötéssel az élkifejezés kiértékelhető
 - **Rendelkezik típussal:** $\text{Type}(expr) = C(p)_{MS}$
 - Az értékül kapott színosztály típusa
 - **Kifejezésben szereplő változók halmaza:** $\text{Var}(expr)$

Lekötött és lekötetlen változók

- **Lekötött változók**

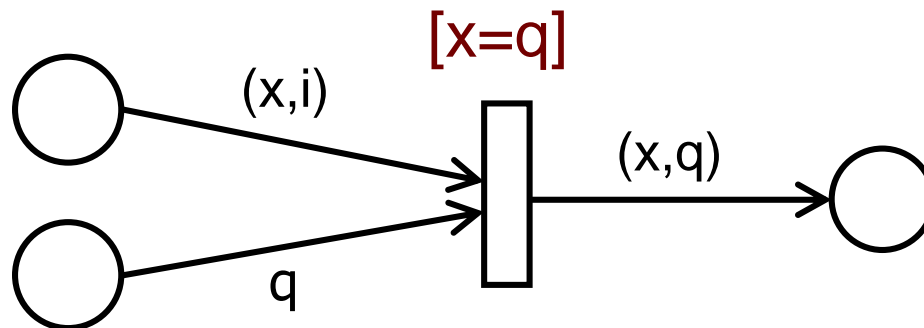
- Az értékhozzárendelést a bemenő élek határozzák meg
- Konzisztencia: változó értéke lekötésen belül azonos
 - Minden, a tranzícióhoz tartozó élen: azonos név → azonos érték

- **Lekötetlen változók**

- Csak kimenő élkifejezésekben szereplő változók
- Az engedélyezés nem rendelt hozzá értéket: lekötetlen
- Tüzeléskor le kell kötni:
 - A színosztályából bármilyen értéket felvehet
 - Annyi lehetséges lekötés, amennyi a színosztály számossága
 - Nemdeterminisztikus választás

Őrfeltételek

- Tranzícióhoz rendelt őrfeltétel
 - Multihalmazok felett értelmezett kifejezés
 - Boolean visszatérési értékkel
- „Igaz” kiértékelési érték esetén engedélyezi a tranzíciót
 - „Szűri” az engedélyezett lekötéseket



Engedélyezetség színezett Petri hálóokban

- Tranzíció lekötése

- Érvényes lekötés: $\forall v \in \text{Var}(t): b(v) \in \text{Type}(v) \wedge G(t)\langle b \rangle$

$$\text{Var}(t) = \{v \mid v \in \text{Var}(G(t)) \vee \exists a \in A(t): v \in \text{Var}(E(a))\}$$

- Az összes érvényes lekötés halmaza: $B(t)$

- Egy érvényes lekötés **engedélyezett**, ha

- Örfeltétel igaz

- A bemenő helyeken van elég színezett token (lásd $E^-(p,t)\langle b \rangle$ élkifejezések) és a tiltó élek nem tiltják le a tüzelést (lásd $E^h(p,t)\langle b \rangle$ élkifejezések):

$$\forall p \in \bullet t: E^-(p,t)\langle b \rangle \leq M(p) \wedge E^h(p,t)\langle b \rangle > M(p)$$

Tüzelés prioritásos színezett Petri hálóokban

- Egy engedélyezett tranzíció tüzelhet, ha magasabb prioritású t' tranzíció nem engedélyezett b' lekötésben, azaz
 - Ennek bemenő helyein nincs elég színezett token (lásd $E^-(p,t')\langle b' \rangle$ élkifejezések), vagy a tiltó élei tiltják le a tüzelését (lásd $E^h(p,t')\langle b' \rangle$ élkifejezések),
 $\forall t', \pi(t') > \pi(t) : \exists p \in \bullet t' :$
$$E^-(p,t')\langle b' \rangle > M(p) \vee E^h(p,t')\langle b' \rangle \leq M(p)$$
 - vagy az őrfeltétele nem igaz
 $\neg G(t')\langle b' \rangle$

Tüzelés színezett Petri hálóokban

- Tüzelés menete:

- Engedélyezett lekötések keresése

- Meghatározzák a bemenő élkifejezések, őrfeltételek

- Tranzíció engedélyezett adott lekötéssel → tüzelhet

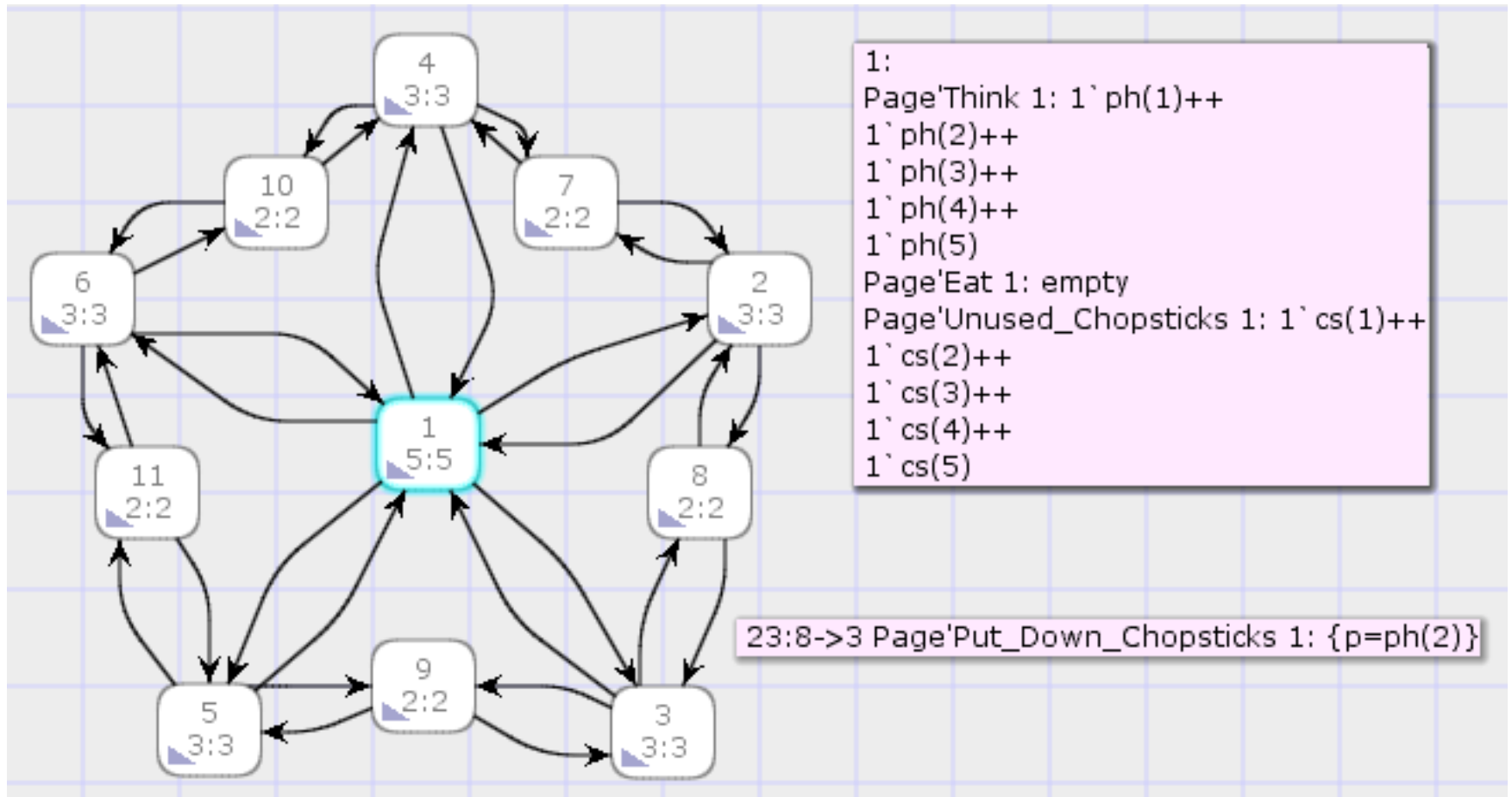
- Tüzelés: Színezett tokenek elvétele a bemenő helyekről, színezett tokenek odarakása a kimenő helyekre

$$\forall p \in P : M'(p) = M(p) - \sum_{p \in \bullet t} E^-(p, t) \langle b \rangle + \sum_{p \in t \bullet} E^+(t, p) \langle b \rangle$$

- Ekkor M' közvetlenül elérhető M -ből: $M \xrightarrow{[(t, b)]} M'$

Színezett Petri hálók dinamikus tulajdonságai

Elérhetőségi gráf (Id. korábban)



- Csomópontok: Egy-egy jelölés (sorszámmal, elődök : utódok számával)
- Élek: Egy-egy tüzelő **kötési elem** (tranzíció és lekötés kifejthető)

Színezett Petri hálók dinamikus tulajdonságai

- A színezetlen hálóknál megismert tulajdonságok kiterjesztései multihalmazokra
- Korlátosság
 - Egy hely **korlátos**, ha a tokenek száma bármely állapotban korlátos
 - n egy felső egész korlát p -re, ha $\forall M \in [M_0\rangle : |M(p)| < n$
 - m egy felső multihalmaz korlát p -re, ha $\forall M \in [M_0\rangle : M(p) < m$
- Visszatérő tulajdonság
 - Egy **visszatérő** állapotba mindig lehetséges visszajutni:
 - M egy **visszatérő** állapot, ha $\forall M' \in [M_0\rangle : M \in [M'\rangle$

Színezett Petri hálók dinamikus tulajdonságai

- Élőség

Az élőség garantálja, hogy a **lekötési elemek** egy része aktív marad (azaz tranzíció valamilyen lekötésben tüzelni tud)

– **Halott állapot** (deadlock): egy lekötési elem sem engedélyezett

$$\forall b \in BE : \neg M[b]$$

– **Halott tranzíció**: egyik lekötése sem válhat engedélyezetté

$$\forall M' \in [M], b \in B(t) : \neg M'[b]$$

– **Élő tranzíció**: nincs olyan elérhető állapot, amelyből induló trajektóriákon minden lekötése halott lenne

$$\forall M' \in [M_0], \exists M'' \in [M'], \exists b \in B(t) : M''[b]$$

Színezett Petri hálók dinamikus tulajdonságai

- Fair tulajdonság tüzelési szekvenciákban

Fairség megmutatja, hogy egy lekötési elem milyen gyakran tüzel

- Elfogulatlan (impartial) tranzíció: végtelen sokszor tüzel
(itt $OC()$ az előfordulások száma értelemszerű paraméterekkel)

$$\forall b \in B(t), |\sigma| = \infty : OC_b(\sigma) = \infty$$

- Fair tranzíció: végtelen sok engedélyezés \Rightarrow végtelen sok tüzelés

$$\forall b \in B(t), |\sigma| = \infty : EN_b(\sigma) = \infty \Rightarrow OC_b(\sigma) = \infty$$

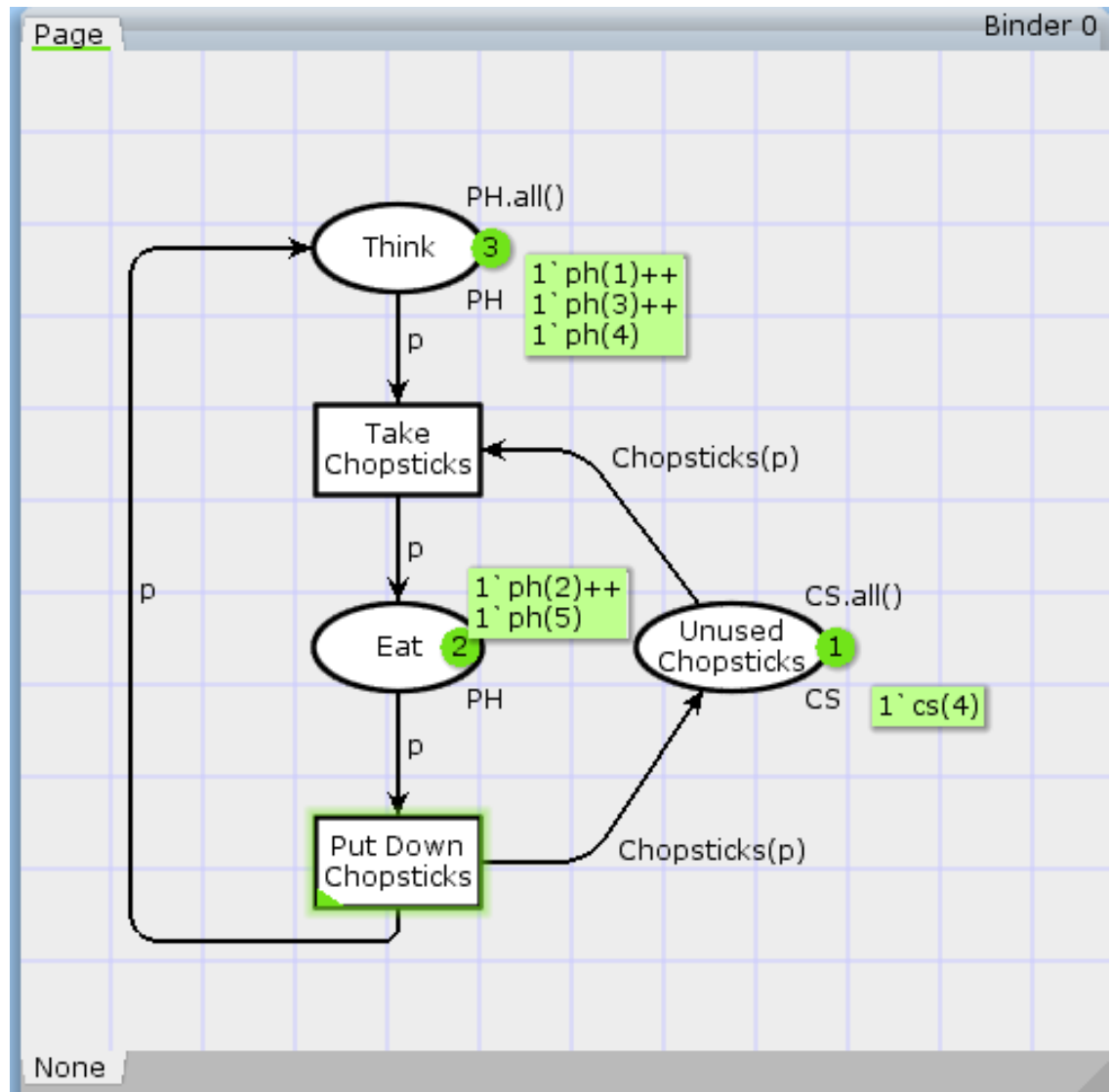
- Igazságos (just) tranzíció: perzisztens engedélyezés \Rightarrow tüzelés
(nincs perzisztens engedélyezés tüzelés nélkül)

$$\forall b \in B(t), \forall i \geq 1 :$$

$$\left[EN_{b,i}(\sigma) \neq 0 \Rightarrow \exists k \geq i : \left[EN_{b,k}(\sigma) = 0 \vee OC_{b,k}(\sigma) \neq 0 \right] \right]$$

CPN Tools demo

- Étkező filozófusok modellje
- Tulajdonságok: Jelentés generálása
- Lekérdezések (könyvtári ML függvények)



Színezett Petri hálók strukturális tulajdonságai

T-invariáns színezett Petri hálóknban

- Tranzíció invariáns

Olyan σ tüzelési szekvencia, ami nem hat az állapotra:

$$M'(p) = M(p) - \sum_{p \in \bullet t, b \in \sigma} E^-(p, t) \langle b \rangle + \sum_{p \in t \bullet, b \in \sigma} E^+(t, p) \langle b \rangle$$

ahol $M'(p) - M(p) = 0$ minden p -re

$$\text{ekkor } \sum_{p \in \bullet t, b \in \sigma} E^-(p, t) \langle b \rangle = \sum_{p \in t \bullet, b \in \sigma} E^+(t, p) \langle b \rangle$$

P-invariáns színezett Petri hálóokban

- Hely invariáns

- Alapötlet: **Súlyozott tokenösszeg képzése**

$$W_{p_1}(M(p_1)) + W_{p_2}(M(p_2)) + \dots + W_{p_n}(M(p_n))$$

- W_p súlyfüggvény: hely színekészletét egy közös multihalmazra képezi le

- W_p egy **P-invariáns**, ha a súlyozott tokenösszeg állandó

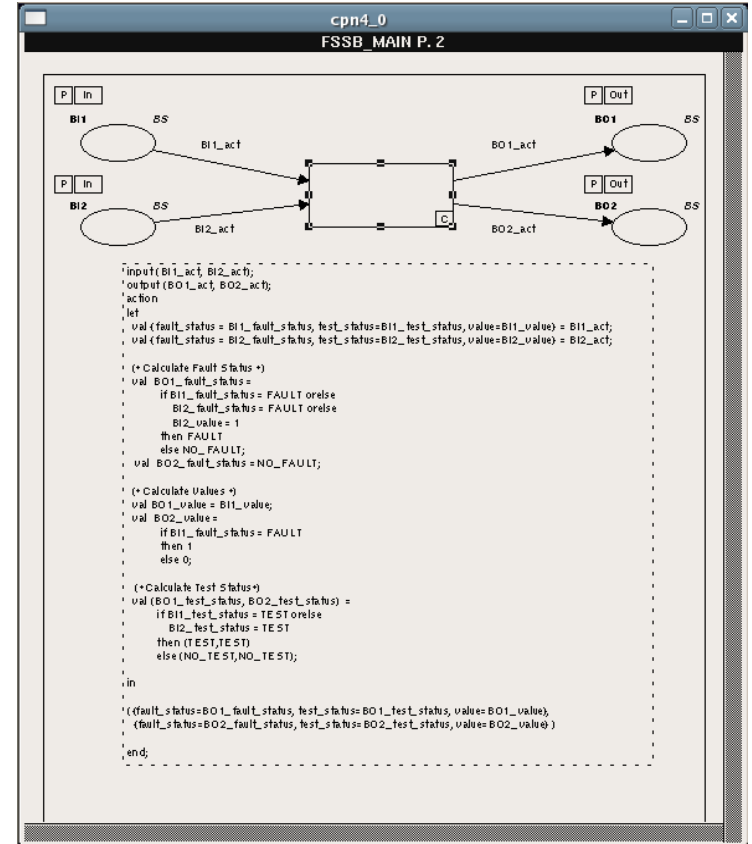
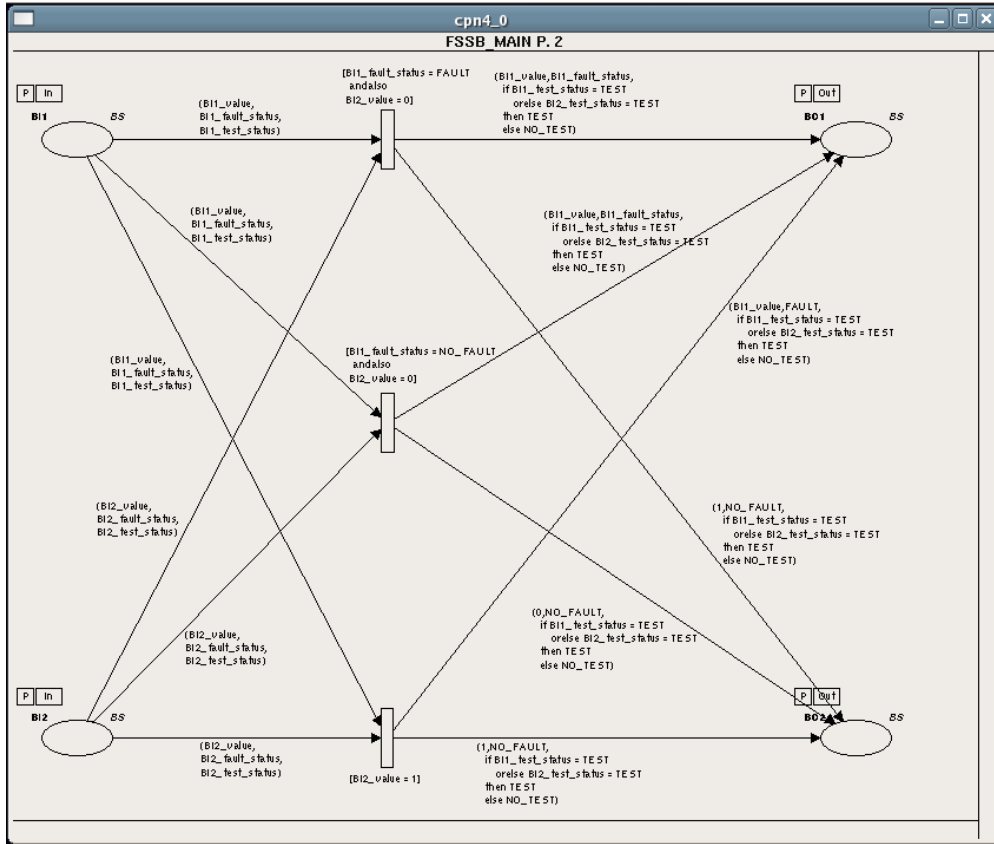
$$\forall M \in [M_0\rangle : \sum_{p \in P} W_p(M(p)) = \sum_{p \in P} W_p(M_0(p))$$

Színezett Petri hálók széthajtogatása

Színezett Petri hálók felépítésének lehetőségei

- CPN hálók: struktúra és adattartalom is lehet
- Szélsőségek
 - Tisztán strukturális információ, nincs adattartalom:
 - Közöséges Petri-háló (ez előállítható CPN-ből is)
 - Nincs struktúra, csak adattartalom (adat és vezérlési információ):
 - Egy hely + egy tranzíció, komplex színosztályok és élkifejezések
- Kompromisszumra van szükség
 - Érthető, áttekinthető struktúrájú CPN háló legyen

Példa: Modellezési lehetőségek



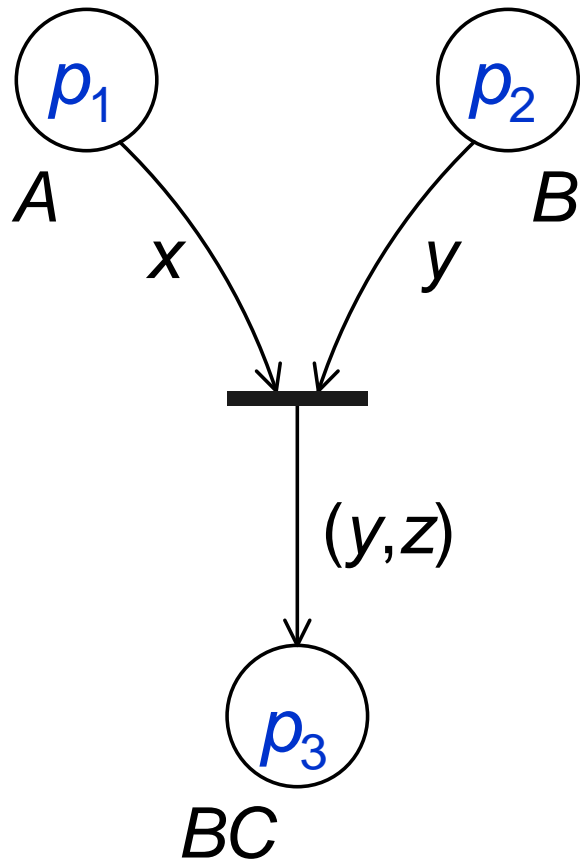
Vezérlési folyamat struktúrában kifejezve

Ugyanez csak kódban
 („összehajtogatva”)

Széthajtogatás

- (Prioritásos) színezett háló modellező ereje megfelel a tiltó éllel kiegészített (prioritásos) színezetlen hálókénak
 - Minden színezett hálónak megfeleltethető egy ekvivalens működésű színezetlen háló (automataelméleti értelemben → lépésekre biszimuláció)
 - Ekvivalens színezetlen háló neve: "széthajtogatott" háló
 - Széthajtogatás:
 - Tokenek adattartalmát struktúrában fejezzük ki
 - Minden eseménynek (tüzelésnek) a színezett hálóban megfelel egy és csak egy esemény (tüzelés) a széthajtogatott hálóban

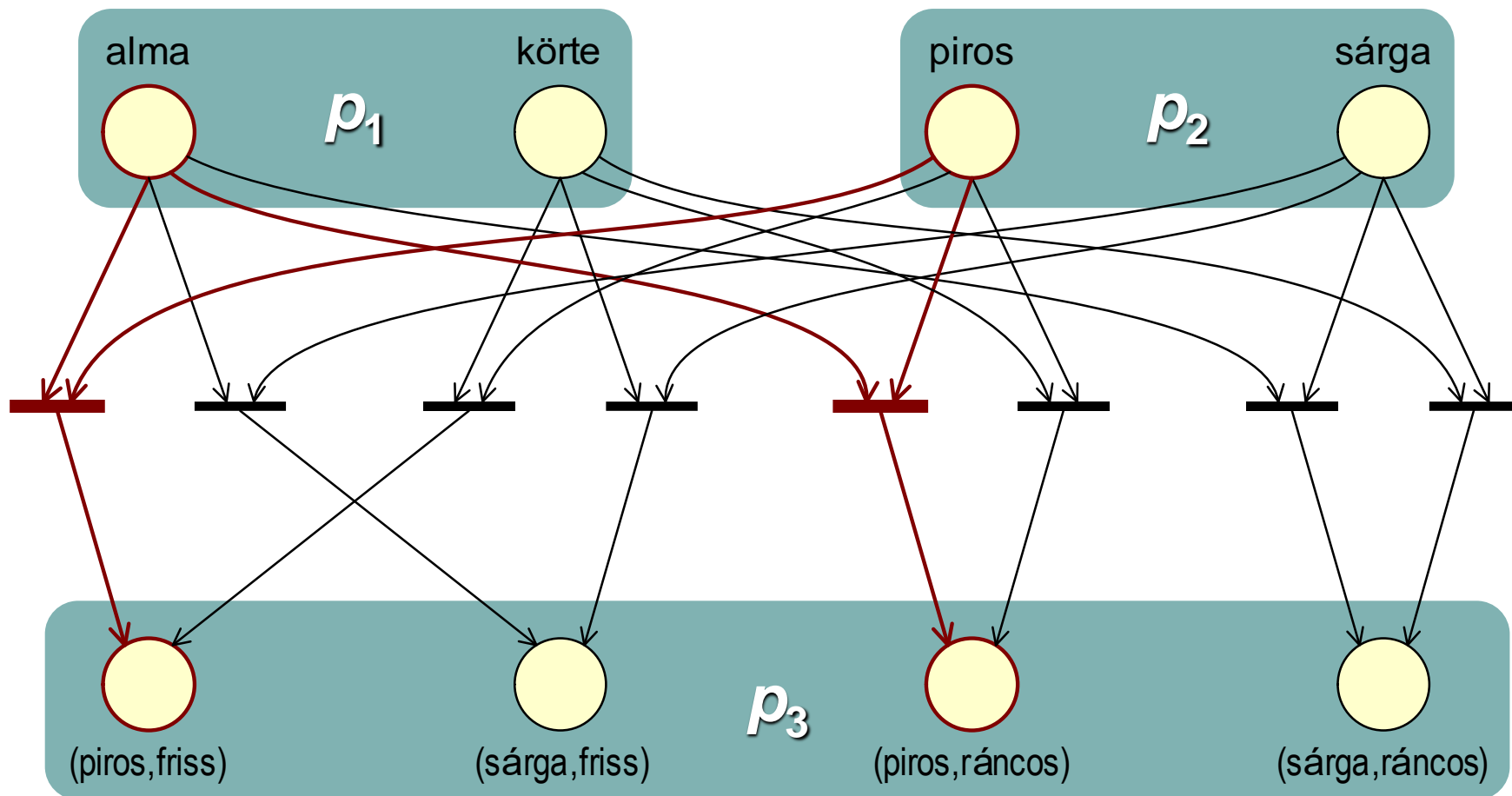
Egyszerű színezett háló



```
color A = with alma | körte;  
color B = with piros | sárga;  
color C = with friss | ráncos;  
color BC = product B*C declare mult;  
var x: A;  
var y: B;  
var z: C;
```

- CPN hely \rightarrow PN helyek a színosztály elemei szerint
- CPN tranzíció \rightarrow PN tranzíciók a lekötések szerint

A széthajtogatott, színezetlen háló



- CPN hely \rightarrow PN helyek a színosztály elemei szerint
- CPN tranzíció \rightarrow PN tranzíciók a lekötések szerint

Hierarchikus színezett Petri hálók

Hierarchikus színezett Petri hálók

- Alhálók integrálása egyetlen összetett CPN hálóvá hierarchikus rendszerben
 - **Lapok:** Színezett Petri háló modellek (alhálók)
 - Hivatkozható a lap neve vagy száma
 - A lapok példányosíthatók (a hierarchia bármelyik szintjén)
 - A jelölés (tokeneloszlás) minden példányra egyedi
 - **Hierarchia:** Lapok struktúrája
 - Fő (prime, top) lap: legfelső szint
 - Másodlagos lap példányok (al-lapok)
 - Azonosítás: lap-példány azonosító szám
 - Laphierarchia gráf

Hierarchikus felépítés eszközei

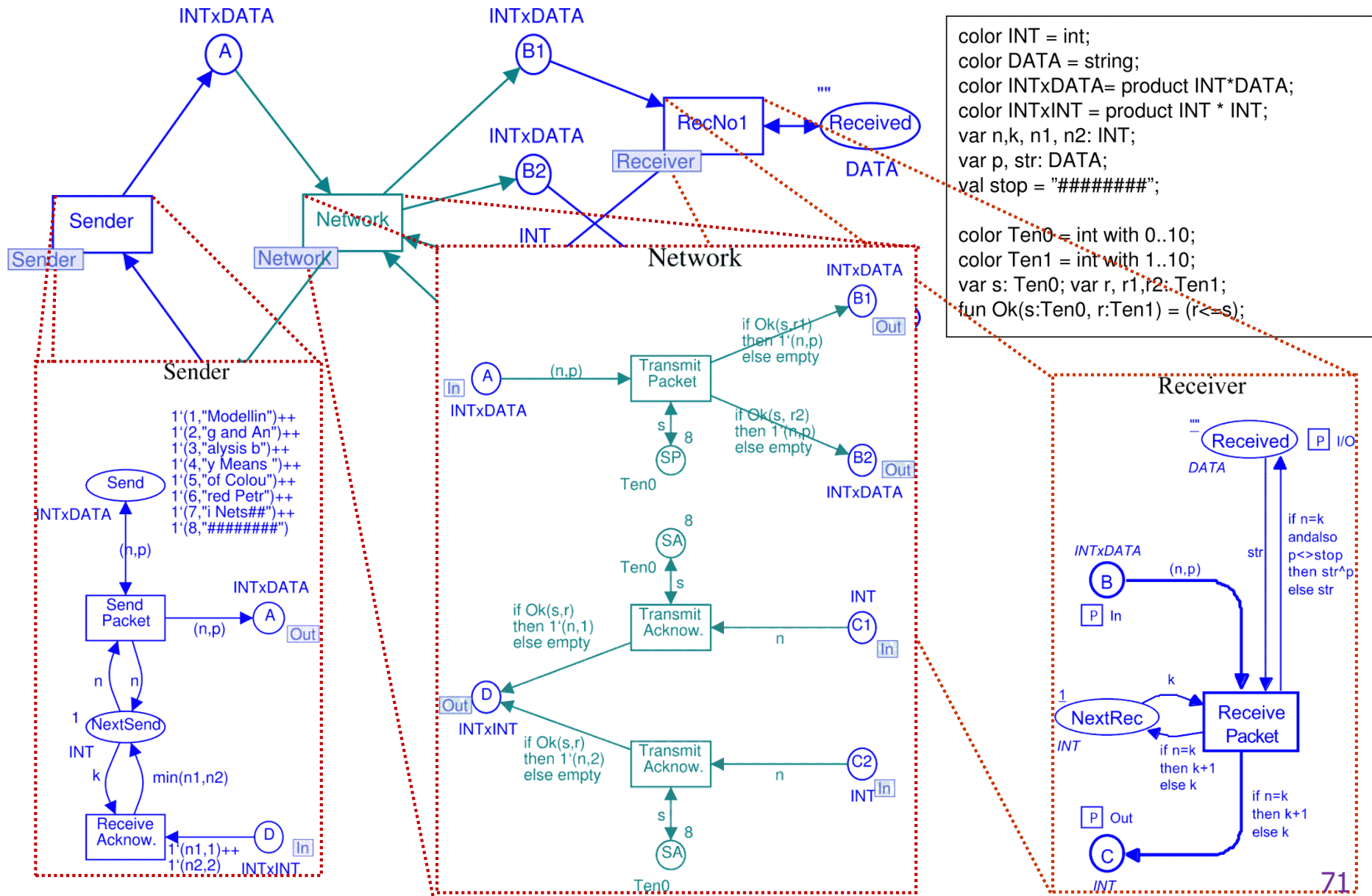
1. Helyettesítő tranzíciók

- Egy al-lap megjelenítése
- Interfészek a lapok között: Helyek
 1. Főlapon: „Socket” helyek → az alhálók beillesztési pontjai
 2. Al-lapon: „Port” helyek → ezekkel kapcsolódik az alháló;
port típus: bemenet, kimenet, I/O (kétirányú), általánosított

2. Fúziós helyek

- Azonos névvel, több példányban létrehozott helyek, amik ugyanazon helyet jelölik a háló több pontján
- A tokenek egyszerre kerülnek be / távolítódnak el egy adott fúziós helyhez tartozó helyhalmazba / helyhalmazból

Példa: Egy egyszerű protokoll hierarchikus változata



Összefoglalás

- Színezett Petri hálók felépítése
 - Színhalmazok, élkifejezések, őrfeltételek
- Színezett Petri hálók működése
 - Engedélyezettség, lekötések, tüzelések
 - Elérhetőségi gráf
- Formális definíciók és szemantika
- Dinamikus tulajdonságok
- Strukturális tulajdonságok
- Széthajtogatás
- Hierarchikus hálók