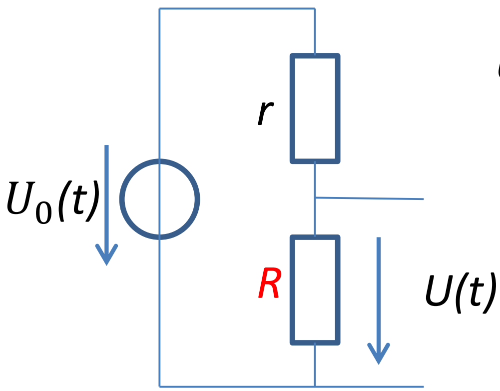
Kiberfizikai rendszerek

A “fizikai” vonatkozásokról …
1. folytatás

2015. november 10.

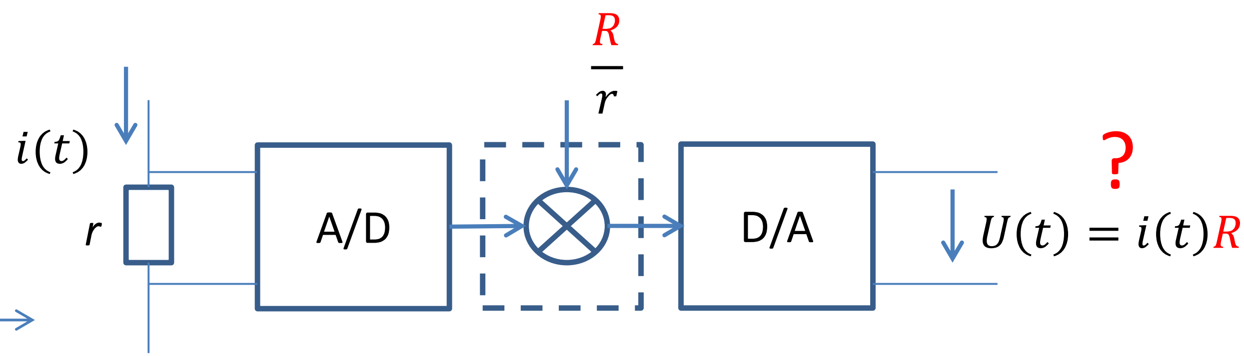
CPS rendszerek modellezési kérdései

Példa: Készítsünk programozható feszültségosztó áramkört-berendezést!

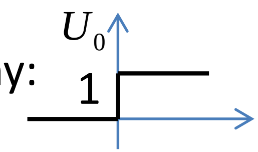


$$U(t) = U_0(t)\frac{R}{r+R} \qquad U(t) = i(t)R \qquad i(t) = \frac{U_0(t)}{r+R}$$

R legyen változtatható! Tegyük *R* helyébe az alábbi áramkört!



Következmény:



$$i(t=0) = \frac{U_0}{r} \qquad U(t=0) = 0$$

µP, DSP, "felhő", …

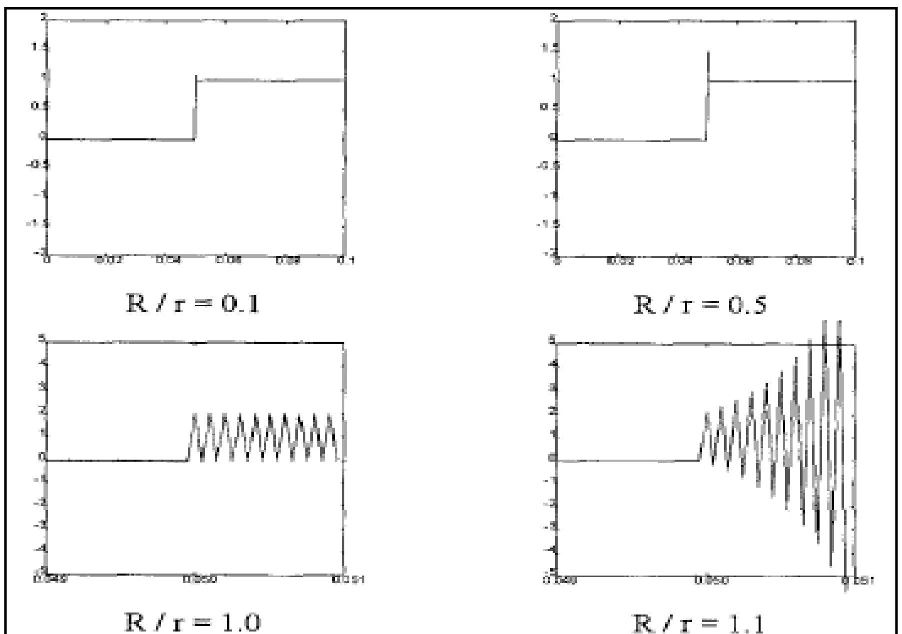
$$\boxed{U(t) = Ri(t-\Delta t)}$$

$$i(t=\Delta t) = \left(U_0 - R\frac{U_0}{r}\right)\frac{1}{r} = \left(1-\frac{R}{r}\right)\frac{U_0}{r} \qquad U(t=\Delta t) = R\frac{U_0}{r}$$

$$i(t=2\Delta t) = \left[U_0 - R\left(1-\frac{R}{r}\right)\frac{U_0}{r}\right]\frac{1}{r} = \left(1-\frac{R}{r}+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)\frac{U_0}{r} \qquad U(t=2\Delta t) = R\left(1-\frac{R}{r}\right)\frac{U_0}{r}$$

CPS rendszerek modellezési kérdései

$$\left.\begin{aligned} i(t=n\Delta t) &= \left(1-\frac{R}{r}+\left(\frac{R}{r}\right)^2 \mp \cdots \pm \left(\frac{R}{r}\right)^n\right)\frac{U_0}{r} \rightarrow \frac{U_0}{r+R} \\ U(t=n\Delta t) &= R\left(1-\frac{R}{r}+\left(\frac{R}{r}\right)^2 \mp \cdots \mp \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}\right)\frac{U_0}{r} \rightarrow U_0\frac{R}{r+R} \end{aligned}\right\} \quad \text{Ha } \frac{R}{r}<1$$



R / r = 0.1

R / r = 0.5

R / r = 1.0

R / r = 1.1

A példából levonható következtetés:

A CPS rendszerek

nem

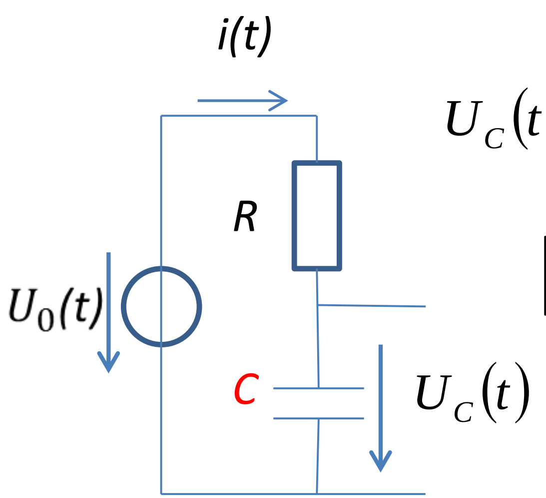
tudják, pontosabban

másképpen

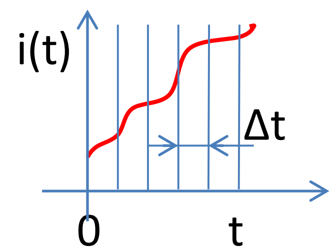
tudják az Ohm törvényt!

CPS rendszerek modellezési kérdései

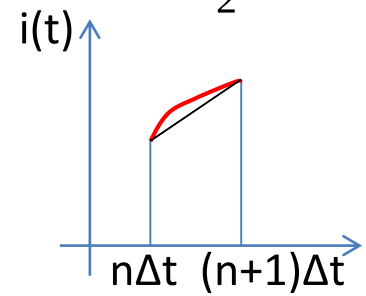
Példa: Készítsünk kapacitás szimulátor berendezést!



$$U_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt+U_C(0)$$



$$\frac{i((n+1)\Delta t)+i(n\Delta t)}{2}\Delta t$$



Integráljunk a trapéz szabállyal!

$$U_C(n\Delta t)=\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{n}\frac{i((k-1)\Delta t)+i(k\Delta t)}{2}\Delta t+U_C(0)$$

Itt van egy kis gond: $i(n\Delta t)=\frac{U_0(t)-U_C(n\Delta t)}{R}$ függ $U_C(n\Delta t)$ -től!

Nem tudjuk Kiszámolni!

A példából levonható következtetés:
A CPS rendszerek nem
tudják a trapéz szabályt**!**

Pedig: a trapéz szabály a bilineáris Z transzformációt valósítja meg!

s helyébe $\frac{2}{\Delta t}\frac{z-1}{z+1}$

A befogadó környezet megismerése

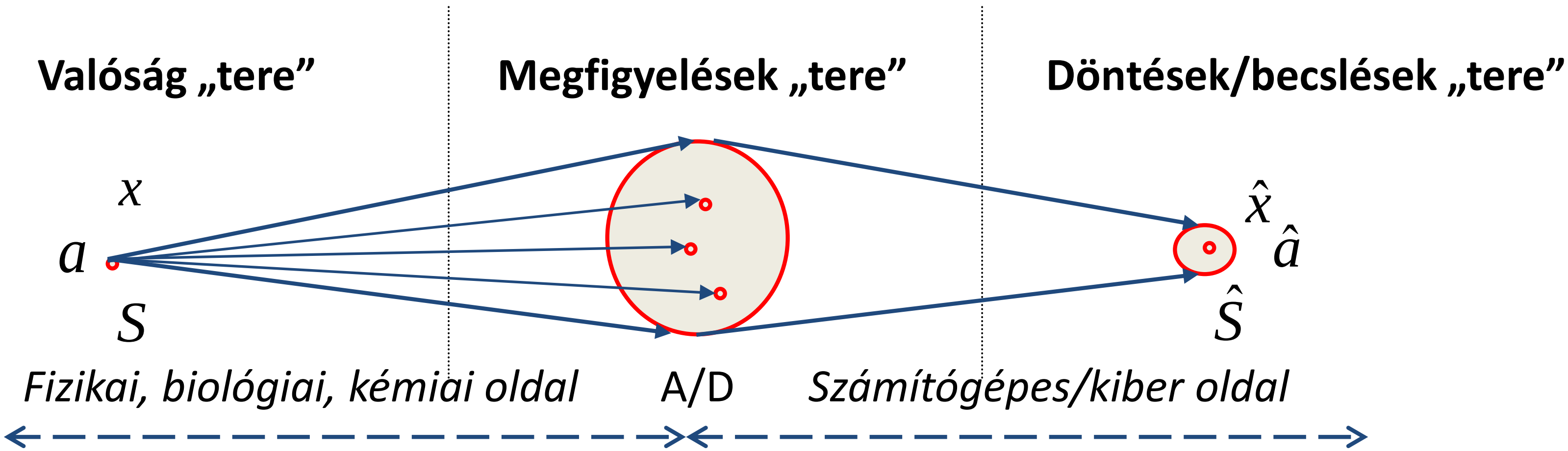
A mérési eljárás: a megismerési folyamat része, amelynek során a rendelkezésünkre álló ismereteinket pontosítjuk, ill. bővítjük. A mérés során **a valóság jelenségeit szeretnénk megragadni.** Ezt a „megragadást” előszeretettel végezzük olyan jellemzőkre építve, amelyek valamilyen értelemben **stabilitást** mutatnak. Ilyen jellemzőkhöz (is) **absztrakció** révén jutunk.

Kiemelt szerephez jutnak az ***állapotváltozók (x)***, amelyek változásai a kölcsönhatások révén fellépő energia-folyamatokhoz köthetők (feszültség, nyomás, hőmérséklet, sebesség, stb.) a ***paraméterek (a)***, amelyek a kölcsönhatások intenzitásviszonyait ragadják meg, és a ***struktúrák (S)***, amelyek a rendszer-komponensek kapcsolatait írják le.

A megismerés **kölcsönhatás(ok)** révén válik lehetővé. Ennek eszköze az **érzékelő**.

A ***valóság „tere”*** egy olyan absztrakció, amelyben a vizsgált jellemzők konkrét értékei a tér egy pontjának felelnek meg. A mérés előtt a pont koordinátáit nem ismerjük. A mérések során egy-egy ilyen pont koordinátáinak meghatározására (megmérésére) törekszünk, ami – ismert módon – csak közelítőleg lehetséges (a mérés hibával terhelt). További nehézség, hogy a mérendő mennyiséghez sok esetben nem férünk közvetlenül hozzá, ezért többnyire csak valamilyen leképzéséből tudunk kiindulni. Ezt a leképzést nevezzük ***megfigyelésnek.*** A mérendő és a megfigyelt érték közötti út a **mérési/jelátviteli csatorna.**

A befogadó környezet megismerése



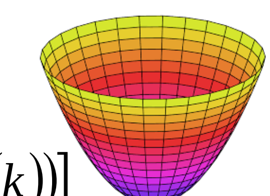
„Modell” **„Inverz modell”**

Feldolgozás „regisztrátum” alapján: $\{y(k)\}$, k=0,1, … ,n-1. Például: $x(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y(k)$

vagy függvény illesztése adott $\{u(k), y(k)\}$, k=0,1, … ,n-1, értékpárokhoz.

Példa: lineáris regresszió: $\hat{y}(k)=a_0+a_1u(k)$ k=0,1, … ,n-1, formában keressük a függvényt.

Ehhez minimalizáljuk $\varepsilon(a_0,a_1)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(y(k)-a_0-a_1u(k))^2\right]$



$$\frac{\partial\varepsilon(a_0,a_1)}{\partial a_0}=-2\sum_{k=0}^{n-1}(y(k)-a_0-a_1u(k)) \qquad \frac{\partial\varepsilon(a_0,a_1)}{\partial a_1}=-2\sum_{k=0}^{n-1}[u(k)(y(k)-a_0-a_1u(k))]$$

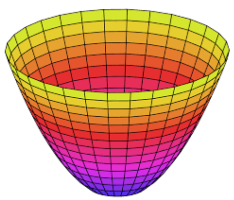
$$\sum_{k=0}^{n-1}y(k) \qquad \sum_{k=0}^{n-1}u(k) \qquad \sum_{k=0}^{n-1}u(k)y(k) \qquad \sum_{k=0}^{n-1}u^2(k)$$

A befogadó környezet modellezése

Példa:

A megfigyelés lineáris, azaz: $\boxed{\mathbf{y}=\mathbf{U}\mathbf{a}+\mathbf{n},}$ **U** ismert, **a** ismeretlen, **n** additív zaj.

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{bmatrix} u_{00} & \cdots & u_{0,M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N-1,0} & \cdots & u_{N-1,M-1} \end{bmatrix},\ \mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{M-1} \end{bmatrix},\ \mathbf{n}=\begin{bmatrix} n_0 \\ \vdots \\ n_{N-1} \end{bmatrix},\qquad \boxed{\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}}$$



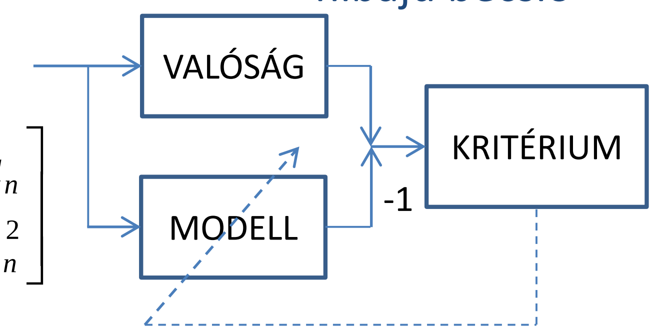
Legyen $\mathrm{C}(\mathbf{y},\hat{\mathbf{y}})=\mathrm{C}(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}})=\left((\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})^T(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})\right)=(\mathbf{y}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T(\mathbf{y}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})$ min.

$$\mathrm{C}(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}})=\mathbf{y}^T\mathbf{y}-\mathbf{y}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T\mathbf{y}+\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{y}^T\mathbf{y}-2\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T\mathbf{y}+\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}.$$

$$\left.\frac{\partial C(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}})}{\partial\hat{\mathbf{a}}}\right|_{\hat{a}=\hat{a}_{LS}}=0=-2\mathbf{U}^T\mathbf{y}+\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{a}_{LS}\qquad \boxed{\hat{\mathbf{a}}_{LS}=[\mathbf{U}^T\mathbf{U}]^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{y}}$$

Legkisebb négyzetes hibájú becslő

Példa: a lineáris regresszió ezzel az apparátussal:



$\hat{y}(k)=a_0+a_1u(k)$, k=0,1, … ,N-1.

$$[U^TU]=\begin{bmatrix} N & \sum_{n=0}^{N-1}u_n \\ \sum_{n=0}^{N-1}u_n & \sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 \end{bmatrix}$$

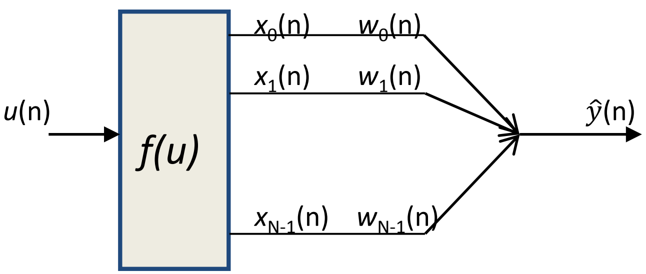
$$y=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & u_0 \\ 1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_{N-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$U^Ty=\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1}y_n \\ \sum_{n=0}^{N-1}u_ny_n \end{bmatrix}\qquad E\{u_k\}\approx\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n$$

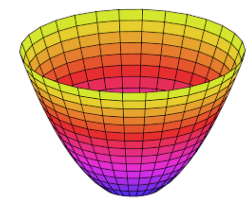
A befogadó környezet modellezése

$$\begin{bmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\end{bmatrix}=\frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2-\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n\right)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 & -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n\\ -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}y_n\\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_ny_n\end{bmatrix}$$

Példa: adaptív lineáris kombinátor: *n* a diszkrét "idő", $\hat{y}(n)=X^T(n)W(n)$



$$X(n)=\begin{bmatrix}x_0(n)\\ \vdots\\ x_{N-1}(n)\end{bmatrix}\quad W(n)=\begin{bmatrix}w_0(n)\\ \vdots\\ w_{N-1}(n)\end{bmatrix}$$



Az előbb: $\quad \mathrm{C}(\mathbf{y},\hat{\mathbf{y}})=\mathrm{C}(\mathbf{a},\hat{\mathbf{a}})=\left((\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})^T(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})\right)=(\mathbf{y}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T(\mathbf{y}-\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})$

Most minimalizálandó: $\quad \mathrm{C}\big(W(n)\big)=E\{[y(n)-X^T(n)W(n)]^T[y(n)-X^T(n)W(n)]\}$

$$\frac{\partial C\big(W(n)\big)}{\partial W(n)}=-2E\{X(n)y(n)\}+2\mathrm{E}\{X(n)X(n)^T\}W(n)$$

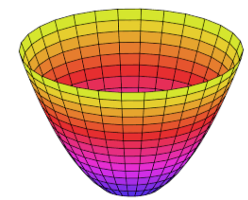
Az optimális beállításnál: $\quad W^*=[E\{X(n)X(n)^T\}]^{-1}E\{X(n)y(n)\}=R^{-1}P$

$\boxed{W^*=R^{-1}P}$ Wiener-Hopf egyenlet

A befogadó környezet modellezése

$$\frac{\partial C(W(n))}{\partial W(n)} = -2E\{X(n)y(n)\} + 2\mathrm{E}\{X(n)X(n)^T\}W(n) = 2R[W(n) - W^*] = \nabla(n)$$

$$W^* = W(n) - \frac{1}{2}R^{-1}\nabla(n) \qquad \boxed{W(n+1) = W(n) - \mu R^{-1}\nabla(n)}$$



Identifikáció ⟷ Adaptáció

Identifikációs eljárások ⟷ Adaptív rendszerek

Eddig: Feldolgozás „regisztrátum” alapján: Off-line/batch processing.

Ezután: Feldolgozás minden új mintavétel alapján: On-line/real-time processing.

Példa: rekurzív átlagolás:

$$x(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y(k)$$

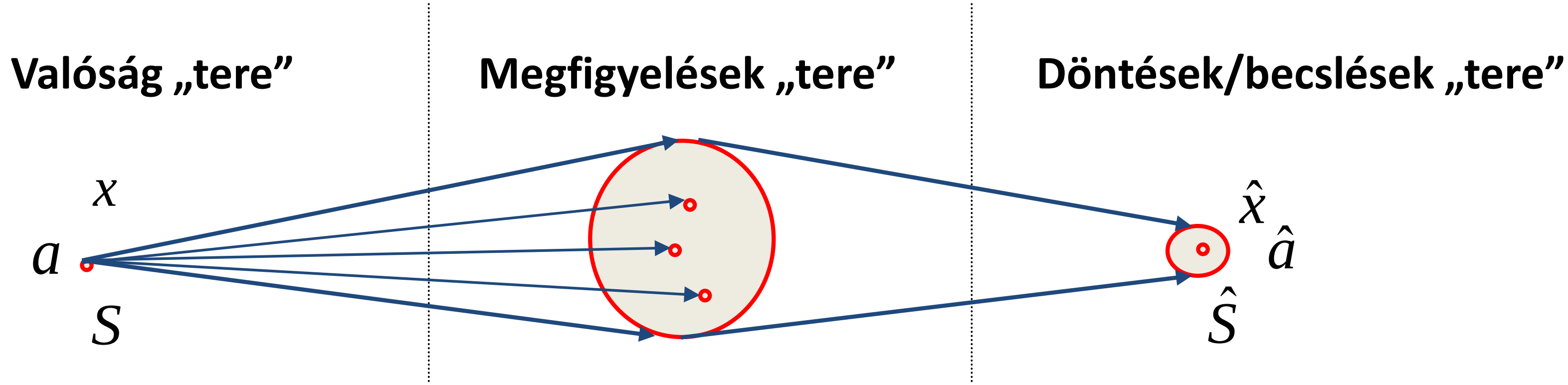
Jött egy újabb mérési adat:

$$x(n+1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y(k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1}\mathrm{y}(n)$$

$$x(n+1) = \underbrace{\frac{n}{n+1}\mathrm{x}(n) + \frac{1}{n+1}y(n)}_{\text{Régi adat + új adat hatása}}$$

$$x(n+1) = \underbrace{\mathrm{x}(n) + \frac{1}{n+1}(y(n) - x(n))}_{\text{Predikció + korrekció}}$$

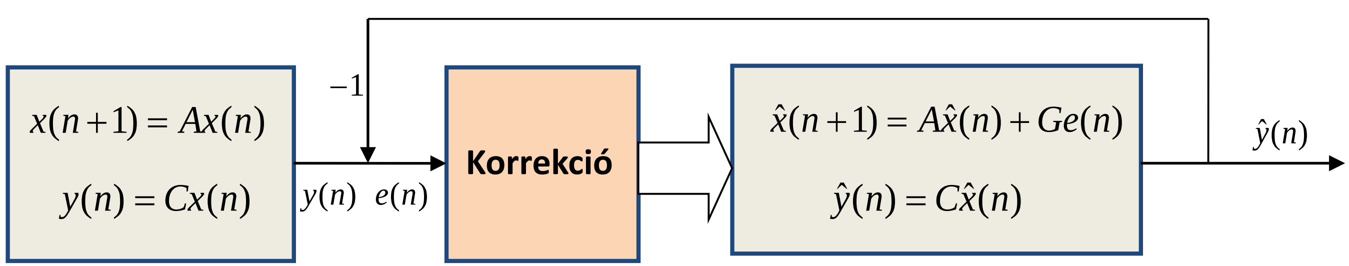
A befogadó környezet modellezése



Megfigyelés determinisztikus csatorna esetén: az alábbi ábra illusztratív példaként egy időben diszkrét megfigyelőt mutat be. A megfigyelt “valóságot” autonóm rendszerként képzeljük el, és diszkrét modellel írjuk le. A „valóságot” és a megfigyelést leíró állapot, ill. megfigyelési egyenletek:

$$x(n+1) = Ax(n) \qquad \hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + Ge(n)$$ ahol a G korrekciós mátrix

$$y(n) = Cx(n) \qquad \hat{y}(n) = C\hat{x}(n) \qquad e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$$



A befogadó környezet modellezése

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) = Ax(n) - A\hat{x}(n) - Ge(n) = (A - GC)\big(x(n) - \hat{x}(n)\big)$$

Bevezetve az $\varepsilon(n+1) = x(n+1) - \hat{x}(n+1)$, valamint $F = A - GC$ jelöléseket,

a hibarendszer állapotegyenlete: $\varepsilon(n+1) = F\varepsilon(n)$.

A *G* korrekciós mátrixot úgy kell megtervezni, hogy $\varepsilon(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ehhez célszerűen $\varepsilon(n+1) < \varepsilon(n)$,$\forall$ *n*-re, azaz *F* csökkenti $\varepsilon(n)$ hosszát minden lépésben: „kontraktív”.

Megjegyzések:

1. A hibavektorral kapcsolatos egyenlőtlenség értelemszerűen a vektor hosszára (normájára) értelmezendő, skalár esetben pedig a hiba abszolút értékére.

2. A hiba eltűnéséhez t nem kell megkövetelnünk a csökkenés monotonitását, csak a hibarendszer stabilitását, azaz külső gerjesztés nélküli esetben a nullához konvergálását. Ez interpretálható úgy is, hogy a hibarendszer a belső energiáját a stabil állapot elérése érdekében leadja, disszipálja. Ha ez a disszipáció az iteráció minden lépésében fennáll, akkor a hibavektor hosszának csökkenése monoton folyamat lesz.

A befogadó környezet modellezése

Esetek:

1. $\boxed{F = A - GC = 0}$ Ebben az esetben : $\boxed{G = AC^{-1}}$

Ez akkor lehetséges, ha *C* négyzetes, azaz a megfigyelés éppen annyi komponensű, mint maga az állapotvektor. Ilyenkor iteráció nélkül, egyetlen lépésben meg tudjuk határozni az állapotvektor értékét. Ez azt jelenti, hogy a megfigyelő, ezen belül a „másolat", egyetlen lépés után követni képes a megfigyelt (fizikai) rendszert.

2. $\boxed{F^N = (A - GC)^N = 0}$ Ebben az esetben a hibarendszer *N* lépésben konvergál:

$\boxed{x(N) - \hat{x}(N) = (A - GC)^N (x(0) - \hat{x}(0)) = 0}$ Az $\boxed{F^N = 0}$ tulajdonságú mátrixok, az ún. nemderogatórius nilpotens mátrixok, amelyek sajátja, hogy **valamennyi sajátértékük nulla.** Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek **véges impulzusválaszúak** (ún. *FIR* rendszerek), hiszen a kezdeti hiba véges lépésben eltűnik.

3. $\boxed{F^N = (A - GC)^N \neq 0}$ Ekkor a stabilra tervezett hibarendszer állapotvektorának

hossza exponenciális jelleggel fog csökkenni. Egy ilyen hibarendszer akkor lesz stabil, ha összes sajátértéke az egységsugarú körön belül helyezkedik el. Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek végtelen impulzusválaszúak (ún. *IIR* rendszerek), mert a kezdeti hiba csak végtelen lépésben tűnik el.

A befogadó környezet modellezése

Példa: Adott $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}.$ Hogyan állítsuk be *G*-t? $G=\begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix}=?$

$GC=\begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_0 & g_0\\ g_1 & g_1\end{bmatrix},\quad [A-GC]=\begin{bmatrix}1-g_0 & -g_0\\ -g_1 & -1-1g_1\end{bmatrix}.\quad [A-GC]^2=0$ alapján

$$\begin{bmatrix}1-g_0 & -g_0\\ -g_1 & -1-g_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-g_0 & -g_0\\ -g_1 & -1-g_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2g_0+g_0^2+g_0g_1 & -g_0+g_0^2+g_0+g_0g_1\\ -g_1+g_1^2+g_1+g_0g_1 & 1+2g_1+g_1^2+g_0g_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

A mellékátló kifejezéseit a főátló kifejezéseibe behelyettesítve kapjuk: $1-2g_0=0,$ illetve $1+2g_1=0,$ amiből: $\boxed{g_0=0.5,}$ $\boxed{g_1=-0.5.}$ Ellenőrzésképpen: $\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Példa: Határozzuk meg $[A-GC]$ sajátértékeit az előző **Példa** eredményének felhasználásával:

$$\det[\lambda I-A+GC]=0=\det\begin{bmatrix}\lambda-0.5 & 0.5\\ -0.5 & \lambda+0.5\end{bmatrix}=(\lambda-0.5)(\lambda+0.5)+0.25=\lambda^2-0.25+0.25=0$$

Mindkét sajátérték nulla.

Megjegyzés:

Ez a tulajdonság általánosan igaz véges lépésben konvergálni képes rendszerek esetében.

Az ilyen rendszerek átviteli függvénye olyan (elfajuló) racionális törtfüggvény, amelynek valamennyi pólusa az origóban van.

A befogadó környezet modellezése

$$H(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N} = \frac{a_N + a_{N-1} z + a_{N-2} z^2 + \ldots + a_1 z^{N-1}}{z^N}$$

Ezek az ún. véges impulzusválaszú (**FIR**) szűrők. Az időtartománybeli megfelelője:

$y(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_N x(n-N),$ ahol a valós idejű kiszámíthatóság miatt csak $x(n)$ korábbi mintái szerepelhetnek!

Az előző **példában** a sajátértékekre vonatkozó feltétel felhasználható a g_0 és g_1 értékek meghatározására:

$$\det[\lambda I - A + GC] = 0 = \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 + g_0 & g_0 \\ g_1 & \lambda + 1 + g_1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda(g_0 + g_1) + g_0 - g_1 - 1 = \lambda^2 = 0$$

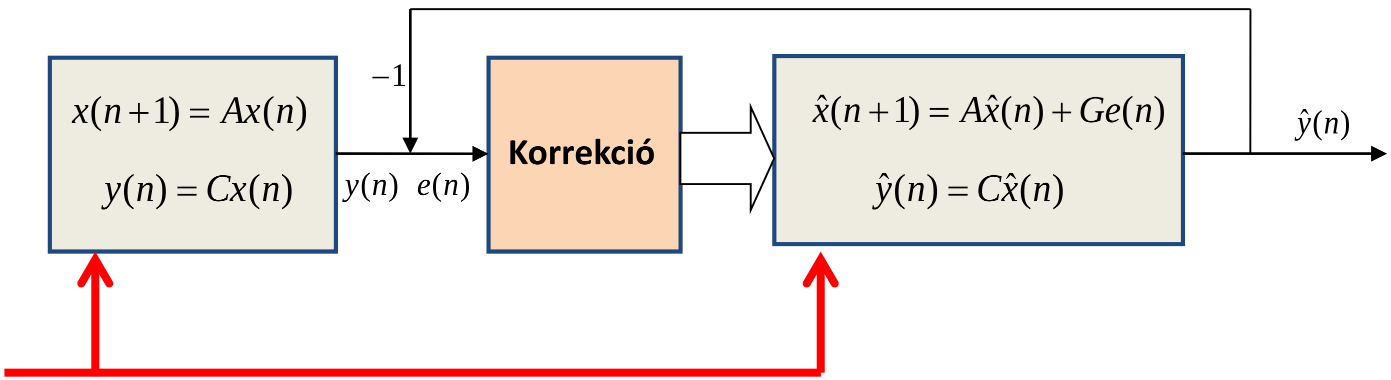
Ebből: $\left.\begin{array}{l} g_0 + g_1 = 0 \\ g_0 - g_1 = 1 \end{array}\right\}$ $\boxed{g_0 = 0.5,}$ $\boxed{g_1 = -0.5.}$

Megfigyelés zajos csatorna esetén: Ebben az esetben nem $\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ az elvárásunk, hanem $E[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \min$ legyen. Ezzel a hibarendszer állapotegyenletét az $\boxed{E[\varepsilon(n+1)\varepsilon^T(n+1)] = FE[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)]F^T}$ összefüggés váltja fel.

Ez a hiba-mátrix központi szerepet kap a híres **Kalman** prediktor esetében!

.

A befogadó környezet modellezése



Megjegyzések:

1. A megfigyelő elrendezés mindkét modellje „gerjeszthető” egy közös gerjesztéssel. Mivel a modellek lineárisak, a szuperpozíció értelmében a megfigyelő konvergenciája változatlanul megvalósul.

2. Az ábra szerinti megfigyelőt Luenberger megfigyelőnek nevezzük. Luenberger szerint majdnem minden rendszer megfigyelő. A megfigyelő tulajdonság feltétele, hogy a megfigyelő legyen „gyorsabb”, mint a megfigyelt rendszer, különben nem képes követni a változásokat.