

Színezett Petri-hálók

dr. Bartha Tamás

BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Bevezetés

- Mik a színezett Petri-hálók?
 - “A színezett Petri-hálók olyan modellek, amik a *grafikus reprezentációt* ötvözik a *jól definiált (matematikai) szemantikával*, így lehetővé téve a *formális analízist*.”
 - A színezetlen hálók kiterjesztései **rugalmas adatszerkezetekkel és adatmanipulációs nyelvvel**
 - CPN háló diagram = háló struktúra + deklarációk + háló jelölések, kifejezések + inicializáló kifejezések

Színezetlen és színezett Petri-hálók összehasonlítása

Színezetlen (P-T) Petri-hálók

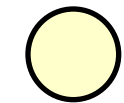
- színezetlen tokenek
- tokenek halmaza (számosság)
- token manipuláció
- kezdeti jelölés
- tiltó élek
- élsúlyok
- tranzíció engedélyezése
- konfliktus különböző engedélyezett tranzíciók között
- *~ assembly nyelv*

Színezett Petri-hálók

- színes tokenek
- tokenek multihalmaza
- adat manipuláció
- inicializáló kifejezések
- őrfeltételek
- élkifejezések (változókkal)
- lekötés engedélyezése
- konfliktus ugyanazon tranzíció engedélyezett lekötései között
- *~ magas szintű programnyelv*

Színezett Petri-háló alkotóelemei

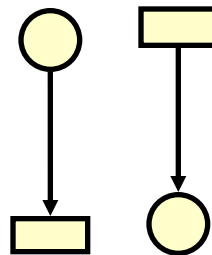
- Háló struktúra:
 - megjeleníti a rendszer vezérlési-/adatfolyam struktúráját
 - helyek, tranzíciók, (tiltó)élek
- Deklarációk:
 - definiálják: adatstruktúrákat + felhasznált függvényeket
 - deklarációk, jelölések, kódrészletek CPN ML-ben
 - színsztályok, változók, élkifejezések



Helyek



Tranzíciók



Élek

③ $3(q,0)$

Tokenek

Színezett Petri-háló alkotóelemei

- Jelölések, elnevezések:
 - megadják a háló szintaktikai és adatmanipulációs elemeit
 - nevek, színosztályok, bemenő/kimenő élkifejezések, örkifejezések, aktuális állapot
- Inicializációs kifejezések:
 - Megadják a modell kezdőállapotát
 - konstansok, kezdőállapot

```

color U = with p | q;
color I = int;
color P = product U * I;
color E = with e;
var x : U;
var i : I;

```

deklarációs mező

• CPN háló alkotóelemei:

– Helyek

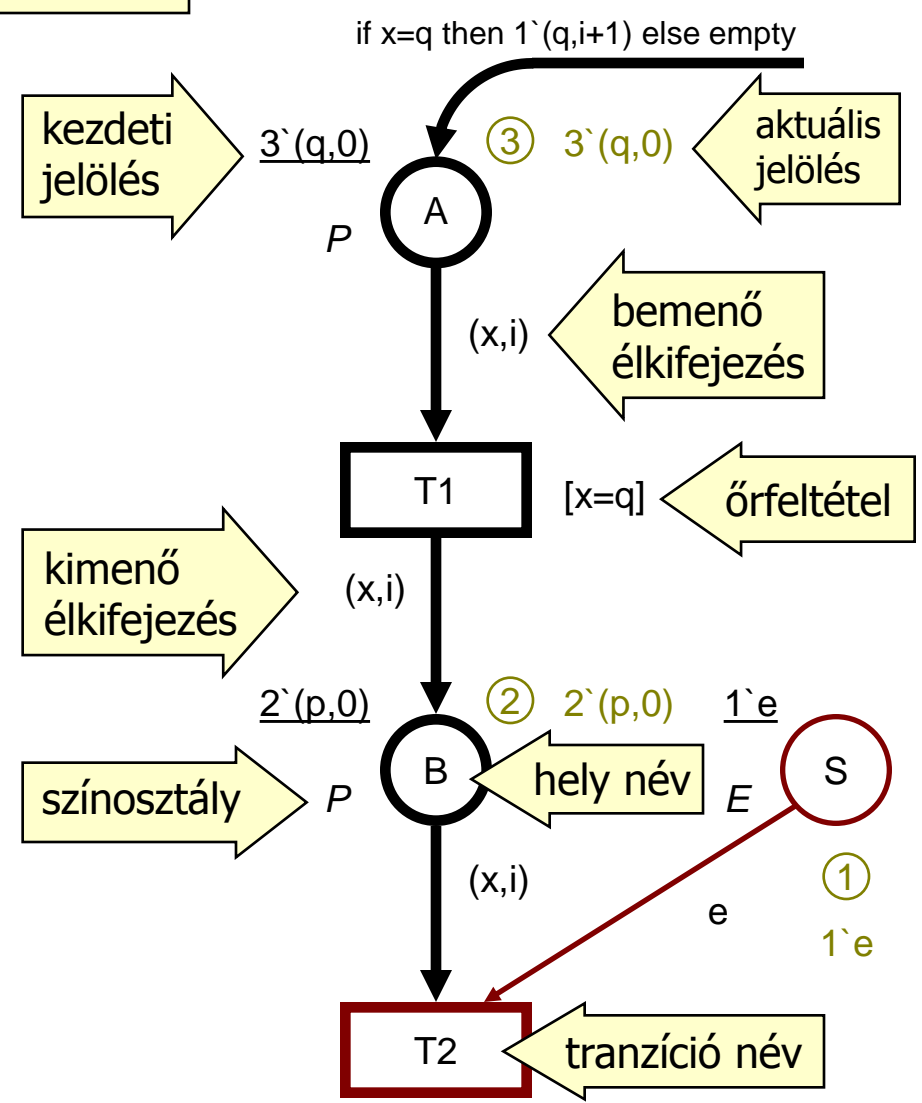
- név
- színosztály
- kezdő tokeneloszlás
- aktuális tokeneloszlás

– Tranzíciók

- név
- őrfeltétel

– Élek

- élkifejezések

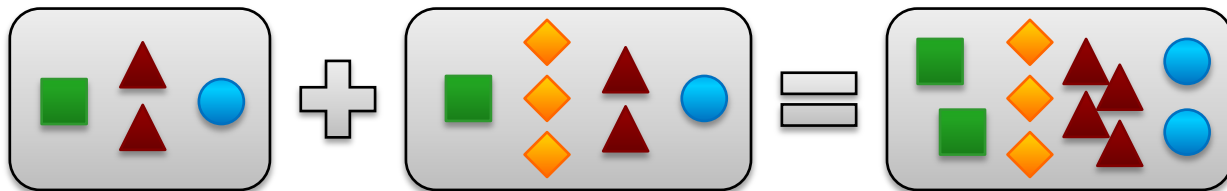


Multihalmazok

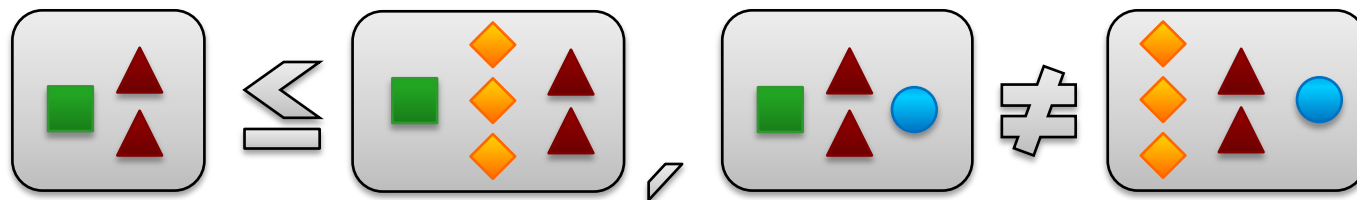
- Multihalmaz: azonos elemből több példány is lehet benne
 - leképezés: $Bag(A)$, $a \in [A \rightarrow \mathbb{N}]$
 - formálisan: $a = \sum_{x \in A} a(x) \cdot x$ más jelölés (CPN): $a = \sum_{x \in A} a(x)'x$
- Műveletek multihalmazokkal:
 - összehasonlítás: $a_2 \neq a_1$ ha $\exists x \in A, a_2(x) \neq a_1(x)$
 $a_2 \leq a_1$ ha $\forall x \in A, a_2(x) \leq a_1(x)$
 - számosság: $|a| = \sum_{x \in A} a(x)$
 - összegzés: $a_1 + a_2 = \sum_{x \in A} (a_1(x) + a_2(x)) \cdot x$
 - különbség: $a_1 - a_2 = \sum_{x \in A} (a_1(x) - a_2(x)) \cdot x$ feltéve, hogy $a_2 \leq a_1$
 - szorzás skalárral: $n \cdot a = \sum_{x \in A} (n \cdot a(x)) \cdot x$

Műveletek multihalmazokkal

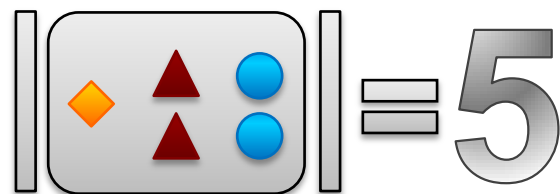
Összeadás: $a_1 + a_2$



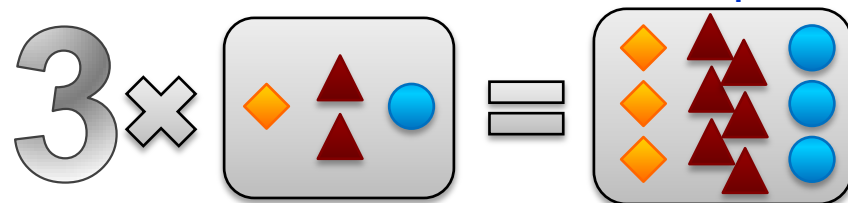
Összehasonlítás: $a_1 \leq a_2, a_1 \neq a_2$



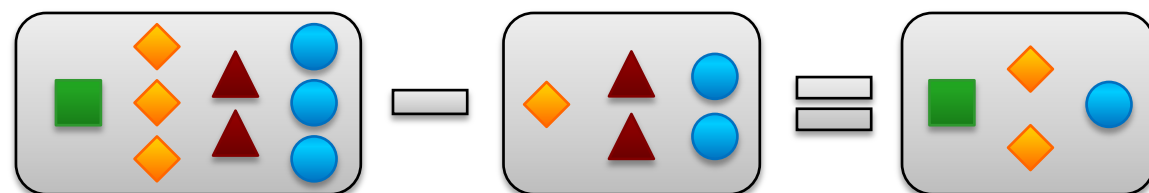
Számosság: $|a_1|$



Szorzás skalárral: $n \cdot a_1$



Kivonás: $a_1 - a_2$ (csak ha $a_2 \leq a_1$)



Multihalmazok (folyt.)

- Unió, multihalmazok egyesítése: $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_m$
 - tartomány: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$
 - eleme: $e_i \in \bigcup_1^m A_k$ ha $\exists A_j, e_i \in A_j$
- n-esek képzése: $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$
 - tartomány: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
 - eleme: $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \in \prod_1^n A_j$ ha $\forall e_i \in A_i$
 - általánosítás: $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

Coloured Petri Nets (CPN) hálók eszközészlete

CPN hálók: színosztályok definiálása

- Egyszerű színosztályok

- színezetlen tokenek:

`unit`

- alapvető típusok:

`int, bool, real,
string`

- részhalmaz:

`with 1..4;`

- felsorolás:

`with true | false;`

- indexelés:

`index d with 1..4;`

- Alábbi elemek

definíciójában szerepelnek:

- összetett színosztályok
- hely jelölések (kezdőállapot)
- változók, konstansok
- függvények, operátorok

Összetett színosztályok

- Módszerek kombinált színosztályok létrehozására
 - unió képzés:
`union s1:S + s2:S + T;`
 - n-esek képzése (Descartes szorzat):
`product P * Q * R;`
 - rekord (címkézett n-esek):
`record p:P * q:Q * r:R;`
 - lista:
`list int with 2..6;`

További CPN háló elemek: változók

- változók

Tokenek szimbolikus nevei

- változódeklaráció:

```
var proc : P;
```

- konstansok

Áttekinthetőbb, kezelhetőbb

- konstansdeklaráció:

```
val n = 10;
```

```
val d1 = d(1) : D;
```

- az alábbi kifejezésekben:

- élkifejezések
- őrfeltételek

- alábbi deklarációkban:

- színosztályok
- függvények, operátorok
- élkifejezések, őrfeltételek, inicializáló kifejezések

További CPN háló elemek: függvények

- függvények
 - mellékhatás-mentes SML nyelvű függvények
- műveletek, operátorok
 - infix jelölésrendszer
- az alábbi kifejezésekben:
 - színosztályok
 - függvények, operátorok, konstansok
 - élkifejezések, őrfeltételek, inicializáló kifejezések

További CPN háló elemek: kifejezések

- háló kifejezések
 - értéke: a változók egy adott lekötésével értékelhető ki
 - típusa: az összes lehetséges kiértékelési eredmény halmaza
 - példák:
`x=q`
`2` (x,i)`
`if x=q then 2`i else empty`
`Mes (s)`
`let n=5 in n * x + 2 end`
- felhasználásuk:
 - élkifejezések, őrfeltételek, inicializáló kifejezések

Színezett Petri-hálók működése

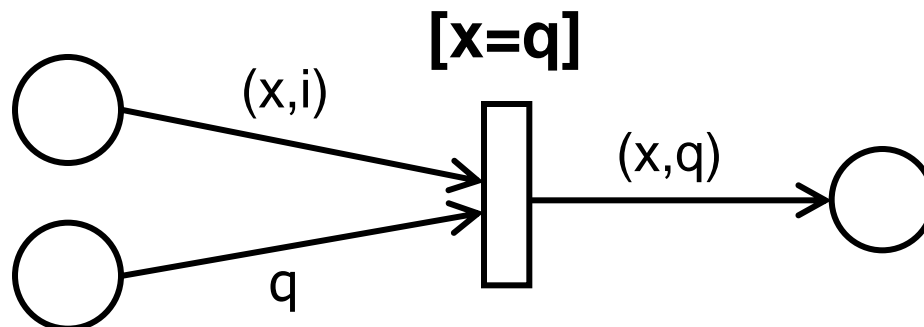
Működés: engedélyezés és tüzelés

Engedélyezés fogalma megváltozik:

- **Lezárt** élkifejezés: nem tartalmaz változókat
 - **Változók**
 - rendelkeznek típussal: $\text{Type}(v)$
 - értékük a multihalmaz egy eleme
- **Nyílt** élkifejezés: változókat le kell kötni egy értékkel
 - **lekötés**: egy konkrét értékhozzárendelés minden változóhoz
 - adott lekötéssel az élkifejezés kiértékelhető
 - **rendelkezik típussal**: $\text{Type}(expr) = C(p)_{MS}$
 - az értékül kapott színosztály típusa
 - **kifejezésben szereplő változók halmaza**: $\text{Var}(expr)$

Őrfeltétel

- Őrfeltételek:
 - Tranzíciókhoz rendelt kifejezések
 - multihalmazok felett értelmezett kifejezések (lásd élkifejezés)
 - DE boolean visszatérési értékkel! (élkifejezés: multihalmaz v.é.)
 - „Igaz” kiértékelési érték esetén engedélyezik a tranzíciót
 - „szűrik” az engedélyezett lekötéseket
 - Jelölés: szögletes zárójelekben megadott kifejezés a tranzíció mellett



Engedélyezettség színezett Petri-hálóokban

- Tranzíció lekötése

- Érvényes lekötés: $\forall v \in \text{Var}(t): b(v) \in \text{Type}(v) \wedge G(t)\langle b \rangle$

$$\text{Var}(t) = \{v \mid v \in \text{Var}(G(t)) \vee \exists a \in A(t) : v \in \text{Var}(E(a))\}$$

- $G(t)\langle b \rangle$ az őrfeltétel

- Az összes érvényes lekötés halmaza: $B(t)$

- Egy érvényes lekötés **engedélyezett**, ha

- A bemenő helyeken „van elég színezett token”:

$$\forall p \in \bullet t : E^-(p, t)\langle b \rangle \leq M(p) \wedge E^h(p, t)\langle b \rangle > M(p)$$

Tüzelés színezett Petri-hálóokban

- Egy engedélyezett tranzíció **tüzelhet**, ha

- Magasabb prioritású tranzíció nem engedélyezett:

$$\forall t' : \pi(t') > \pi(t), \exists p \in \bullet t' : E^-(p, t') \langle b' \rangle > M(p) \vee E^h(p, t') \langle b' \rangle \leq M(p)$$

- Magasabb prioritású tranzíció őrfeltétele nem teljesül

$$\neg G(t') \langle b' \rangle$$

Tüzelés színezett Petri-hálóokban

- Tüzelés menete:

- Engedélyezett lekötések keresése

- meghatározzák a bemenő élkifejezések, őrfeltételek

- Tranzíció engedélyezett adott lekötéssel → tüzelés

- Színezett tokenek elvétele a bemenő helyekről

- Színezett tokenek kitétele a kimenő helyekre

$$\forall p \in P : M'(p) = M(p) - \sum_{p \in \bullet t} E^-(p, t) \langle b \rangle + \sum_{p \in t \bullet} E^+(t, p) \langle b \rangle$$

- Ekkor M' közvetlenül elérhető M -ből: $M \xrightarrow{(t, b)} M'$

Lekötött és lekötetlen változók

- **Lekötött változók**

- Az értékhozzárendelést a bemenő élek határozzák meg
- Konzisztencia: változó értéke lekötésen belül azonos!
 - minden a tranzícióhoz tartozó élen: azonos név → azonos érték

- **Lekötetlen változók**

- Csak kimenő élkifejezésekben szereplő változók
- Az engedélyezés nem rendelt hozzá értéket: lekötetlen
- Tüzeléshez le kell kötni!
 - a színosztályából bármilyen értéket felvehet
 - annyi lehetséges lekötés, amennyi a színosztály számossága
 - nondeterminisztikus választás

Színezett Petri-háló példa: elosztott adatbázis

CPN háló példa: elosztott adatbázis

- Specifikáció:

- n különböző szerver, minden szerverhez egy adatbázis példány, amit egy lokális **adatbázis menedzser** kezel

$$\text{DBM} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}, n \geq 3$$

- lokális frissítés lehetséges, de a menedzsernek minden más menedzsert egy **üzenettel** értesítenie kell a frissítésről
- üzenet fejléc: **küldő** és **fogadó** (címezett)

$$\text{MES} = \{(s,r) \mid s,r \in \text{DBM} \wedge s \neq r\}, \text{Mes}(s) = \sum_{r \in \text{DBM} - \{s\}} 1 \cdot (s,r)$$

- rendszer állapota: *Active, Passive*
- adatbázis menedzserek állapota:
Inactive, Waiting (nyugtázásra vár), *Performing*
- üzenetek állapota: *Unused, Sent, Received, Acknowledged*

Elosztott adatbáziskezelő rendszer: deklarációk

Deklarációs mező

```
val n = 4;  
color DBM = index d with 1..n declare ms;  
color PR = product DBM * DBM declare mult;  
fun diff(x,y) = (x<>y);  
color MES = subset PR by diff declare ms;  
color E = with e;  
fun Mes(s) = mult'PR(1`s, DBM--1`s)  
var s, r : DBM;
```

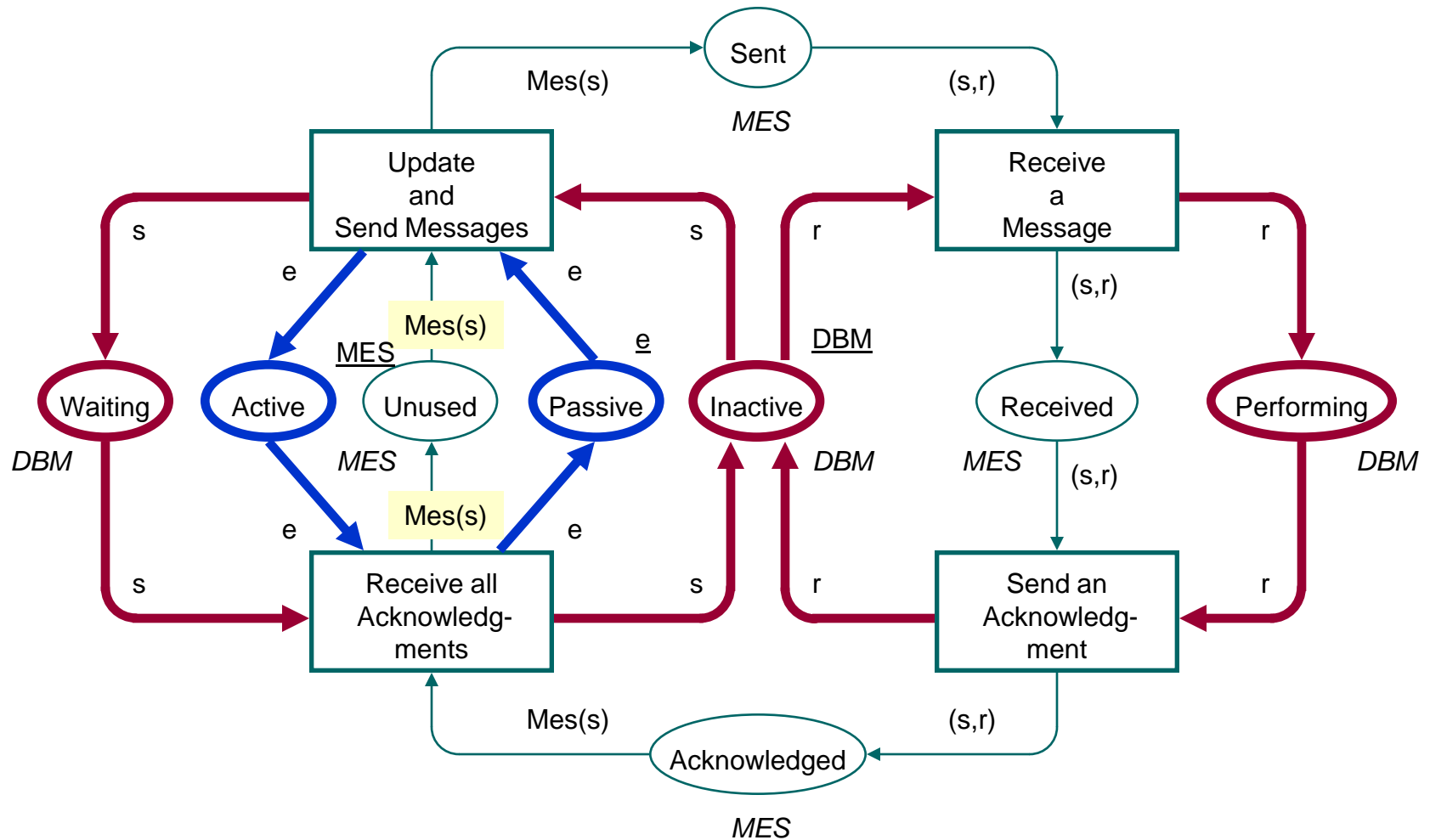
Jelentése:

$$\text{DBM} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

$$\text{MES} = \{(s, r) \mid s, r \in \text{DBM} \wedge s \neq r\}$$

$$\text{Mes}(s) = \sum_{r \in \text{DBM} - \{s\}} 1'(s, r)$$

Elosztott adatbáziskezelő rendszer CP háló modellje



Színezett Petri-hálók dinamikus tulajdonságai

Színezett Petri-hálóknak dinamikus tulajdonságai

- A színezetlen hálóknál megismert tulajdonságok kiterjesztései multihalmazokra

- Korlátosság

Egy hely korlátos, ha a tokenek száma bármely állapotban korlátos

- n egy felső integer korlát p -re, ha $\forall M \in [M_0\rangle : |M(p)| < n$
- m egy felső multihalmaz korlát p -re, ha $\forall M \in [M_0\rangle : M(p) < m$

- Visszatérő tulajdonság

Egy visszatérő állapotba mindig lehetséges visszajutni

- M egy visszatérő állapot, ha $\forall M' \in [M_0\rangle : M \in [M'\rangle$
- X egy visszatérő csoport, ha $\forall M' \in [M_0\rangle : X \cap [M'\rangle \neq \emptyset$

Színezett Petri-hálóknak dinamikus tulajdonságai

- Élőség

Az élőség garantálja, hogy a lekötési elemek egy része aktív marad

- halott állapot (deadlock): egy lekötési elem sem engedélyezett

$$\forall b \in BE : \neg M[b\rangle$$

- halott tranzíció: egyik lekötése sem válhat engedélyezetté

$$\forall M' \in [M\rangle, b \in B(t) : \neg M'[b\rangle$$

- élő tranzíció: nincs olyan állapot, amelyben minden lekötése halott

$$\forall M' \in [M_0\rangle, \exists M'' \in [M'\rangle, \exists b \in B(t) : M''[b\rangle$$

Színezett Petri-hálóak dinamikus tulajdonságai

- Fair tulajdonság

Fairség megmutatja, hogy egy lekötési elem milyen gyakran tüzel

- elfogulatlan (impartial) tranzíció: végtelen sokszor tüzel

$$\forall b \in B(t), |\sigma| = \infty : OC_b(\sigma) = \infty$$

- fair tranzíció: végtelen sok engedélyezés \rightarrow végtelen sok tüzelés

$$\forall b \in B(t), |\sigma| = \infty : EN_b(\sigma) = \infty \Rightarrow OC_b(\sigma) = \infty$$

- igazságos (just) tranzíció: perzisztens engedélyezés \Rightarrow tüzelés

$$\forall b \in B(t), \forall i \geq 1 : \left[EN_{b,i}(\sigma) \neq 0 \Rightarrow \exists k \geq i : \left[EN_{b,k}(\sigma) = 0 \vee OC_{b,k}(\sigma) \neq 0 \right] \right]$$

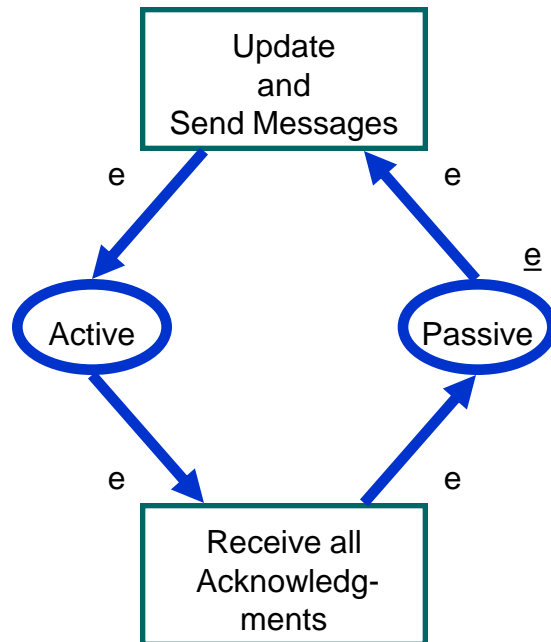
- Elérhetőségi gráf

Színezetlen hálóak elérhetőségi gráfjának generálásával analóg módon

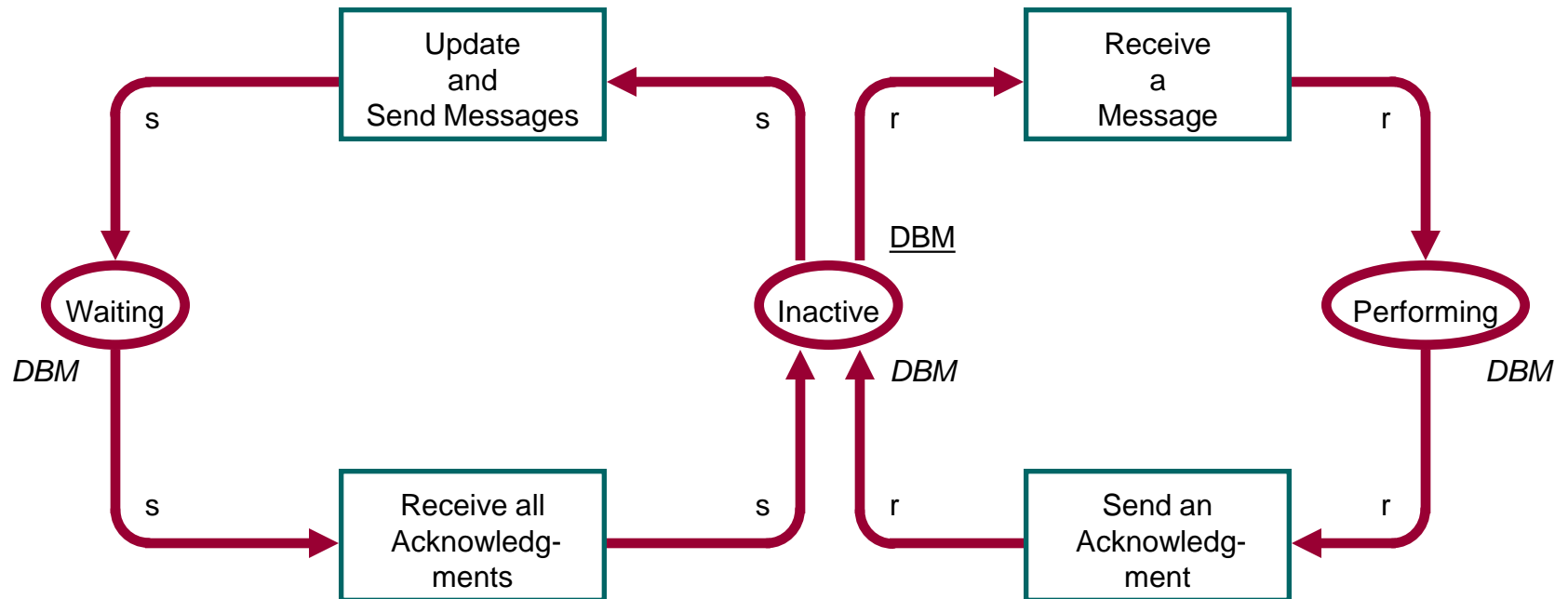
- állapot ekvivalencia osztályok, erősen összekötött komponensek

Színezett Petri-hálóok strukturális tulajdonságai

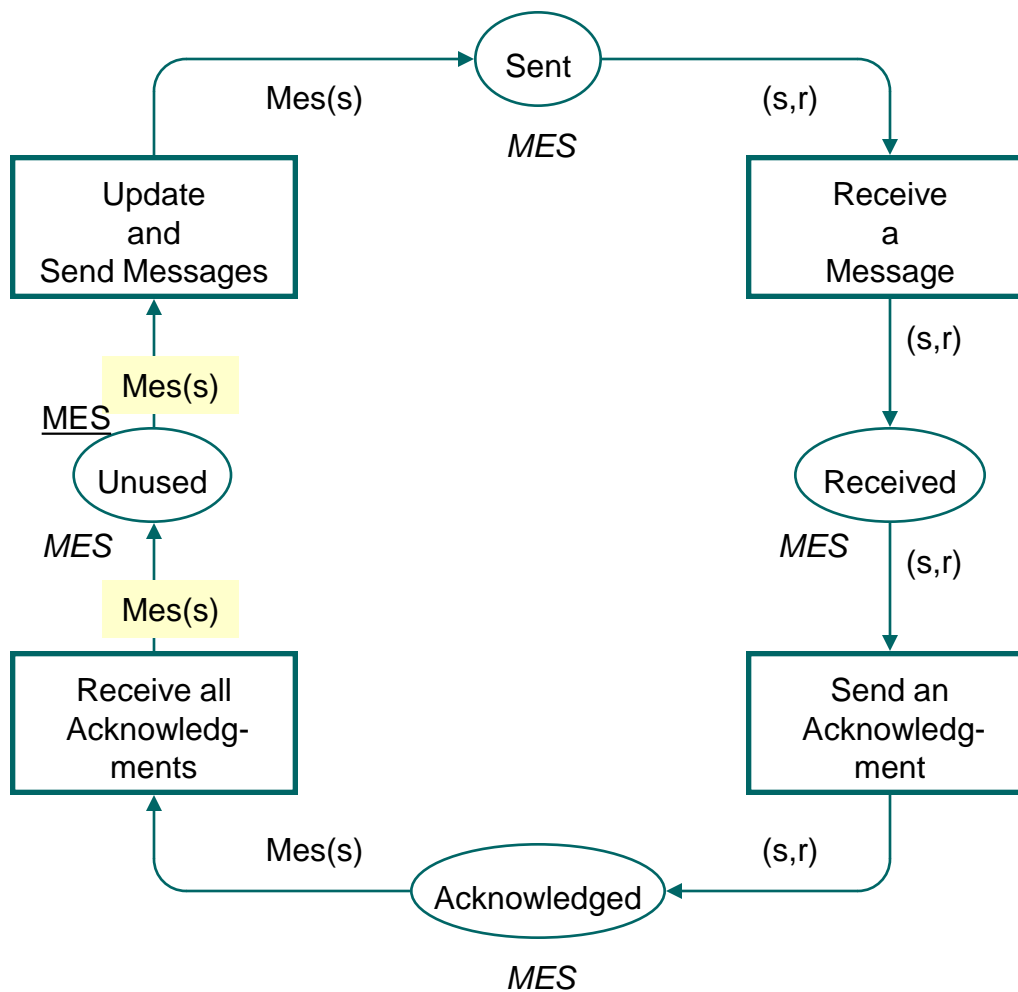
Dekompozíció: a rendszer állapota



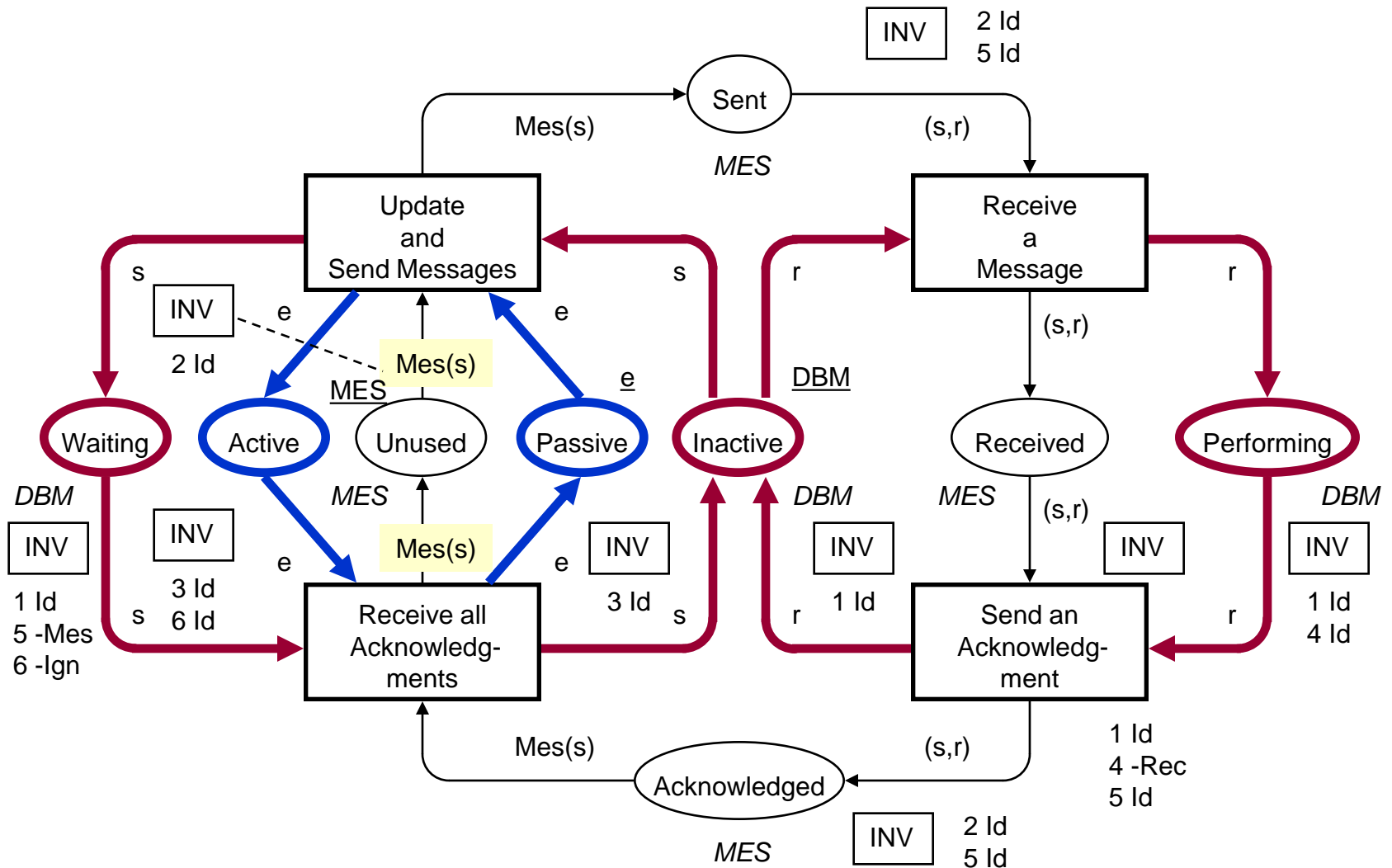
Dekompozíció: adatbázis menedzserek



Dekompozíció: üzenettovábbító alrendszer



P-invariánsok az adatbázis-kezelő modellben



A modell tulajdonságai

- Strukturális tulajdonságok: a háló uniform és konzervatív
- Korlátosság:

	multihalmaz	integer
– Inactive	DBM	n
– Waiting	DBM	1
– Performing	DBM	n - 1
– Unused	MES	$n*(n - 1)$
– Sent, Received, Acknowledged	MES	n - 1
– Passive, Active	E	1