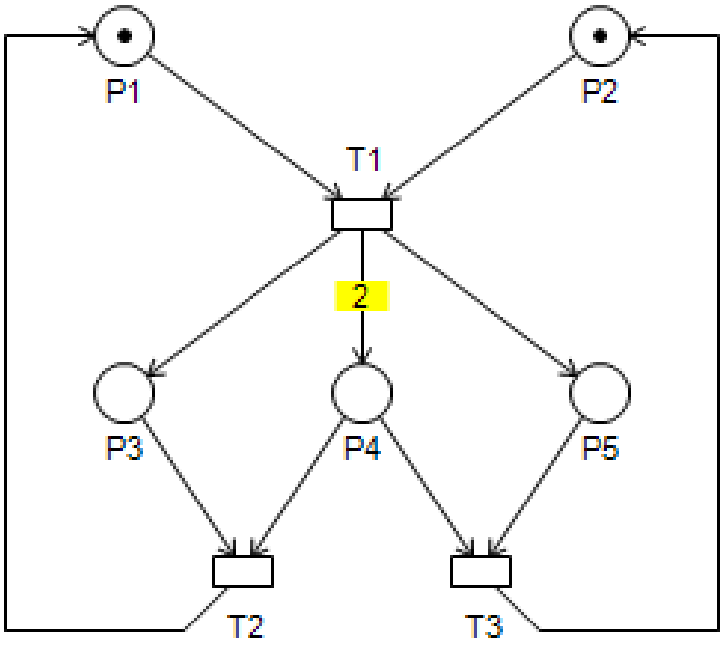
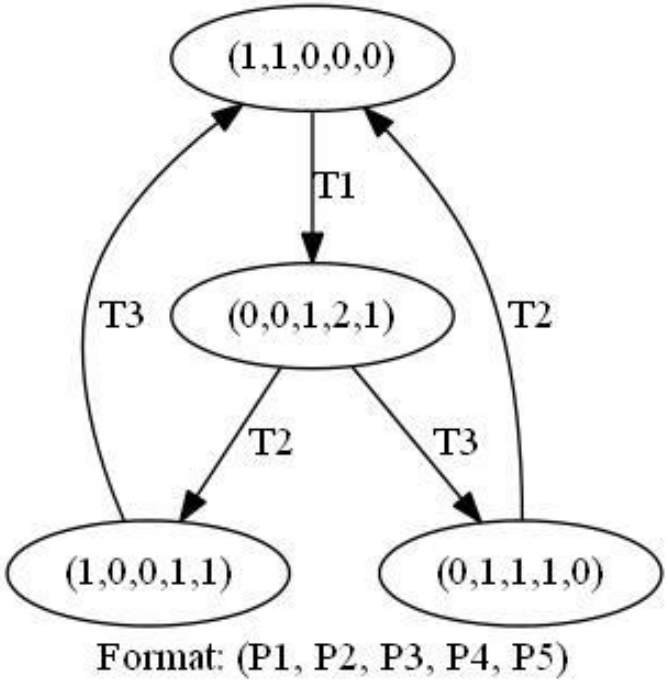
Petri hálók dinamikus tulajdonságai

dr. Bartha Tamás
dr. Majzik István
dr. Pataricza András
BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Ismétlés: A Petri hálók működése





Egyszerű Petri háló és a jelölések változása (az állapotok elérhetőségi gráfja)

Petri hálók vizsgálata: Áttekintés a módszerekről

Vizsgálati lehetőségek

Az elemzés mélysége szerint:

- Szimuláció ⇐ Egy-egy trajektória bejárása
- Állapottér teljes bejárása ⇐ Minden trajektória bejárása adott kezdőállapotból (kimerítő bejárás)
  - Elérhetőségi gráf analízise: Dinamikus (viselkedési) tulajdonságok
  - Modellellenőrzés
- Háló struktúrájának analízise ⇐ Kezdőállapottól független tulajdonságok (bármely kezdőállapotra)
  - Statikus analízis: Strukturális tulajdonságok
  - Invariáns analízis

ha mindez nem vezet eredményre

- Részleges döntés (pl. absztrakció)

Dinamikus és strukturális tulajdonságok

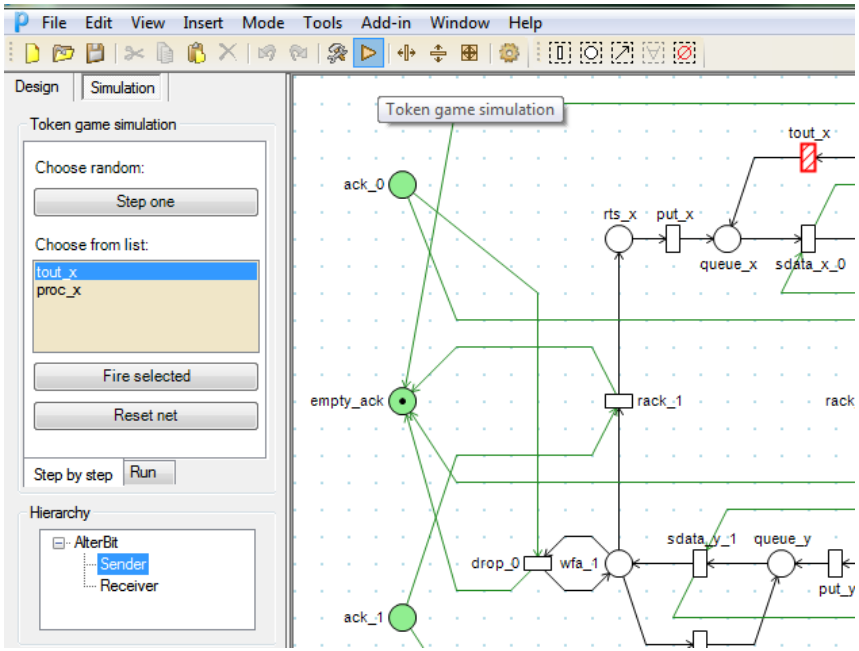
- Dinamikus tulajdonságok az elérhetőségi gráf alapján
  - Kezdőállapot függőek (nem általános érvényűek)
  - Jellegzetes dinamikus tulajdonságok (ld. később): Elérhetőség, fedhetőség, élőség, holtpontmentesség, korlátosság, fairség, megfordíthatóság
  - Tulajdonságmegtartó redukciós technikák segítenek az analízisben
- Strukturális tulajdonságok a háló struktúrája alapján
  - Kezdőállapottól függetlenek: minden lehetséges működésre
  - Jellegzetes strukturális tulajdonságok (ld. később): Strukturális élőség, strukturális korlátosság, vezérelhetőség, konzervativitás, ismételhetőség, konzisztencia
  - Invariánsok: T-invariánsok (tranzíciók tüzeléseire), P-invariánsok (helyek jelöléseire)

Petri háló modellek szimulációja

Petri hálók szimulációja

- A rendszer lehetséges trajektóriáinak vizsgálata
  - Állapot: tokeneloszlás (jelölés)
  - Állapotváltás (esemény): tranzíció tüzelése
  - Trajektóriák az állapottérben: Bejárható állapotsorozatok tüzelési szekvenciák hatására
- Petri háló nemdeterminisztikus lehet
  - Interaktív szimuláció (animation, token game): Felhasználói választással
  - Automatikus szimuláció (large scale simulation) Automatikus választás (ál-)véletlen generálás alapján

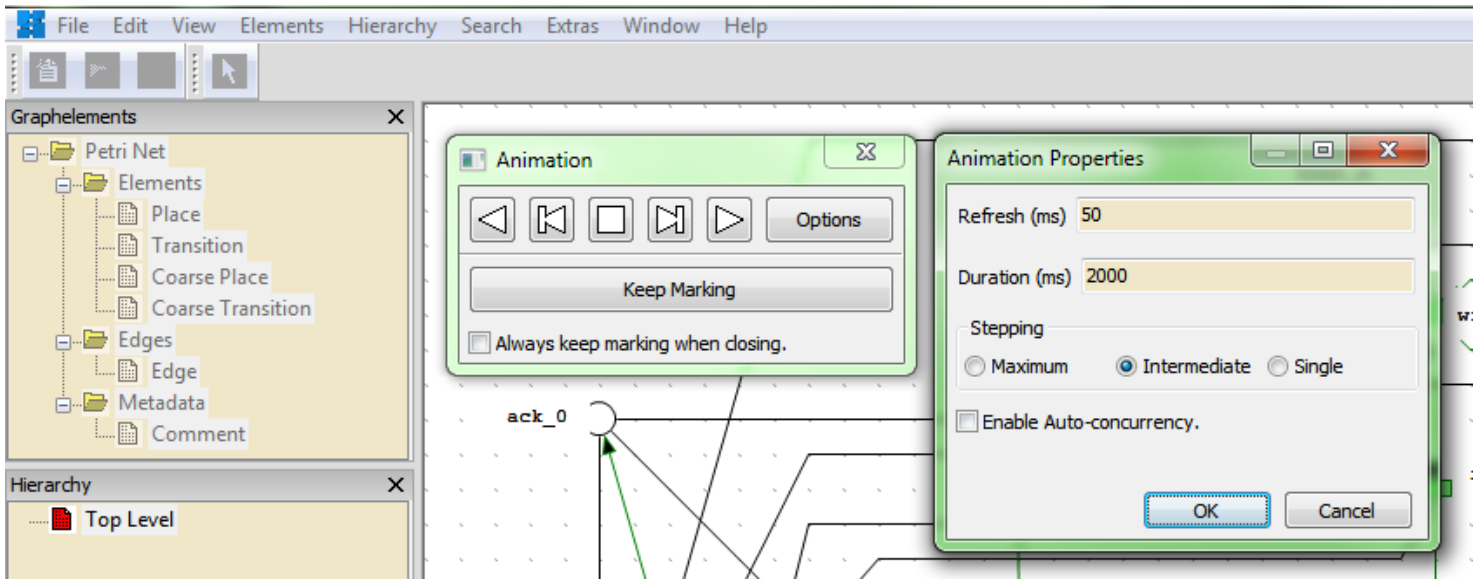
Interaktív szimuláció (token game)



- A modell interaktív ellenőrzése
  - Engedélyezett átmenetek jelölve, kattintva tüzel
  - Előállítja az új tokeneloszlást
  - Manuális vagy automatikus (véletlen) választás (pl. PetriDotNet)

PetriDotNet ↑:

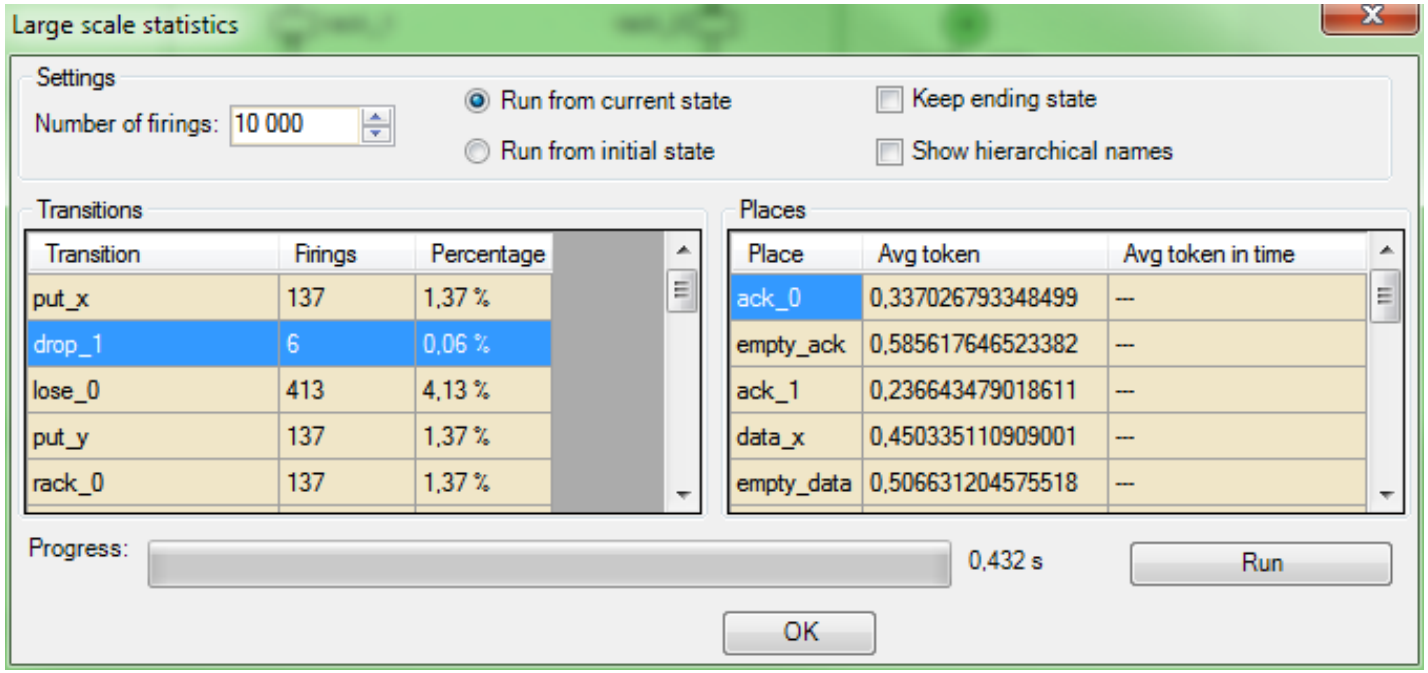
Snoopy:



Automatikus szimuláció

- Lépések (tüzelések) számának beállítása
- Statisztika gyűjtése
  - Tüzelések száma és aránya
  - Helyek átlagos tokenszáma

PetriDotNet:



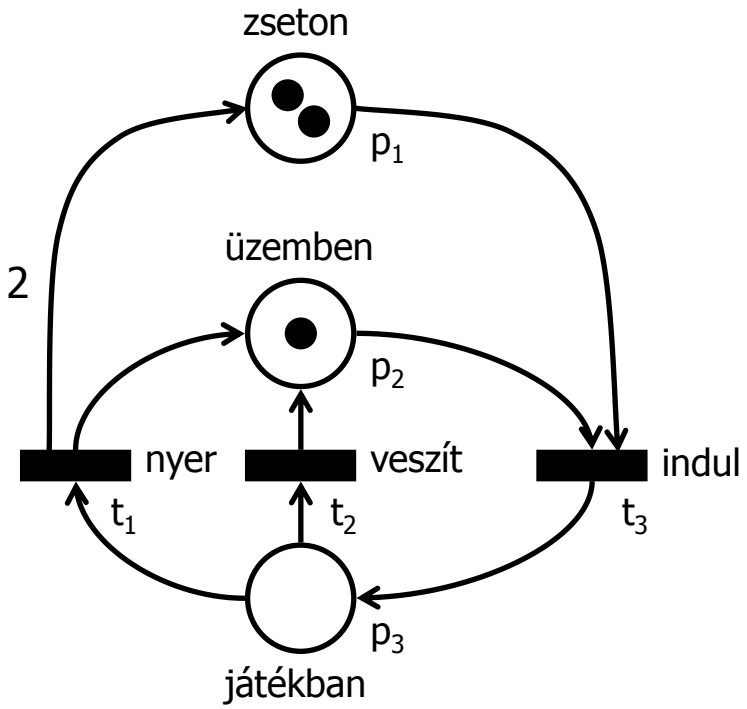
Szimuláció háttere: Egy tranzíció tüzelése

Ha t tüzel M állapotban

- Új állapot: $M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$
  - ahol e_t a t tranzíciónak megfelelő egységvektor
- Itt **W** a súlyozott szomszédossági mátrix
  - Dimenziója: $\tau \times \pi = |T| \times |P|$ ← sorok × oszlopok
  - Elem: $w(t, p)$ ← t tüzelése hogyan módosítja p jelölését; bemenő és kimenő él súly alapján számítható:

$$w(t, p) = \begin{cases} w^+(t, p) - w^-(p, t) & \text{ha } (t,p) \in E \text{ vagy } (p,t) \in E \\ 0 & \text{ha } (t,p) \notin E \text{ és } (p,t) \notin E \end{cases}$$

Példa: Egy tranzíció tüzelése



$$\mathbf{W}^T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Állapotváltozás:

$$M' = M + \mathbf{W}^T \cdot e_t$$

t_3 tranzíció tüzelése a fenti kezdőállapotból:

$$\mathbf{M'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egyszerű szimulációs algoritmus

<Tüzelhető tranzíciók listájának összeállítása>
while (<van tüzelhető tranzíció>)
    <Tüzelő tranzíció (nemdeterminisztikus) kiválasztása>
    <Tüzelés végrehajtása>
    <Tüzelhető tranzíciók listájának összeállítása>
end while

Tüzelhető tranzíciók listájának összeállítása:

function collect_fireable_transitions(M)
    $L_{fireable} \leftarrow \varnothing$
    for all $t \in T$ do
        if enabled(t,M) then $L_{fireable} \leftarrow L_{fireable} \cup \{t\}$
    return $L_{fireable}$
end function

Szimulációs algoritmus

// Inicializálás

$M \leftarrow M_0$

$L_{fireable} \leftarrow$ collect_fireable_transitions(M)

// Tüzelési ciklus

while $L_{fireable} \neq \emptyset$ do

    $t \leftarrow rnd(L_{fireable})$

    $M' \leftarrow M + W^T \cdot \underline{e}_t$

    $L_{fireable} \leftarrow$ collect_fireable_transitions(M')

    $M \leftarrow M'$

end while

Ötlet a hatékonyság növelésére

- A tüzelhetőség változása szempontjából elegendő az utoljára tüzelt tranzíció környezetét vizsgálni
- Egy t tranzíció tüzelése során letiltódhat:
  - Olyan t' tranzíció, amely elől t tüzelése „elveszi a tokent", azaz bemenete kapcsolódik t bemenetéhez
  - Letiltódhatnak t tüzelése által: $T' = \{(\bullet t)\bullet\}$
- Egy t tranzíció tüzelése során engedélyeződhet:
  - Olyan t" tranzíció, melynek t tüzelése „odatesz tokent", azaz bemenete kapcsolódik t kimenetéhez
  - Engedélyeződhetnek t tüzelése által : $T'' = \{(t\bullet)\bullet\}$

Hatékony algoritmus: tüzelési ciklus

while $L_{fireable} \neq \emptyset$ do

// Tüzelés

$t \leftarrow rnd(L_{fireable})$

$M' \leftarrow M + W^T \cdot \underline{e}_t$

// Letiltott tranzíciók eltávolítása

for all $t' \in \{(\bullet t)\bullet\}$ do

if not(enabled(t', M') then $L_{fireable} \leftarrow L_{fireable} \setminus \{t'\}$

// Engedélyezett tranzíciók bevonása

for all $t'' \in \{(t\bullet)\bullet\}$ do

if enabled(t'', M') then $L_{fireable} \leftarrow L_{fireable} \cup \{t''\}$

$M \leftarrow M'$

end while

Prioritás

- Tüzelési szabály kiegészül: t akkor és csakis akkor tüzelhet, ha
  - Engedélyezett és
  - Nincs a $\pi(t)$ prioritásánál nagyobb prioritású engedélyezett tranzíció
- Következmény:
  - $L_{fireable}$ nem halmaz, hanem halmazok vektora: $L_{fireable}[\pi]$ rendezve a $\pi \in \Pi$ prioritási szintek szerint
  - Tüzeléskor a legmagasabb prioritású nem üres $L_{fireable}[\pi]$ halmazból választunk nemdeterminisztikusan

Prioritásos szimulációs algoritmus: inicializálás

// Inicializálás

$M \leftarrow M_0$

for all $\pi \in \Pi$ do

    $L_{fireable}[\pi] \leftarrow \varnothing$

// Tüzelhető tranzíciók kezdeti halmaza

for all $t \in T$ do

    if enabled(t, M_0) then $L_{fireable}[\pi(t)] \leftarrow L_{fireable}[\pi(t)] \cup \{t\}$

Prioritásos szimulációs algoritmus : tüzelési ciklus

while $\bigcup_{\pi \in \Pi} L_{fireable}[\pi] \neq \varnothing$ do // Összes prioritási szintre

for $\pi = \pi_{max}$ to π_{min} step -1 do // Tüzelés, prioritási szintek szerint

if $L_{fireable}[\pi] \neq \varnothing$ then

$t \leftarrow rnd(L_{fireable}[\pi])$

$M' \leftarrow M + W^T \cdot \underline{e}_t$

exit for

end if

for all $\pi \in \Pi$ do // Tüzelhető tranzíciók módosulása

for all $t' \in \{(\bullet t)\bullet\}$ do

if not(enabled(t', M') then $L_{fireable}[\pi(t')] \leftarrow L_{fireable}[\pi(t')] \setminus \{t'\}$

for all $t'' \in \{(t\bullet)\bullet\}$ do

if enabled(t'', M') then $L_{fireable}[\pi(t'')] \leftarrow L_{fireable}[\pi(t'')] \cup \{t''\}$

end for

$M \leftarrow M'$

end while

Elérhetőségi analízis

Elérhetőség az állapottérben

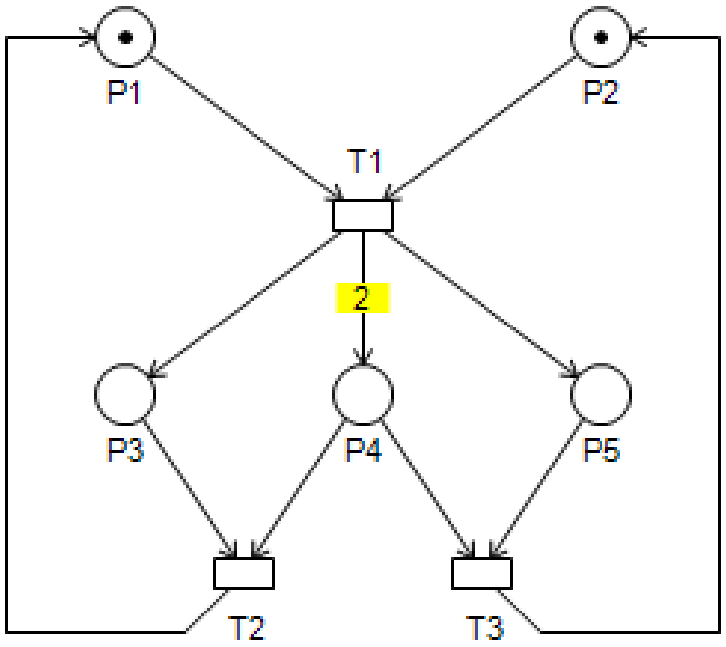
- Állapottér: Kezdőállapotfüggő viselkedés leírása
  - Állapot: Jelölés (marking)
  - Állapotátmenet: Tranzíció tüzelése
  - Trajektória: (M_0, M_1, …, M_n) állapotsorozat egy σ tüzelési szekvencia hatására

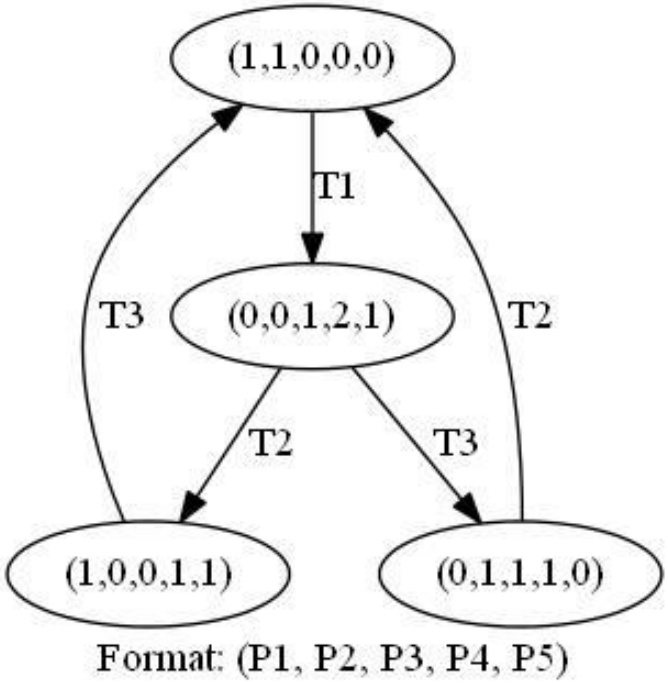
- M_n állapot *elérhető* az M_0 kiinduló állapotból, ha

$$\exists \vec{\sigma} : M_0 \left[\vec{\sigma} > M_n \right.$$

- Elérhetőségi gráf: állapottér megjelenítése

Példa: Elérhetőségi gráf





Egyszerű Petri-háló és elérhetőségi gráfja
(a PetriDotNet eszközből)

Elérhetőségi analízis

- Az M_0 kiinduló állapotból az N Petri hálóban
  - Elérhető állapotok

$$R(N, M_0) = \{M \mid \exists \vec{\sigma} : M_0 [\vec{\sigma} > M\}$$

Állapot alapú kérdésekre lehet ez alapján válaszolni

  - Végrehajtható tüzelési sorozatok

$$L(N, M_0) = \{\vec{\sigma} \mid \exists M : M_0 [\vec{\sigma} > M\}$$

Állapotátmenet (esemény, tüzelés) alapú kérdésekre lehet válaszolni

Elérhetőségi problémák

- Petri hálók elérhetőségi problémája:
  - M_n állapot elérhető-e valamilyen M_0 kiinduló állapotból

$$M_n \overset{?}{\in} R(N, M_0)$$

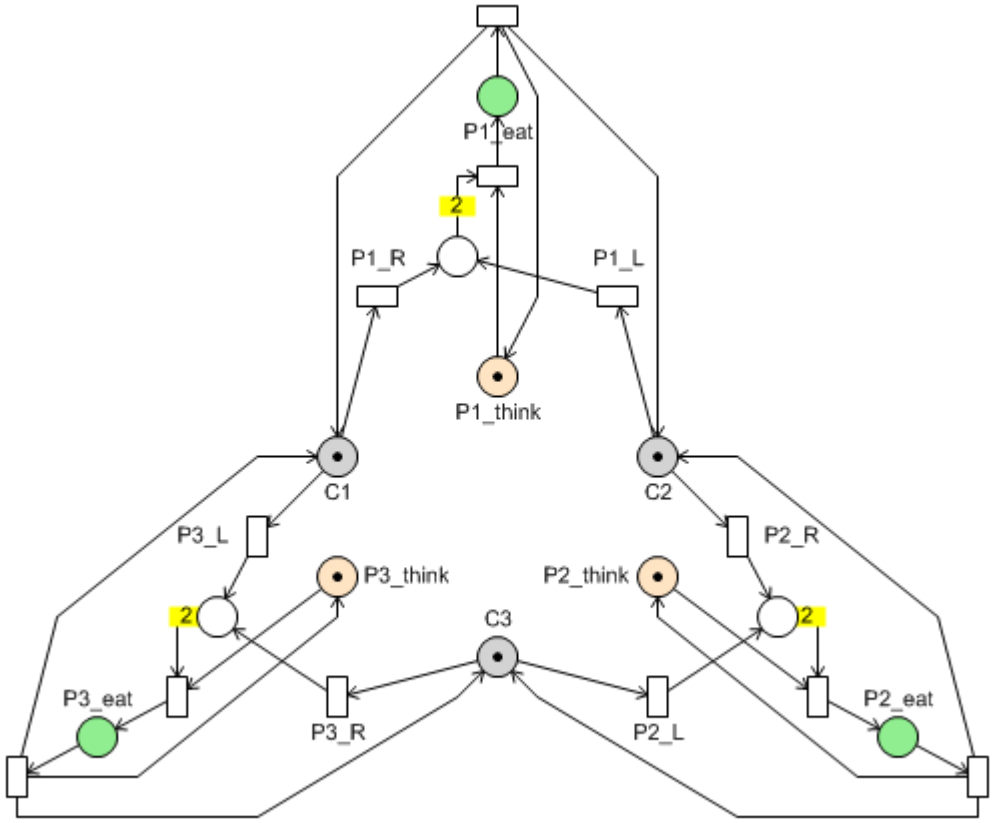
  - Az elérhetőségi probléma eldönthető, de exponenciális (hely) komplexitású általános esetben

- Rész-tokeneloszlási probléma:
  - Helyek egy $P' \subset P$ részhalmazára korlátozva a kérdést, elérhető-e M_n állapot az adott helyekre megadott tokeneloszlással

$$\overset{?}{\exists} M \in R(N, M_0) : \forall p \in P' : M(p) = M_n(p)$$

Elérhetőség vizsgálata modellellenőrzéssel

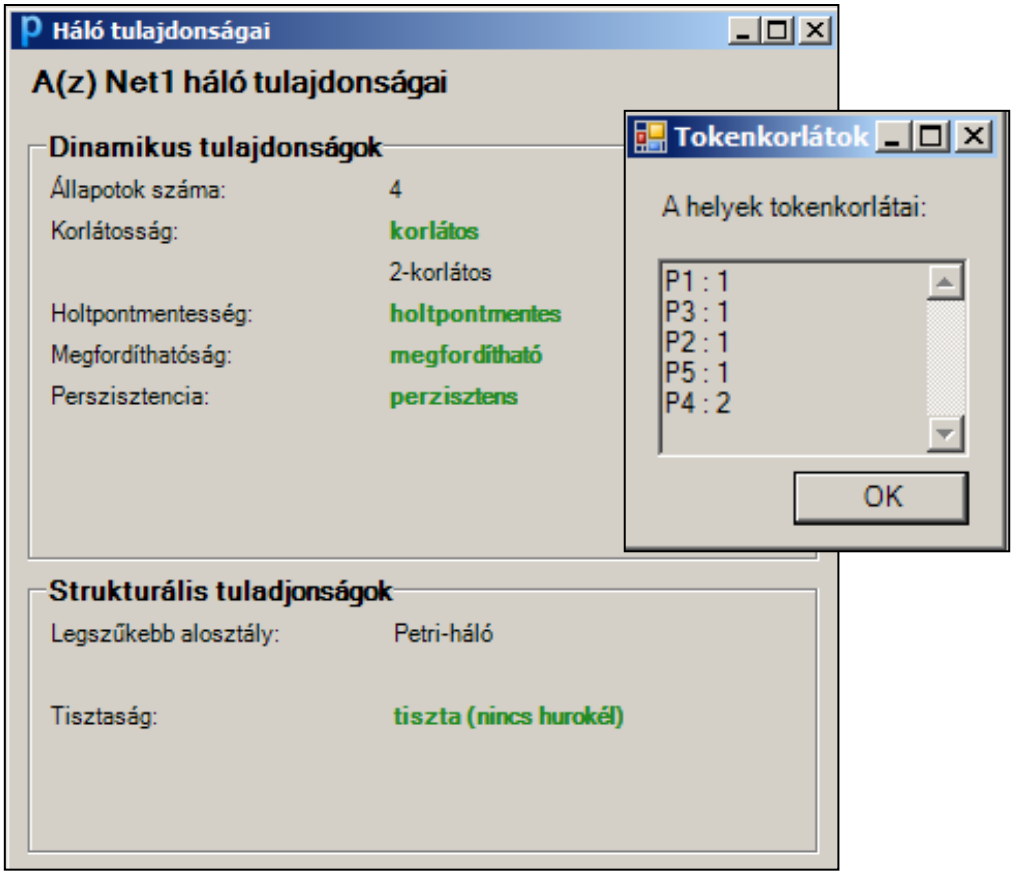
- Étkező filozófusok
- Egy-egy filozófusra:
  - Képes enni legalább egyszer?
  - Mindenképpen fog enni legalább egyszer?
  - Mindig biztos, hogy előbb-utóbb enni fog?
- A teljes modell
  - Holtpontmentes?



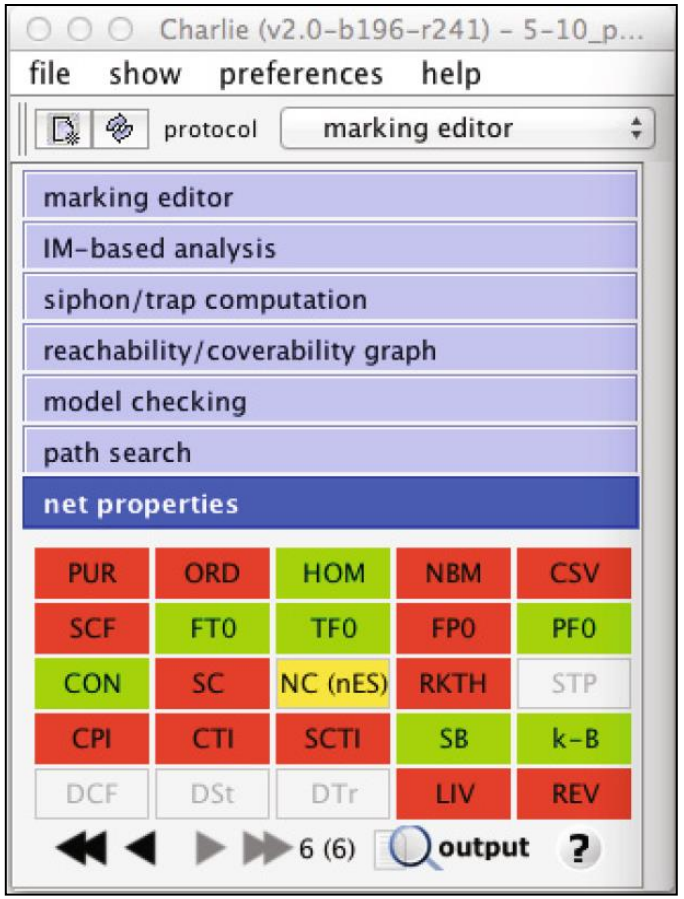
Petri hálók dinamikus (viselkedési) tulajdonságai

Tulajdonságok Petri háló eszközökben

PetriDotNet:



Snoopy + Charlie:



Dinamikus tulajdonságok

- Elérhetőséggel kapcsolatos tulajdonságok
  - Függenek a kiinduló állapottól (kezdő jelöléstől)
    - Lesznek olyan tulajdonságok is, amik kiinduló állapottól függetlenek: ezek az ún. strukturális tulajdonságok
  - Tipikusan elérhetőségi analízissel határozhatók meg
- Dinamikus tulajdonságok (áttekintés):

1. Korlátosság
2. Élőség
   - Holtpontmentesség
3. Megfordíthatóság
4. Visszatérő állapot
5. Fedhetőség
6. Perzisztencia
7. Fair tulajdonság
   - Korlátozott fairség
   - Globális fairség

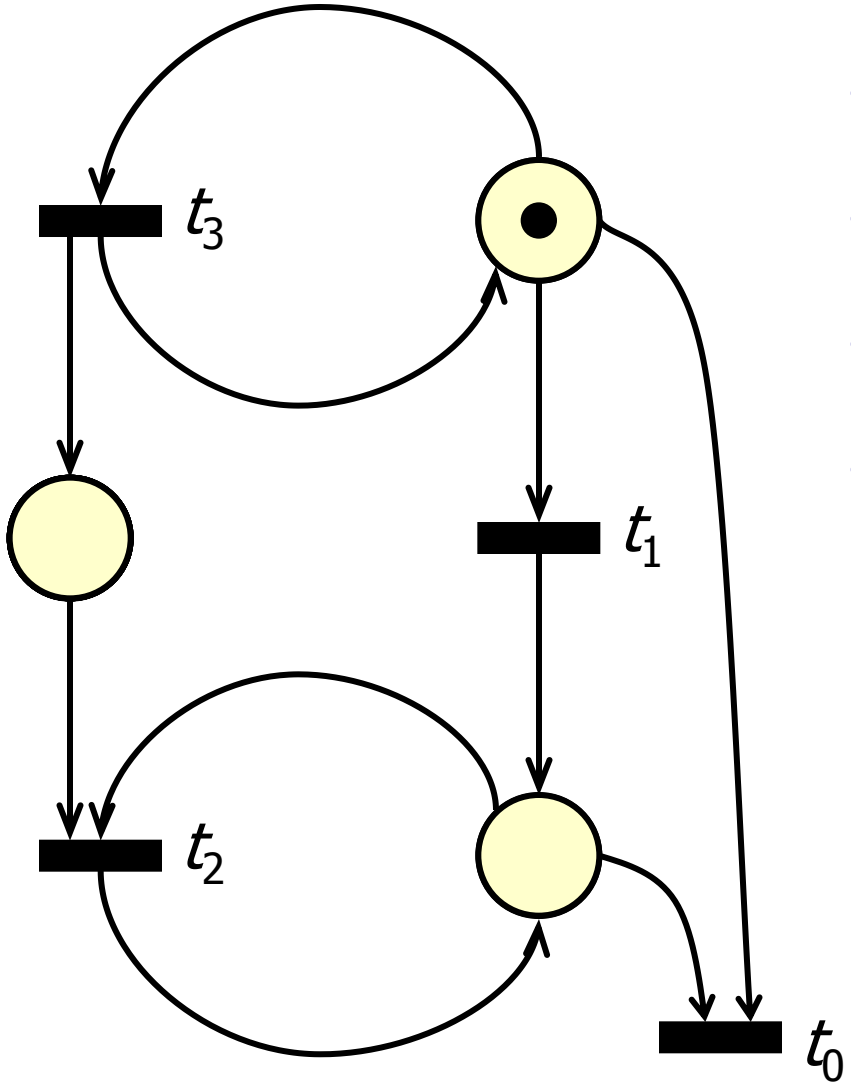
1. Korlátosság

- k-korlátosság (korlátosság)
  - Bármely állapotban minden helyen: helyenként maximum k token lehet
  - Biztos Petri háló: korlátosság speciális esete: k = 1
  - „Végesség” kifejezése
    - Korlátosság $\Leftrightarrow$ véges állapottér
- Megválaszolható gyakorlati kérdések
  - A rendszerben felgyűlnek-e a feladatok?
  - Megvalósul-e az üzenetek rendszeres feldolgozása?

2. Élőség tranzíciókra

- Nem élő tranzíció:
  - L0-élő (halott): t sohasem tüzelhet
- Gyenge élő tulajdonságok: Tüzelési lehetőségek valamely trajektóriában
  - L1-élő: t legalább egyszer tüzelhető
  - L2-élő: bármely k>1 egészre t legalább k-szor tüzelhető
  - L3-élő: t végtelen sokszor tüzelhető
- Erősebb élő tulajdonság: Tüzelési lehetőség bármely elérhető állapotban
  - L4-élő: t legalább egyszer tüzelhető bármely állapotból

Élő tulajdonság: példa



- t_0 tranzíció: L0-élő (halott)
- t_1 tranzíció: L1-élő
- t_2 tranzíció: L2-élő
- t_3 tranzíció: L3-élő

Alkalmazási példák

- Munkafolyamat esetén, ahol egy tranzíció egy tevékenységet modellez
  - L0-élő (halott): tevékenység sohasem kerülhet sorra (nem létezik tüzelése)
  - L1-élő: tevékenység legalább egyszer végrehajtható
  - L2-élő: tevékenység véges sokszor végrehajtható
  - L3-élő: tevékenység végtelen sokszor végrehajtható (pl. része egy ciklikus tevékenységsorozatnak)
  - L4 élő: tevékenység bármely állapotból legalább egyszer végrehajtható (pl. minden ciklikus tevékenységsorozatban szerepel)

Az élőség Petri hálókra

- Egy Petri háló Lx-élő (Lx: L1, L2, L3, L4)
  - Ha minden tranzíciója Lx-élő
  - L4-től L1-ig az élő tulajdonságok tartalmazzák egymást
- Egy Petri háló holtpontmentes
  - Ha minden állapotban legalább egy tranzíció tüzelhető
- Egy Petri háló élő
  - Ha L4-élő, azaz minden tranzíciója L4-élő
    - L4-élő: L1-élő (azaz legalább egyszer tüzelhető valamely trajektória mentén) bármely elérhető állapotból
  - Bejárási úttól függetlenül garantáltan holtpontmentes
    - Élőség $\Rightarrow$ Holtpontmentesség (de fordítva nem)

3. Megfordíthatóság

- Megfordíthatóság
  - Az M_0 kezdőállapot elérhető bármely őt követő állapotból

$$\forall M \in R(N, M_0) : M_0 \in R(N, M)$$

- Gyakorlati példák a megfordíthatóságra:
  - „Reset” jellel mindig a kezdőállapotba vihető rendszer
  - Biztonságos kezdőállapot mindenhonnan elérhető
  - Ciklikus működésű hálózat, a kezdőállapoton keresztül

4. Visszatérő állapot

- Visszatérő állapot
  - A kezdőállapotból elérhető adott állapot elérhető bármely őt követő állapotból

$$\exists M_n \in R(N, M_0) : \forall M \in R(N, M_n) : M_n \in R(N, M)$$

- Gyakorlati példák a visszatérő állapotra:
  - Inicializáló szekvencia után ciklikus működés adott állapotokon (ezek a visszatérő állapotok) keresztül
  - Inicializálás után bárhonnan elérhető biztonságos állapot (ez a visszatérő állapot)

5. Fedhetőség

- Fedhetőség
  - Létrejön-e korábbi állapotot magában foglaló állapot?
  - M′ állapot fedi az M állapotot: $M' \in R(N, M_0) \wedge M' \geq M$
    - Fordított megfogalmazás: *M* állapot fedhető *M′* állapottal
    - *M′* ≥ *M* jelentése: $\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}(p)$
      - Gyenge fedhetőség esetén az azonos állapot is fed, ha elérhető
      - Erős fedhetőség: $\exists p \in P : \mathrm{m}''(p) > \mathrm{m}(p)$
- Kapcsolat az élőséggel
  - Ha μ a t tranzíciót engedélyező minimális tokeneloszlás
    - t akkor és csak akkor nem L1-élő, ha μ nem fedhető le
    - fordítva: μ lefedhetősége garantálja t L1-élő voltát (tüzelhet)

6. Perzisztencia

- Perzisztencia tranzíciókra
  - Egy tranzíció perzisztens, ha engedélyezetté válva engedélyezve is marad tüzelésig
  - Azaz nincs olyan engedélyezett tranzíció, amelynek tüzelése letiltja a tranzíció engedélyezettségét („elveszi előle a tokent”)
- Perzisztencia Petri-hálókra
  - Egy (P, T, M_o) Petri háló perzisztens, ha bármely két $t_1, t_2 \in T$ tranzíciója az összes lehetséges tüzelési szekvenciában perzisztens
- Gyakorlati példák perzisztencia alkalmazására:
  - Párhuzamos működések befolyásolják-e egymást?
  - Rendszerbeli funkcionális dekompozíció megmarad-e?

7. Fair tulajdonság: korlátozott fairség

- Kétféle fairség definíció
  - Korlátozott fairség (bounded fairness)
  - Globális fairség (korlátlan, unbounded fairness)

- Korlátozott fairség
  - Egy tüzelési szekvencia korlátozottan fair (B-fair)
    - Ha bármely tranzíció maximum korlátos sokszor tüzelhet anélkül, hogy egy másik engedélyezett tranzíció tüzelne
    - „Nem veheti el folyamatosan a tüzelési lehetőséget más elől”
  - Egy Petri háló korlátozottan fair (B-fair)
    - Ha az összes lehetséges tüzelési szekvenciája korlátozottan fair

Fair tulajdonság: globális fairség

- Globális fairség
  - Egy tüzelési szekvencia globálisan (korlátlanul) fair, ha
    - véges, vagy
    - az összes tranzíció végtelen sokszor tüzelhet benne
  - Egy Petri háló globálisan (korlátlanul) fair
    - Ha a háló összes lehetséges tüzelési szekvenciája globálisan (korlátlanul) fair
- Gyakorlati példák a fairség alkalmazására:
  - Párhuzamos folyamatok nem tartják-e fel egymást?
  - Valamennyi folyamat végbemegy-e (előbb-utóbb)?
  - Kérés kiszolgálása előbb-utóbb megtörténik-e?

Dinamikus tulajdonságok (összefoglalás)

- Korlátosság
- Holtpontmentesség
- Élő tulajdonság
  - L0 élő (halott)
  - L1 élő (1-szer tüzelhető)
  - L2 élő (k-szor tüzelhető)
  - L3 élő (∞-szer tüzelhető)
  - L4 élő (∀ állapotban L1)
- Megfordíthatóság
- Visszatérő állapot
- Fedhetőség
  - Gyenge fedhetőség
  - Erős fedhetőség
- Perzisztencia
- Fair tulajdonság
  - Korlátozott fairség
  - Globális fairség

Állapottér reprezentációk: az elérhetőségi és fedési gráf

Állapottér reprezentációk: Elérhetőségi gráf

- Elérhetőségi gráf
  - M_0 kezdőállapotból induló állapotgráf
    - Csomópontok: állapotok; címkézés: tokeneloszlások
    - Állapotátmenetek: irányított élek; címkézés: tüzelések
    - Egy csomópont esetén legfeljebb annyi rákövetkező csomópont (kimenő él), ahány engedélyezett tranzíció
      - Kevesebb, ha prioritásos a Petri háló
    - Csomópont, amiből nem indul ki él: holtpont
  - Nem korlátos a Petri háló $\rightarrow$ végtelen sok állapot
    - Korlátosság $\Leftrightarrow$ véges állapottér
  - Vizsgálat: Szélességi típusú bejárás az állapotból a tüzelések mentén
    - Mélységi bejárás nem korlátos állapottérben rossz ötlet

Állapottér reprezentációk: Fedési gráf

- Végtelen állapotgráf: token „túlszaporodás”
  - Hol, „milyen módon” lesz végtelen?
  - Milyen analízisre ad lehetőséget?
- Fedési gráf: végtelen állapottér esetére is
  - Hasonló felépítés: M_0 kezdőállapot, élek: tüzelések
  - Trajektória: M_0, …, M″, …, M′
    ha itt M″ ≤ M′ akkor M″ egy fedett állapot,
    erős fedhetőséggel: $\exists p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p)$
  - Erősen fedett helyekre speciális szimbólum:
    ω a végtelenség kifejezője

Fedési fa generáló algoritmus

Építkezés gráfcsomópontokkal:

$L_{vizsgálandó} \leftarrow \{ M_0 \}$

`MAIN:` **`if`** $L_{vizsgálandó} \neq \emptyset$

A következő $M \in L_{vizsgálandó}$ gráfcsomópont kivétele

`if` M a gyökértől idáig vezető úton már szerepelt

`then` M-et „régi csomópontként” jelöljük

`goto` `MAIN` // ciklus

`if` M-ben nincs engedélyezett tranzíció

`then` M-et „végcsomópontként” jelöljük

`goto` `MAIN` // ciklus

(folytatás a következő lapon)

Fedési fa generáló algoritmus (folytatás)

else // (van M -ben engedélyezett tranzíció)

for all *t* engedélyezett tranzícióra:

Az *M′* rákövetkező csomópont meghatározása: $M\left[\vec{e}_t > M'\right.$

if létezik az M_0-tól *M* -ig vezető úton olyan *M″*, amelyet *M′* fed

$$M' \neq M'' \wedge \forall p \in P : \mathrm{m}'(p) \geq \mathrm{m}''(p) \wedge \exists p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p)$$

then *M″* fedett csomópont:

az *M′* csomópontot jelölő tokeneloszlásban
az erősen fedett helyek jelöléseit ω-val helyettesítjük

$$\forall p \in P : \mathrm{m}'(p) > \mathrm{m}''(p) \rightarrow \mathrm{m}'(p) = \omega$$

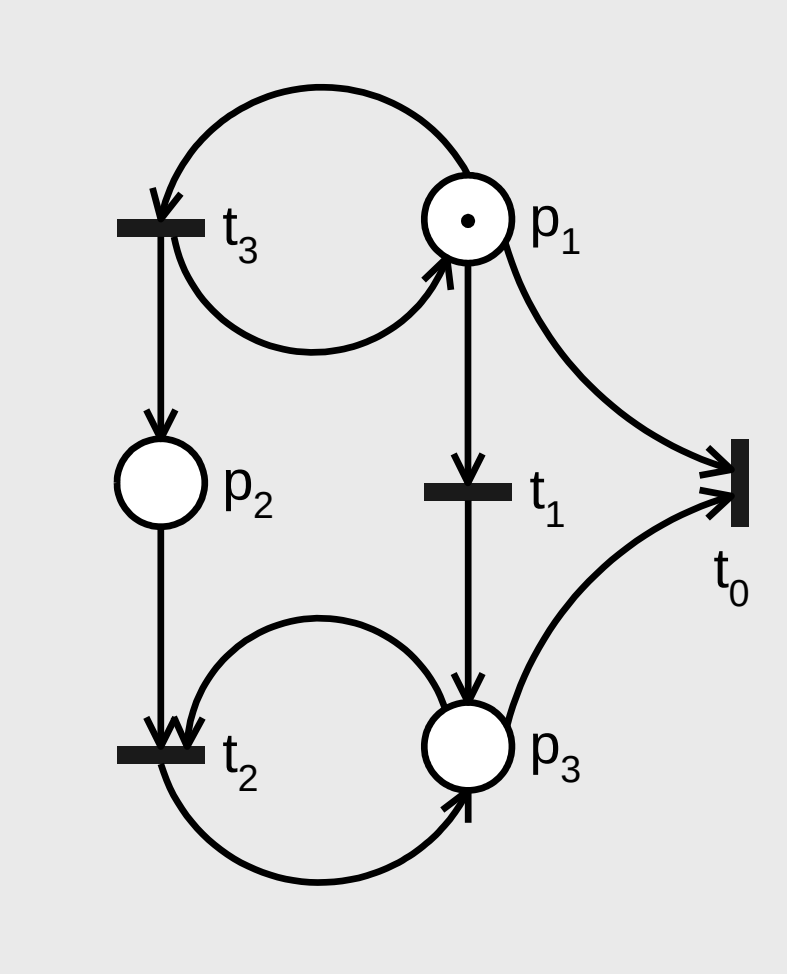
M′ felvétele, vizsgálandók lesznek: $L_{\text{vizsgálandó}} \leftarrow L_{\text{vizsgálandó}} \cup M'$

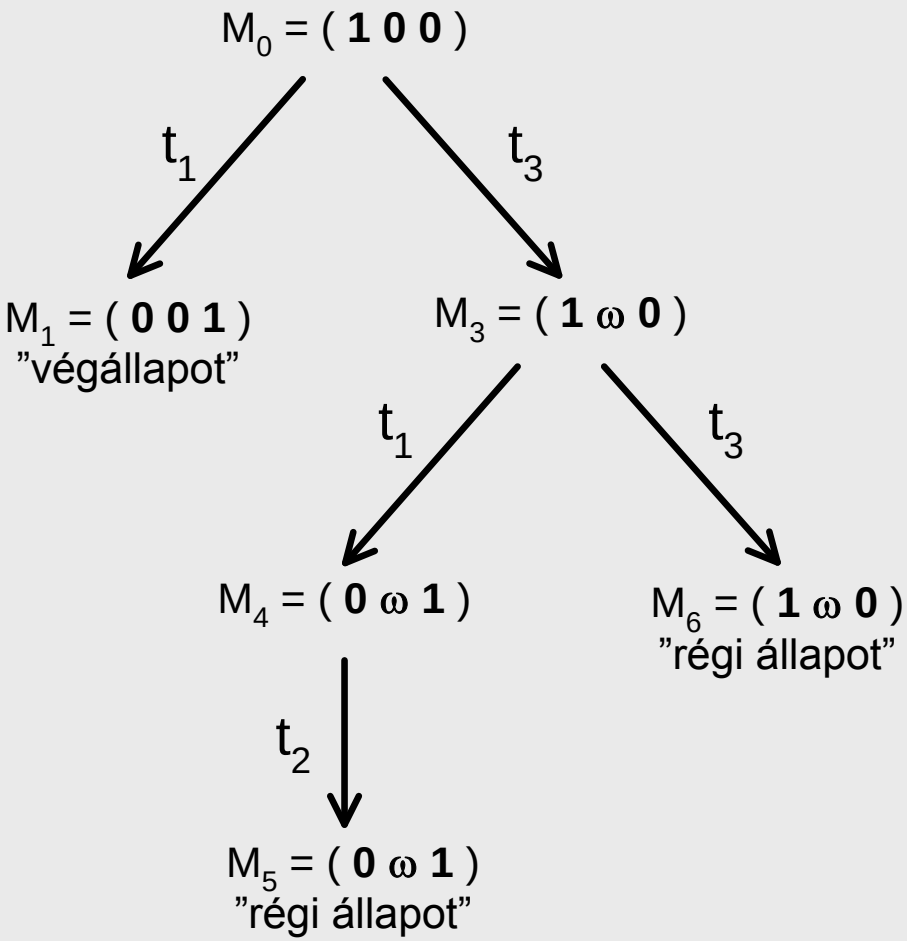
M -ből *M′*-höz egy *t* -vel jelölt élet húzunk

goto MAIN // ciklus

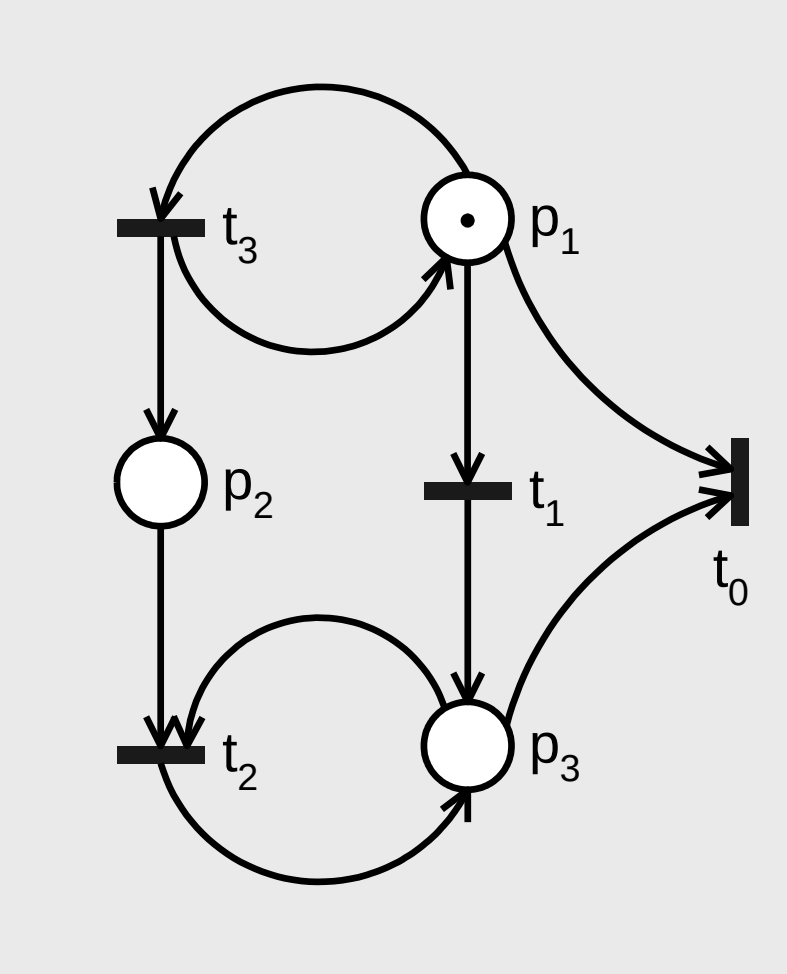
Fedési gráf: Azonos jelölést reprezentáló csomópontok összevonása

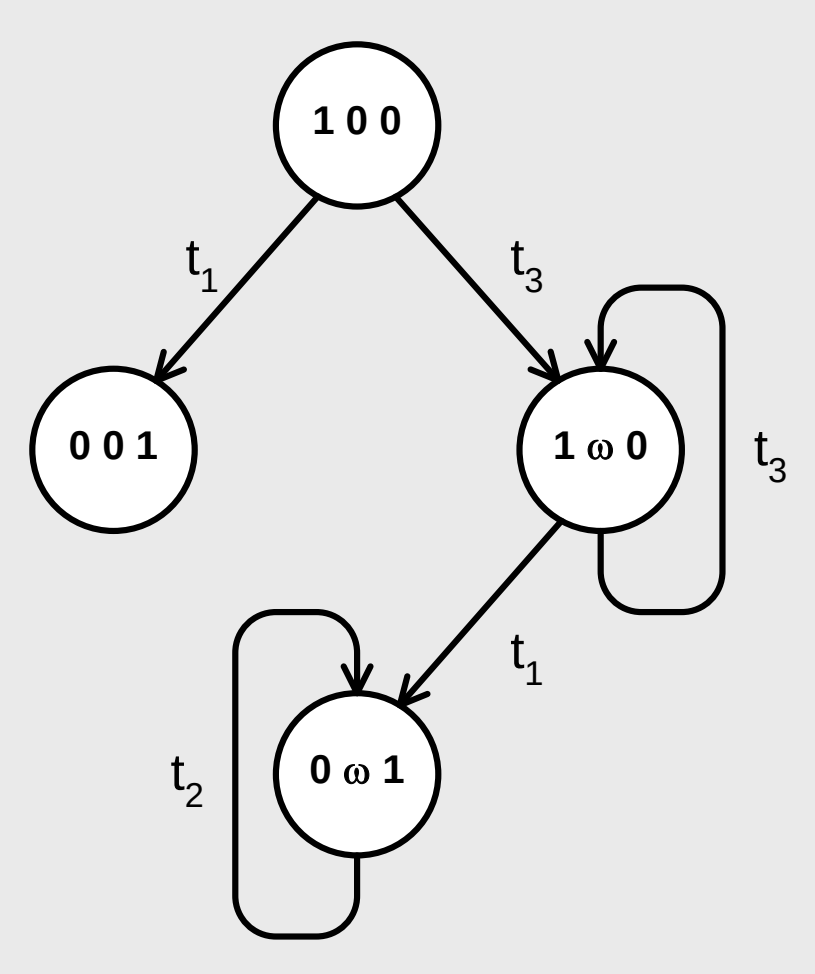
Egy példa és annak fedési fája





Egy példa és annak fedési gráfja





Petri hálók fedési fájának analízise

Közvetlenül is leolvasható tulajdonságok:

- Petri háló korlátos $\Leftrightarrow$ $R(N, M_0)$ elérhetőségi gráfja véges $\Leftrightarrow$ Fedési fában ω nem jelenik meg címkeként
- Petri háló biztonságos $\Leftrightarrow$ Csak 0 és 1 jelenik meg csomópont címkeként a fedési fában
- Petri háló egy tranzíciója halott $\Leftrightarrow$ tranzícióhoz tartozó tüzelés nem jelenik meg élcímkeként a fedési fában

Dinamikus tulajdonságok analízis eszközökben

- Korlátosság: Boundedness
- Élő (L4-élő) tulajdonság: Liveness
- Holtpont: Deadlock
- Visszatérő állapot: Home state
- Elérhetőségi gráf: Reachability graph
- Fedési gráf: Coverability graph
- Tüzelési invariánsok: T-invariants
- Hely invariánsok: P-invariants